

УДК 681.332.51

НАИЛУЧШАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ФРЕЗЫ  
ПРИ ОБРАБОТКЕ ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С.М.Семенов

В настоящей статье рассмотрены некоторые теоретические и практические аспекты автоматического фрезерования гладких поверхностей на станках с ЧПУ. Эта тема получила освещение в монографии [1], где разобран случай точечного касания фрезы с заданной поверхностью. Мы изучаем возможность более тесного касания.

При работе фреза быстро вращается вокруг своей оси. Поэтому ее можно считать телом, ограниченным поверхностью вращения, которую описывают режущие кромки зубьев. В статье рассматривается только тот случай, когда эта поверхность гладкая. Перемещение фрезы в пространстве дает однопараметрическое семейство гладких поверхностей. Если существует огибающая поверхность этого семейства, то она и будет вырезанной поверхностью. Для точности вырезания наилучшим является вариант, когда заданная и вырезанная поверхности касаются, поэтому в [1], как и в этой статье, рассматривается только такое движение фрезы, когда она касается заданной поверхности (точнее той, которая отстоит от нее на припуск). Вообще говоря, фреза касается заданной поверхности одной точкой. При движении фрезы эта точка вычерчивает кривую, вдоль которой погрешность будет нулевой. Некоторая окрестность этой кривой дает полосу с удовлетворительной точностью. Несколько проходов фрезы должны покрыть такими полоса-

ми заданную поверхность. В таком аспекте задача рассматривается в [1].

Настоящая статья родилась в результате решения задачи о вырезании лентообразной поверхности (одна сторона лопатки насоса) одним проходом фрезы. Такое ограничение порождает особые требования к точности.

Для того, чтобы фреза коснулась заданной поверхности в заданной точке, достаточно варьировать три параметра, например, положение в пространстве фиксированной точки оси фрезы при неизменном положении оси. Здесь мы под варьированием понимаем только плавное изменение.

На поверхности фрезы в каждом ее положении можно выделить кривую, в точках которой она касается вырезанной поверхности. Однопараметрическое семейство этих кривых образует вырезанную поверхность. Поэтому точность приближения определяется теснотой касания этих кривых и заданной поверхности. В этой статье выделены условия, при которых можно поворотом фрезы вокруг общей нормали к поверхности фрезы и заданной (еще один варьируемый параметр) добиться, чтобы это касание было третьего порядка. Поскольку простое касание - второго порядка, можно в таком случае существенно выиграть в точности.

Если выбирать точку касания на поверхности фрезы (для поверхности вращения это еще один варьируемый параметр), то можно решать дополнительную задачу, например, когда боковая часть фрезы вырезает поверхность лопатки, закругленный конец фрезы вырезает втулку лопаточного колеса.

Главная задача статьи - нахождение наилучшего взаимного положения фрезы и заданной поверхности, если даны точки, которыми они соприкасаются.

Статья разбита на пять частей. В первой части описан способ задания формы фрезы. Во второй приводятся необходимые сведения из дифференциальной геометрии. В третьей обосновывается

метод определения оптимальной ориентации фрезы. В четвертой доказывается теорема, устанавливающая отношение этого метода к задаче о касании поверхности одновременно трех кривых. В пятой даются некоторые практические рекомендации по использованию метода, связанные с интерполяцией дискретно заданных функций, а также обсуждаются трудности, возникающие при его практическом применении.

1. В дальнейшем под фрезой будем понимать не ее саму, а тело, ограниченное поверхностью, образованной вращением режущих кромок ее зубьев.

Рабочую поверхность фрезы можно разбить на две части: тороидальный конец и боковую сторону. В этой статье мы будем считать, что фрезерование идет боковой стороной удлиненной фрезы (конической, цилиндрической и пр.), хотя теоретически обсуждаемый метод пригоден и в случае, когда поверхность фрезеруется тороидальной частью фрезы.

Наиболее естественным кажется задавать форму боковой стороны фрезы зависимостью радиуса поперечного сечения от точки на оси фрезы, через которую проходит секущая плоскость. Однако, мы примем другой способ, несколько упрощающий уравнения. Пусть дана положительная функция  $R$  неотрицательного аргумента. Ось фрезы - это луч в пространстве. Для каждой его точки строим сферу с центром в этой точке радиуса  $R(s)$ , где  $s$  - расстояние до вершины луча. Огибающая поверхность получившегося семейства сфер и будет поверхностью фрезы. Вершину луча будем называть концом фрезы.

Положение фрезы задано, если даны координаты ее конца (три параметра) и направление оси (два параметра).

2. Приведем некоторые сведения из дифференциальной геометрии (более подробно см. [2]).

Пусть  $\bar{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$  - координаты точки в пространстве, поверхность задается параметрически:  $x^i = H^i(t, s)$ ,

$X^2 = H^2(t, s)$ ,  $X^3 = H^3(t, s)$ , где функции  $H^1, H^2, H^3$  дважды непрерывно дифференцируемы. Обозначим  $\bar{H} = \{H^1, H^2, H^3\}$ . Предполагается, что ранг матрицы Якоби этой вектор-функции равен двум.

Символами  $(\cdot, \cdot)$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  будем обозначать соответственно скалярное и векторное произведения.

Вектора  $\bar{H}_t(t, s)$  и  $\bar{H}_s(t, s)$  (буква внизу обозначает частную производную) задают касательную плоскость, которую можно также задавать единичной нормалью к поверхности  $\bar{N} = \langle \bar{H}_t, \bar{H}_s \rangle / \|\langle \bar{H}_t, \bar{H}_s \rangle\|$ .

Проведем через нормаль плоскость. Кривая, являющаяся пересечением поверхности и этой плоскости называется нормальным сечением. Введем на плоскости локальную систему координат: начало - в рассматриваемой точке поверхности, ось  $Oy$  - вдоль нормали, ось  $Ox$  - вдоль касательной к нормальному сечению. Пусть нормальное сечение в этой системе координат задается уравнением  $y = f(x)$ . Величина  $f''(0)$  называется нормальной кривизной в направлении, задаваемом линией пересечения нормальной и касательной плоскостей.

Обозначим  $E = (\bar{H}_t, \bar{H}_t)$ ,  $F = (\bar{H}_t, \bar{H}_s)$ ,  $G = (\bar{H}_s, \bar{H}_s)$ ,  $L = (\bar{H}_{tt}, \bar{N})$ ,  $M = (\bar{H}_{ts}, \bar{N})$ ,  $N = (\bar{H}_{ss}, \bar{N})$ .

Нормальная кривизна в направлении, определяемом вектором  $\alpha \bar{H}_t + \beta \bar{H}_s$ , дается формулой

$$k = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}.$$

В касательной плоскости есть два направления, ортогональных друг другу, в которых нормальная кривизна достигает максимального и минимального значений. Эти направления называются главными, а соответствующие нормальные кривизны - главными кривизнами. Главные кривизны являются решениями квадратного уравнения

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + GL - 2FM)k + (LN - M^2) = 0.$$

Главные направления задаются векторами  $\bar{e}_1 = \alpha_1 \bar{H}_1 + \beta_1 \bar{H}_2$ , где  $\alpha_1, \beta_1$  - решение линейной системы

$$\begin{cases} (L - k_1 E)\alpha_1 + (M - k_1 F)\beta_1 = 0, \\ (M - k_1 F)\alpha_1 + (N - k_1 G)\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Вообще говоря, достаточно одного из этих двух уравнений, так как система вырожденная.

Нормальная кривизна в направлении, составляющем с  $\bar{e}_1$  угол  $\varphi$ , вычисляется по формуле Эйлера

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

3. Рассмотрим вопрос о том, как должна двигаться фреза, чтобы вырезанная поверхность наилучшим образом приближала заданную. Положение фрезы будем задавать тремя декартовыми координатами ее конца и тремя декартовыми координатами единичного вектора, направленного вдоль оси фрезы от конца к обойме, в которой она крепится. Разумеется, для задания направления оси фрезы достаточно двух параметров, и число степеней свободы фрезы равно пяти.

Пусть на заданной поверхности выбрана какая-либо кривая и фреза при своем движении постоянно касается заданной поверхности в точках этой кривой. Вырезанная поверхность будет касаться заданной в точках выбранной кривой. Если поверхности параметризуются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, то расстояние от точки  $A$  заданной поверхности до вырезанной будет величиной  $O(d^2)$ , где  $d$  - расстояние от  $A$  до выбранной кривой.

Предположим, что поверхность имеет гладкость третьего порядка и зададимся вопросом, каково должно быть положение фрезы, чтобы точность была величиной  $O(d^3)$ , и когда это вообще возможно.

Проведем общую нормаль к заданной поверхности и поверхности фрезы в точке их касания. В касательной плоскости проведем через точку касания прямую в каком-нибудь направлении. На плоскости, проходящей через эту прямую и нормаль введем локальную систему координат, как в п. 2. Пусть нормальные сечения трех поверхностей: заданной, фрезы и вырезанной задаются соответственно уравнениями  $y = g(x)$ ,  $y = f(x)$ ,  $y = h(x)$ . Очевидно  $f(0) = g(0) = h(0) = f'(0) = g'(0) = h'(0) = 0$ . Для определенности будем считать, что нормаль направлена от заданной поверхности к фрезе.

Предположим, что в малой окрестности выбранной кривой точки фрезы лежат не ниже заданной поверхности с точностью  $o(d^3)$  (верх там, куда направлена нормаль). Иначе говоря,  $g''(0) \leq f''(0)$  независимо от направления в касательной плоскости. Тогда точки вырезанной поверхности также находятся не ниже заданной поверхности с точностью  $o(d^3)$ . Так как любая точка фрезы лежит не ниже вырезанной поверхности, имеют место неравенства  $g(x) + o(x^3) \leq h(x) \leq f(x)$ .

Пусть для любой точки выбранной кривой имеется такое направление, что для соответствующих нормальных сечений  $g''(0) = f''(0)$ . Совокупность нормальных сечений фрезы в этих направлениях образует поверхность, приближающую заданную с точностью  $o(d^3)$ . (Разумеется, если углы между такими нормальными сечениями и выбранной кривой не нулевые. Иначе совокупность нормальных сечений не образует поверхность.) Вырезанная поверхность находится не выше поверхности, образованной выделенными сечениями. С другой стороны, первая не ниже заданной с точностью  $o(d^3)$ . Следовательно, вырезанная поверхность приближает заданную с точностью  $o(d^3)$ .

Теперь мы можем сформулировать правило: фреза должна быть ориентирована таким образом, чтобы она касалась заданной поверхности, причем для одного направления в касательной плоско-

сти нормальные кривизны фрезы и заданной поверхности равны (это направление не должно совпадать с направлением перемещения фрезы), а по всем другим направлениям имеют место неравенства:  $f'' \geq g''$ , если фреза расположена с той стороны заданной поверхности, куда направлена нормаль;  $f'' \leq g''$ , если с другой.

Приведем формулы для определения положения фрезы по этому правилу. Пусть  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  - единичные вектора главных направлений заданной поверхности, а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  - соответствующие главные кривизны ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ). Одно из главных направлений поверхности фрезы всегда направлено вдоль осевого сечения (единичный вектор  $\bar{f}_1$ , угол между  $\bar{f}_1$  и вектором оси фрезы  $\bar{A}$  острый), другое - вдоль сечения, ортогонального оси фрезы. Соответствующие главные кривизны вычисляются по формулам

$$\mu_1 = \pm R''(1 + (R')^2 - RR''),$$

$$\mu_2 = \mp 1/R.$$

Здесь знак выбирается по правилу: если фреза расположена с той стороны заданной поверхности, куда направлена нормаль, то  $\mu_2 > 0$ , если с другой, то  $\mu_2 < 0$ .

Пусть при оптимальной ориентации фрезы вектор  $\bar{f}_1$  повернут на угол  $\eta$  от  $\bar{e}_1$  к  $\bar{e}_2$ . Тогда графики зависимостей нормальных кривизн фрезы и заданной поверхности от угла  $\varphi$ , отсчитываемого от  $\bar{e}_1$  к  $\bar{e}_2$ , будут выглядеть как на рис. 1 ( $\mu_2 > 0$ ) или рис. 2 ( $\mu_2 < 0$ ). Графики касаются при  $\varphi = \xi$ . В первом случае  $\eta = \xi + \zeta$ , во втором  $\eta = \xi - \zeta$ , где  $\xi$  и  $\zeta$  находятся из условий

$$tg^2 \xi = \frac{(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_1)}{(\mu_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \mu_2)}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \zeta = \frac{(\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_1)}{(\lambda_1 - \mu_2)(\mu_2 - \lambda_2)}, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{\pi}{2}.$$

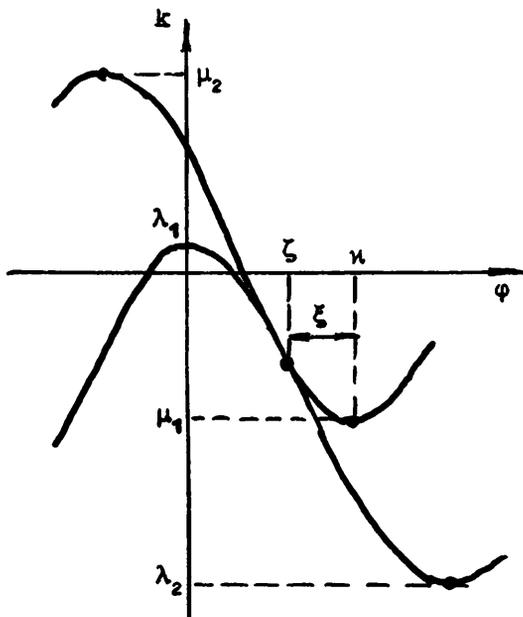


Рис. 1

Мы привели то решение, для которого  $0 \leq \kappa \leq \frac{\pi}{2}$ .  
 Вообще говоря, с точностью до периода имеется четыре решения, если одно из чисел  $\mu_1$  и  $\mu_2$  лежит внутри отрезка  $[\lambda_2, \lambda_1]$ , а другое вне него; два решения, если какое-либо из чисел  $\mu_1, \mu_2$  совпадает с каким-либо из  $\lambda_1, \lambda_2$ , причем  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  или  $\mu_1 \neq \mu_2$ ; бесконечно много решений, если какое-либо из  $\mu_1, \mu_2$  совпадает с каким-либо из  $\lambda_1, \lambda_2$ , причем  $\lambda_1 = \lambda_2$  или  $\mu_1 = \mu_2$ ; решений нет, если оба  $\mu_1$  и  $\mu_2$  лежат либо внутри отрезка  $[\lambda_2, \lambda_1]$  либо вне него.

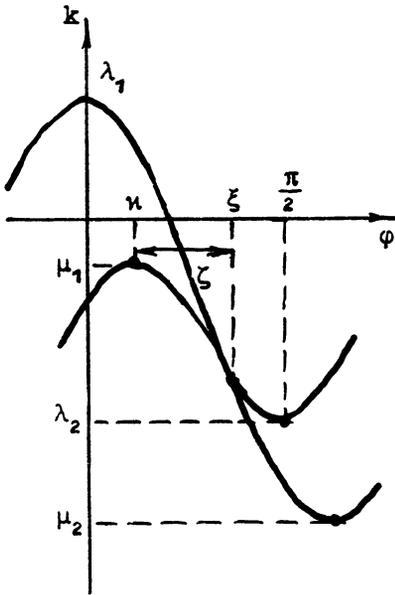


Рис. 2

Для тех фрез, на которые ориентирована статья, практически всегда  $\mu_2$  лежит вне  $[\lambda_2, \lambda_1]$ . Поэтому желательно, чтобы  $\mu_1 \in [\lambda_2, \lambda_1]$ . Для конических фрез  $\mu_1 = 0$  и следовательно от заданной поверхности требуется, чтобы ее главные кривизны имели разные знаки.

Отметим особые случаи: если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то для точности величина  $\eta$  не имеет значения; если  $\mu_1 > \lambda_1$ , то наилучшее  $\eta = 0$ ; если  $\mu_1 < \lambda_2$ , то наилучшее  $\eta = \frac{\pi}{2}$ .

Мы уже отметили, что решений может быть несколько. Точнее, если угол  $\eta$  дает решение, то и углы  $\pm \eta + \pi n$  ( $n$  - целое) также дают решения. Для выбора из них привлекаются дополнительные соображения, например можно потребовать, чтобы угол между  $\vec{F}_1$  и направлением перемещения фрезы был возможно ближе к  $\frac{\pi}{2}$ .

Обозначим через  $S$  расстояние от конца фрезы до точки пересечения оси фрезы с прямой, проходящей через точку касания ортогонально общей касательной плоскости фрезы и заданной поверхности. Для задания  $S$  нужны дополнительные соображения например, при вырезании шнека - условие касания втулки шнека концевым закруглением фрезы. Единичный вектор оси фрезы определяется по формуле

$$\bar{A} = R'(s)\bar{n} + \sqrt{1 - (R'(s))^2} (\bar{e}_1 \cos \eta + \bar{e}_2 \sin \eta),$$

а вектор из координат конца фрезы

$$\bar{X}_0 = \bar{X} + R(s)\bar{n} - s\bar{A} ,$$

где  $\bar{X}$  - вектор из координат точки касания.

Если значение величины  $s$  не существенно, то обработку теоретически можно вести на четырехкоординатном станке. В противном случае требуется пятикоординатный.

4. Можно взглянуть на проблему с другой точки зрения и дать иное обоснование метода.

Если при своем движении фреза постоянно касается некоторой кривой, причем эта кривая находится вне фрезы, за исключением точки касания, то, достаточно очевидно, что та часть кривой, которой фреза коснулась, будет лежать на вырезанной поверхности. Сколько заданных кривых может касаться фреза, если точка касания на одной из них и соответствующая точка на фрезе заданы? Оказывается, что в невырожденном случае трех.

Таким образом, правомерно поставить задачу о вырезании одним проходом фрезы лентовидной поверхности так, чтобы погрешность на трех фиксированных непересекающихся кривых была нулевой.

Здесь мы докажем утверждение о том, что при сближении трех кривых (при том, что они остаются на фиксированной гладкой поверхности) фреза стремится к тому самому положению, которое мы предложили в предыдущем пункте, а также выясним условие существования решения задачи о касании трех кривых. Прежде всего дадим математическую постановку задачи.

Пусть две функции  $\bar{F}$  и  $\bar{H}$  из  $R^2$  в  $R^3$  трижды непрерывно дифференцируемы, матрицы Якоби имеют ранг 2 и для некоторых  $t_2, s_2, x_2, y_2$  выполняются равенства

$$\bar{F}(t_2, s_2) = \bar{H}(x_2, y_2) = 0 ,$$

$$\langle \bar{F}_t(t_2, s_2), \langle \bar{H}_x(x_2, y_2), \bar{H}_y(x_2, y_2) \rangle \rangle = 0 .$$

Пусть  $A$  - отображение из  $R^3$  в множество матриц  $3 \times 3$ , осуществляющих поворот в  $R^3$  относительно нуля таким образом, что

$$(A(\alpha, \beta) \bar{F}_t(t_2, s_2), \langle \bar{H}_x(x_2, y_2), \bar{H}_y(x_2, y_2) \rangle) \equiv 0.$$

Назовем поверхности  $\bar{X} = A(\alpha, \beta) \bar{F}(t, s)$  ( $t, s$  - параметры),  $\bar{X} = \bar{H}(x, y)$  соответственно первой и второй. (Первая поверхность - это заданная, вторая - поверхность фрезы. Предполагается, что вторая поверхность касается кривой  $\bar{X} = A(\alpha, \beta) \bar{F}(t, s_2)$  при  $t = t_2, s = s_2, x = x_2, y = y_2$ .)

Для каждого такого значения пары параметров  $s_1, s_3$  таких, что  $s_1 \neq s_2, s_2 \neq s_3, s_1 \neq s_3$ , ставится задача  $P(s_1, s_3)$  о нахождении таких  $\alpha$  и  $\beta$ , что вторая поверхность касается кривых  $\bar{X} = A(\alpha, \beta) \bar{F}(t, s_1)$  и  $\bar{X} = A(\alpha, \beta) \bar{F}(t, s_3)$ .

Кроме того, рассмотрим задачу  $P(s_2, s_2)$  о нахождении таких  $\alpha$  и  $\beta$ , что обе поверхности касаются друг друга при  $t = t_2, s = s_2, x = x_2, y = y_2$  таким образом, что графики зависимостей нормальных кривизн от угла, задающего направление в касательной плоскости, касаются друг друга.

**ТЕОРЕМА.** Пусть для главных нормальных кривизн  $\lambda_1, \lambda_2$  первой поверхности при  $t = t_2, s = s_2$  и  $\mu_1, \mu_2$  второй поверхности при  $x = x_2, y = y_2$  выполняется неравенство  $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2$  или  $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2$ .

Тогда для любого из четырех решений задачи  $P(s_2, s_2)$  такого, что направление в касательной плоскости, соответствующее касанию графиков нормальных кривизн, не коллинеарно вектору  $A(\alpha, \beta) \bar{F}_t(t_2, s_2)$ , найдется такое  $\epsilon > 0$ , что при  $|s_1 - s_2| < \epsilon, |s_3 - s_2| < \epsilon$  существует решение задачи  $P(s_1, s_3)$ , которое при  $s_1 \rightarrow s_2, s_3 \rightarrow s_2$  стремится к этому решению задачи  $P(s_2, s_2)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку теорема сформулирована в форме, инвариантной относительно параметризаций поверхностей, можно без ограничения общности считать, что

$$\bar{F}_t(t_2, s_2) = \bar{H}_x(x_2, y_2) = \{1, 0, 0\},$$

$$\bar{F}_s(t_2, s_2) = \bar{H}_y(x_2, y_2) = \{0, 1, 0\},$$

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \cdot \sin \alpha & \sin \beta \cdot \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha & -\sin \beta \cdot \cos \alpha \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Взаимное расположение векторов  $\bar{A}F_t$ ,  $\bar{A}F_s$ ,  $\bar{H}_x$ ,  $\bar{H}_y$  показано на рис. 3 ( $\bar{A}F_t$  лежит в плоскости векторов  $\bar{H}_x, \bar{H}_y$ ,

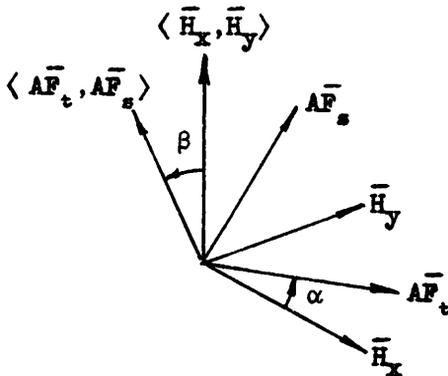


Рис. 3

вектор  $\langle \bar{H}_x, \bar{H}_y \rangle$  лежит в плоскости векторов  $\bar{A}F_s$  и  $\langle \bar{A}F_t, \bar{A}F_s \rangle$ ).

Выразим задачу  $P(s_1, s_3)$  как систему двух алгебраических уравнений  $q(\alpha, \beta, s_1, s_3)$  так, чтобы функция  $q$ :

$R^4 \rightarrow R^2$  при  $s_1 = s_2$  и  $s_3 = s_2$  порождала задачу  $P(s_2, s_2)$  и допускала применение теоремы о неявном отображении. Этим будет доказана теорема.

Обозначим  $\bar{G}(\alpha, \beta, t, s, x, y) = A(\alpha, \beta)\bar{F}(t, s) - \bar{H}(x, y)$ .

Если обозначить через  $t_1, s_1, x_1, y_1$  значения параметров, соответствующие касанию второй поверхности и кривой  $\bar{X} = A(\alpha, \beta)\bar{F}(t, s_1)$ , то система алгебраических уравнений

для задачи  $P(s_1, s_3)$  в наиболее развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{G}(\alpha, \beta, t, s, x, y) = 0, \\ (A(\alpha, \beta) \bar{F}_t(t, s), \langle \bar{H}_x(x, y), \bar{H}_y(x, y) \rangle) = 0, \end{array} \right.$$

(для  $i = 2$  равенства выполняются по условию).

Для исключения неизвестных  $t, s, x, y$ ,  $i = 1, 3$ , умножим скалярно систему уравнений  $\bar{G}(\alpha, \beta, t, s, x, y) = 0$  на три ортонормированных вектора  $\bar{H}_x(x, y)$ ,  $\bar{H}_y(x, y)$  и  $\bar{n} = \langle \bar{H}_x(x, y), \bar{H}_y(x, y) \rangle$ . Для нахождения  $t, x, y$  через  $\alpha, \beta, s$  выделим равенство

$$Q(\alpha, \beta, t, s, x, y) = 0, \quad (1)$$

где

$$Q(\alpha, \beta, t, s, x, y) = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{G}(\alpha, \beta, t, s, x, y), \bar{H}_x(x, y)) \\ (\bar{G}(\alpha, \beta, t, s, x, y), \bar{H}_y(x, y)) \\ (A(\alpha, \beta) \bar{F}_t(t, s), \langle \bar{H}_x(x, y), \bar{H}_y(x, y) \rangle) \end{bmatrix}.$$

Решение системы (1) относительно  $t, x, y$ , если его рассматривать как функцию параметра  $s$ , можно представить как две кривые на первой и второй поверхностях. Параметризуем эти две кривые единым параметром  $\tau$ , являющимся нату-

ральным параметром кривой на второй поверхности. Получим четыре скалярных функции  $\varphi, \eta, \psi, \xi$  переменных  $\tau, \alpha, \beta$  таких, что

$$Q(\alpha, \beta, \varphi(\tau, \alpha, \beta), \eta(\tau, \alpha, \beta), \psi(\tau, \alpha, \beta), \xi(\tau, \alpha, \beta)) \equiv 0. \quad (2)$$

Пусть  $\alpha^*, \beta^*$  - какое-нибудь решение задачи  $P(s_2, s_2)$ , о котором говорится в формулировке теоремы. Докажем, что при малых  $|s - s_2|, |\alpha - \alpha^*|, |\beta - \beta^*|$  система (1) имеет решение.

Чтобы воспользоваться теоремой о неявном отображении, надо доказать, что определитель матрицы

$$\frac{\partial Q}{\partial (t, x, y)} (\alpha^*, \beta^*, t_2, s_2, x_2, y_2) \text{ не равен нулю.}$$

Будем считать, что  $\tau = 0$  соответствует  $t = t_2, s = s_2, x = x_2, y = y_2$ .

Договоримся, что далее в формулах, если аргументы функций опущены, то  $\alpha = \alpha^*, \beta = \beta^*, t = t_2, s = s_2, x = x_2, y = y_2$ .

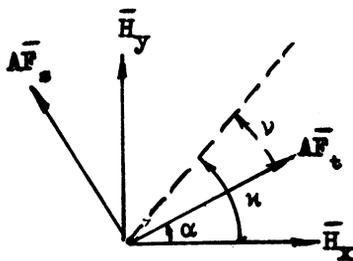


Рис. 4

Очевидно, что  $\beta^* = 0$ , так как в ситуации, соответствующей решению задачи  $P(s_2, s_2)$  поверхности касаются. Будем задавать направление в касательной плоскости углом  $\kappa$ , отсчитываемом от вектора  $\bar{H}_x$ , или углом  $\nu = \kappa - \alpha$ , отсчитываемом от  $\bar{A}\bar{F}_t$  (рис. 4).

Нормальная кривизна первой поверхности дается функцией

$$k_F(\nu) = L^F \cos^2 \nu + 2M^F \cos \nu \cdot \sin \nu + N^F \sin^2 \nu,$$

где  $L^F = (\bar{F}_{tt}, \bar{n})$ ,  $M^F = (\bar{F}_{ts}, \bar{n})$ ,  $N^F = (\bar{F}_{ss}, \bar{n})$ , а вто-

рой поверхности -

$$k_H(\kappa) = L^H \cos^2 \kappa + 2M^H \cos \kappa \sin \kappa + N^H \sin^2 \kappa,$$

или

$$k_*(\nu) = k_H(\nu + \alpha) = L^* \cos^2 \nu + 2M^* \cos \nu \sin \nu + N^* \sin^2 \nu,$$

где

$$L^H = (\bar{H}_{xx}, \bar{n}), \quad M^H = (\bar{H}_{xy}, \bar{n}), \quad N^H = (\bar{H}_{yy}, \bar{n}),$$

$$L^* = L^H \cos^2 \alpha + 2M^H \cos \alpha \sin \alpha + N^H \sin^2 \alpha,$$

$$M^* = M^H (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (L^H - N^H) \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$N^* = N^H \cos^2 \alpha - 2M^H \cos \alpha \sin \alpha + L^H \sin^2 \alpha.$$

Разница кривизн задается функцией

$$d(\nu) = a \cos^2 \nu + 2b \cos \nu \sin \nu + c \sin^2 \nu,$$

$$a = L^F - L^*, \quad b = M^F - M^*, \quad c = N^F - N^*.$$

Решение задачи  $P(s_2, s_2)$  определяется условием существования такого угла  $\nu^*$ , что  $d(\nu^*) = d'(\nu^*) = 0$ .

При нахождении  $\det \frac{\partial Q}{\partial (t, x, y)}$  воспользуемся тем, что при  $\beta = 0$  для любого  $\bar{z} \in R^3$   $(A\bar{z}, \bar{n}) = (\bar{z}, \bar{n})$  и

$$A\bar{F}_x = \bar{H}_x \cos \alpha + \bar{H}_y \sin \alpha, \quad A\bar{F}_y = -\bar{H}_x \sin \alpha + \bar{H}_y \cos \alpha.$$

Обозначим

$$\bar{W}_1 = \langle \bar{H}_{xx}, \bar{H}_y \rangle + \langle \bar{H}_x, \bar{H}_{xy} \rangle,$$

$$\bar{W}_2 = \langle \bar{H}_{xy}, \bar{H}_y \rangle + \langle \bar{H}_x, \bar{H}_{yy} \rangle.$$

Тогда

$$\det \frac{\partial Q}{\partial (t, x, y)} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\overline{AF}_t, \overline{H}_x) & -(\overline{H}_x, \overline{H}_x) & -(\overline{H}_y, \overline{H}_x) \\ (\overline{AF}_t, \overline{H}_y) & -(\overline{H}_x, \overline{H}_y) & -(\overline{H}_y, \overline{H}_y) \\ (\overline{AF}_{t_1}, \overline{n}) & (\overline{AF}_t, \overline{w}_1) & (\overline{AF}_t, \overline{w}_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \alpha & -1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & -1 \\ L^F & -L^H \cos \alpha - M^H \sin \alpha & -M^H \cos \alpha - N^H \sin \alpha \end{vmatrix} = L^F - L^* = a.$$

Докажем, что  $a \neq 0$ . Так как направление в касательной плоскости, соответствующее  $v = v^*$ , не коллинеарно  $\overline{AF}_t$ , то

$$\sin v^* \neq 0. \quad (3)$$

Из равенств

$$d(v) = \cos v (a \cos v + b \sin v) + \sin v (b \cos v + c \sin v),$$

$$d'(v) = -2 \sin v (a \cos v + b \sin v) + 2 \cos v (b \cos v + c \sin v)$$

следует, что условие  $d(v) = d'(v) = 0$  эквивалентно условию

$$a \cos v + b \sin v = b \cos v + c \sin v = 0.$$

В наших предположениях  $d(v) \neq 0$ . Из формулы

$$2d(v) = (a-c) \cos 2v + 2b \sin 2v + (a+c)$$

видно, что  $a \neq c$  или  $b \neq 0$ .

Предположим, что  $a = 0$ . Тогда  $c \neq 0$  или  $b \neq 0$ .

Если  $b \neq 0$ , то, с учетом равенства

$$a \cos v^* + b \sin v^* = 0 \quad (4)$$

имеем  $\sin v^* = 0$ .

Если  $b = 0$ , то  $c \neq 0$ , и, с учетом равенства

$$b \cos \nu^* + c \sin \nu^* = 0$$

опять имеем  $\sin \nu^* = 0$ , а это противоречит (3).

Теперь докажем, что при малых  $|\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_2|$  уравнение  $\mathfrak{B} = \eta(\tau, \alpha^*, \beta^*)$  относительно  $\tau$  разрешимо. Для этого достаточно показать, что направление, задаваемое углом  $\nu^*$ , и направление касательной к кривым, определяемым функциями  $\varphi, \eta, \psi, \xi$ , совпадают. Тогда  $\eta_\tau(0, \alpha^*, \beta^*) \neq 0$  и можно воспользоваться теоремой о неявной функции.

Дифференцируя по  $\tau$  равенства (2), получаем

$$\begin{aligned} & (\Delta \bar{F}_{\tau\tau} \varphi_\tau + \Delta \bar{F}_{\tau s} \eta_\tau, \langle \bar{H}_x, \bar{H}_y \rangle) + (\Delta \bar{F}_\tau, \langle \bar{H}_{xx} \varphi_\tau + \\ & + \bar{H}_{xy} \xi_\tau, \bar{H}_y \rangle) + (\Delta \bar{F}_\tau, \langle \bar{H}_x, \bar{H}_{xy} \varphi_\tau + \bar{H}_{yy} \xi_\tau \rangle) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$(\Delta \bar{F}_\tau \varphi_\tau + \Delta \bar{F}_s \eta_\tau - \bar{H}_x \varphi_\tau - \bar{H}_y \xi_\tau, \bar{H}_x) = 0, \quad (6)$$

$$(\Delta \bar{F}_\tau \varphi_\tau + \Delta \bar{F}_s \eta_\tau - \bar{H}_x \varphi_\tau - \bar{H}_y \xi_\tau, \bar{H}_y) = 0. \quad (7)$$

Из (6), (7) и того обстоятельства, что вектора  $\Delta \bar{F}_\tau, \Delta \bar{F}_s, \bar{H}_x, \bar{H}_y$  параллельны одной плоскости, следует соотношение

$$\Delta \bar{F}_\tau \varphi_\tau + \Delta \bar{F}_s \eta_\tau = \bar{H}_x \varphi_\tau + \bar{H}_y \xi_\tau.$$

Учитывая связь между  $\Delta \bar{F}_\tau, \Delta \bar{F}_s$  и  $\bar{H}_x, \bar{H}_y$ , находим

$$\begin{aligned} \varphi_\tau &= \varphi_\tau \cos \alpha^* - \eta_\tau \sin \alpha^*, \\ \xi_\tau &= \varphi_\tau \sin \alpha^* + \eta_\tau \cos \alpha^*. \end{aligned}$$

Поэтому (5) можно переписать в виде

$$(L^{\mathfrak{F}} - L^*) \varphi_\tau + (M^{\mathfrak{F}} - M^*) \eta_\tau = 0.$$

Сравнивая это равенство с (4), получаем

$$\varphi_{\tau} = \cos v^*, \quad \eta_{\tau} = \sin v^*,$$

$$\phi_{\tau} = \cos(v^* + \alpha^*), \quad \xi_{\tau} = \sin(v^* + \alpha^*).$$

Осталось воспользоваться неравенством (3).

Пусть  $s_i = \eta(\tau_i, \alpha^*, \beta^*)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , (по нашему предположению  $\tau_2 = 0$ ). Стремление  $s_i$  к  $s_2$  эквивалентно стремлению  $\tau_i$  к 0. Задачу  $P(s_1, s_3)$  можно представить как систему уравнений  $g(\tau_i, \alpha, \beta) = 0$ ,  $i = 1, 3$ , где  $g(\tau, \alpha, \beta) =$

$$= (\bar{g}(\alpha, \beta, \varphi(\tau, \alpha, \beta), \eta(\tau, \alpha, \beta), \phi(\tau, \alpha, \beta), \xi(\tau, \alpha, \beta)), \bar{\pi}).$$

Эту систему можно записать с использованием обозначений трехточечных разностных аппроксимаций первой и второй производных

$$D_1(h, s_1, s_2, s_3) = \\ = \frac{(s_2 - s_1)(h(s_3) - h(s_2))}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} + \frac{(s_3 - s_2)(h(s_2) - h(s_1))}{(s_3 - s_1)(s_2 - s_1)},$$

$$D_2(h, s_1, s_2, s_3) = \\ = \frac{2}{(s_3 - s_1)} \left\{ \frac{h(s_3) - h(s_2)}{s_3 - s_2} - \frac{h(s_2) - h(s_1)}{s_2 - s_1} \right\}$$

в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1(g(\cdot, \alpha, \beta), \tau_1, 0, \tau_3) = 0, \\ D_2(g(\cdot, \alpha, \beta), \tau_1, 0, \tau_3) = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1(g(\cdot, \alpha, \beta), \tau_1, 0, \tau_3) = 0, \\ D_2(g(\cdot, \alpha, \beta), \tau_1, 0, \tau_3) = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

При  $\tau_1 = \tau_3 = 0$  она принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\tau} (0, \alpha, \beta) = 0, \\ g_{\tau\tau} (0, \alpha, \beta) = 0. \end{array} \right.$$

Покажем, что эта система выражает собой задачу  $P(s_2, s_2)$ . Действительно в подстановке  $t = \varphi(\tau, \alpha, \beta)$ ,  $v = \eta(\tau, \alpha, \beta)$ ,  $x = \psi(\tau, \alpha, \beta)$ ,  $y = \xi(\tau, \alpha, \beta)$  ее можно переписать в виде

$$(\Delta \bar{F}_t \varphi_\tau + \Delta \bar{F}_s \eta_\tau - \bar{H}_x \psi_\tau - \bar{H}_y \xi_\tau, \bar{n}) = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (\Delta(\bar{F}_{tt} \varphi_\tau^2 + 2\bar{F}_{ts} \varphi_\tau \eta_\tau + \bar{F}_{ss} \eta_\tau^2) - \\ & - (\bar{H}_{xx} \psi_\tau^2 + 2\bar{H}_{xy} \psi_\tau \xi_\tau + \bar{H}_{yy} \xi_\tau^2) + \\ & + \Delta \bar{F}_t \varphi_{\tau\tau} + \Delta \bar{F}_s \eta_{\tau\tau} - \bar{H}_x \psi_{\tau\tau} - \bar{H}_y \xi_{\tau\tau}, \bar{n}) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (6), (7), (10) следует, что

$$\Delta \bar{F}_t \varphi_\tau + \Delta \bar{F}_s \eta_\tau - \bar{H}_x \psi_\tau - \bar{H}_y \xi_\tau = 0. \quad (12)$$

Формулировка теоремы исключает из рассмотрения те решения, для которых  $\eta^i = 0$ . Поэтому  $\Delta \bar{F}_s$  принадлежит линейной оболочке векторов  $\Delta \bar{F}_t$ ,  $\bar{H}_x$ ,  $\bar{H}_y$  или, что, с учетом третьего из равенств (1), то же самое, линейной оболочке векторов  $\bar{H}_x$ ,  $\bar{H}_y$ . Отсюда следует, что  $\beta = 0$ . Но тогда

$$\langle \Delta \bar{F}_t, \Delta \bar{F}_s \rangle = \langle \bar{F}_t, \bar{F}_s \rangle = \langle \bar{H}_x, \bar{H}_y \rangle = \bar{n}$$

и для любого  $\bar{z} \in \mathbb{R}^3$  справедливо равенство  $(\Delta \bar{z}, \bar{n}) = (\bar{z}, \bar{n})$ . Поэтому (11) имеет вид

$$L^F \varphi_\tau^2 + 2M^F \varphi_\tau \eta_\tau + N^F \eta_\tau^2 = L^H \psi_\tau^2 + 2M^H \psi_\tau \xi_\tau + N^H \xi_\tau^2.$$

Повторяя рассуждения, проделанные при доказательстве того, что  $\eta_\tau \neq 0$ , приходим к выводу, что  $(L^F - L^*) \varphi_\tau + (M^F - M^*) \eta_\tau = 0$  и для некоторого  $\nu$  имеют место равенства  $\varphi_\tau = \cos \nu$ ,  $\eta_\tau = \sin \nu$ ,  $\psi_\tau = \cos(\nu + \alpha)$ ,  $\xi_\tau = \sin(\nu + \alpha)$ .

Мы получили, что  $d(v) = 0$  и  $a \cos v + b \sin v = 0$ . Отсюда с учетом того, что  $\sin v \neq 0$ , следует  $d'(v) = 0$ .

Итак, система (8), (9) при  $\tau_1 = \tau_3 = 0$  эквивалентна задаче  $P(s_2, s_2)$ , потому что  $\beta = 0$ , а для нахождения  $\alpha$  имеем условие существования такого  $v$ , что  $d(v) = d'(v) = 0$ .

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что предел матрицы Якоби системы (8), (9) при  $\alpha \rightarrow \alpha^*$ ,  $\beta \rightarrow \beta^*$ ,  $\tau_1 \rightarrow 0$ ,  $\tau_3 \rightarrow 0$  имеет ненулевой определитель. Очевидно, этот определитель равен

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{\tau\beta} & \varepsilon_{\tau\beta} \\ \varepsilon_{\tau\alpha} & \varepsilon_{\tau\beta} \end{vmatrix} \quad (13)$$

в подстановке  $\tau = 0$ ,  $\alpha = \alpha^*$ ,  $\beta = \beta^*$ .

Из формул (при  $\alpha = \alpha^*$ ,  $\beta = \beta^*$ )

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

следует  $A_\alpha \bar{F}_t = A \bar{F}_s$ ,  $A_\alpha \bar{F}_s = -A \bar{F}_t$ ,  $A_\beta \bar{F}_t = 0$ ,  $A_\beta \bar{F}_s = \bar{n}$ . Поэтому для любого  $\bar{z} \in R^3$  имеем  $(A_\alpha \bar{z}, \bar{n}) = 0$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\tau\alpha} &= (A_\alpha \bar{F}_t \varphi_\tau + A_\alpha \bar{F}_s \eta_\tau + A \bar{F}_t \varphi_{\tau\alpha} + A \bar{F}_s \eta_{\tau\alpha}, \bar{n}) = \\ &= (A \bar{F}_s (\varphi_\tau + \eta_{\tau\alpha}) + A \bar{F}_t (-\eta_\tau + \varphi_{\tau\alpha}), \bar{n}) = 0, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\tau\beta} = (A_\beta \bar{F}_t \varphi_\tau + A_\beta \bar{F}_s \eta_\tau + A \bar{F}_t \varphi_{\tau\beta} + A \bar{F}_s \eta_{\tau\beta}, \bar{n}) = \eta_\tau.$$

То, что  $\varepsilon_{\tau\alpha} = 0$  избавляет нас от нужды выписывать формулу для  $\varepsilon_{\tau\tau\beta}$ . Далее

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\tau\tau\alpha} &= (2A(\bar{F}_{tt} \varphi_{\tau} \varphi_{\tau\alpha} + \bar{F}_{ts} (\varphi_{\tau\alpha} \eta_{\tau} + \varphi_{\tau} \eta_{\tau\alpha}) + \bar{F}_{ss} \eta_{\tau} \eta_{\tau\alpha}) - \\
&- 2(\bar{H}_{xx} \psi_{\tau} \psi_{\tau\alpha} + \bar{H}_{xy} (\psi_{\tau\alpha} \xi_{\tau} + \psi_{\tau} \xi_{\tau\alpha}) + \bar{H}_{yy} \xi_{\tau} \xi_{\tau\alpha}) + \\
&+ A\bar{F}_t \varphi_{\tau\tau\alpha} + A\bar{F}_s \eta_{\tau\tau\alpha} - \bar{H}_x \psi_{\tau\tau\alpha} - \bar{H}_y \xi_{\tau\tau\alpha}, \bar{H}) = \\
&= 2(L^F \varphi_{\tau} \varphi_{\tau\alpha} + M^F (\varphi_{\tau\alpha} \eta_{\tau} + \eta_{\tau\alpha} \varphi_{\tau}) + N^F \eta_{\tau} \eta_{\tau\alpha} - \\
&- L^H \psi_{\tau} \psi_{\tau\alpha} - M^H (\psi_{\tau\alpha} \xi_{\tau} + \psi_{\tau} \xi_{\tau\alpha}) - N^H \xi_{\tau} \xi_{\tau\alpha}).
\end{aligned}$$

Учитывая связь между  $\varphi_{\tau}, \eta_{\tau}, \psi_{\tau}, \xi_{\tau}$  и  $\nu, \alpha$  при  $\beta = 0$ , имеем

$$\begin{aligned}
\psi_{\tau\alpha} &= -(\nu_{\alpha} + 1)(\sin \nu \cos \alpha + \cos \nu \sin \alpha) = \\
&= \varphi_{\tau\alpha} \cos \alpha - \eta_{\tau\alpha} \sin \alpha - \eta_{\tau} \cos \alpha - \varphi_{\tau} \sin \alpha = \\
&= \varphi_{\tau\alpha} \cos \alpha - \eta_{\tau\alpha} \sin \alpha - \xi_{\tau},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{\tau\alpha} &= (\nu_{\alpha} + 1)(\cos \nu \cos \alpha - \sin \nu \sin \alpha) = \\
&= \eta_{\tau\alpha} \cos \alpha + \varphi_{\tau\alpha} \sin \alpha + \varphi_{\tau} \cos \alpha - \eta_{\tau} \sin \alpha = \\
&= \eta_{\tau\alpha} \cos \alpha + \varphi_{\tau\alpha} \sin \alpha + \psi_{\tau}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\tau\tau\alpha} &= 2((L^F - L^*) \varphi_{\tau} \varphi_{\tau\alpha} + (M^F - M^*) (\varphi_{\tau\alpha} \eta_{\tau} + \varphi_{\tau} \eta_{\tau\alpha}) + \\
&+ (N^F - N^*) \eta_{\tau} \eta_{\tau\alpha} + L^H \psi_{\tau} \xi_{\tau} + M^H (\xi_{\tau}^2 - \varphi_{\tau}^2) - N^H \psi_{\tau} \xi_{\tau}).
\end{aligned}$$

Дифференцируя по  $\alpha$  тождество  $\varphi_{\tau}^2 + \eta_{\tau}^2 = 1$ , получаем, что для некоторого  $C$  справедливы соотношения  $\varphi_{\tau\alpha} = C \eta_{\tau}$ ,  $\eta_{\tau\alpha} = -C \varphi_{\tau}$ . Поэтому,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\tau\tau\alpha} &= 2(C(a \varphi_{\tau} \eta_{\tau} + b(\eta_{\tau}^2 - \varphi_{\tau}^2) - c \varphi_{\tau} \eta_{\tau}) + \\
&+ L^H \psi_{\tau} \xi_{\tau} + M^H (\xi_{\tau}^2 - \varphi_{\tau}^2) - N^H \psi_{\tau} \xi_{\tau}).
\end{aligned}$$

С учетом того, что  $d'(\nu^*) = 0$ , получаем

$$B_{\tau\tau\alpha} = k'_*(v^*),$$

где  $k_*(v) = L^* \cos^2 v + 2M^* \cos v \sin v + N^* \sin^2 v$ .

Введем в рассмотрение функцию

$$k_P(v) = L^P \cos^2 v + 2M^P \cos v \sin v + N^P \sin^2 v.$$

Условие  $d(v^*) = d'(v^*) = 0$  означает, что графики функций  $k_*$  и  $k_P$  касаются друг друга при  $v = v^*$ . Если  $k'_*(v^*) = 0$ , то графики касаются точками, соответствующими экстремумам и, следовательно,  $\mu_1 = \lambda_1$  для некоторой пары  $(i, j)$ , что противоречит условию теоремы.

Итак, определитель (13) не равен нулю и теорема доказана полностью.

Между прочим, система (8), (9) при  $\tau_1 \neq \tau_2 = \tau_3$  порождает геометрическую задачу о касании второй поверхности одновременно кривой  $\bar{X} = \Delta \bar{F}(t, s_1)$  и первой поверхности вдоль кривой  $\bar{X} = \Delta \bar{F}(t, s_2)$ .

5. В случае применения конических фрез для фрезерования лентовидных поверхностей предложенный метод расчета движения фрезы наиболее эффективен, если при расчете формы поверхности она представляется как линейчатая, т.е.

$$\bar{X} = \bar{H}(t, s) = \bar{P}(t) + s\bar{Q}(t).$$

Кривую  $\bar{X} = \bar{P}(t)$  называем направляющей, а прямую  $\bar{X} = \bar{H}(t, s)$  ( $t$  фиксировано,  $s$  - параметр) - образующей.

Обычно направляющая задается набором точек  $\{\bar{P}_i\}_{i=1, n}$  и для каждой такой точки дается двумя углами  $\varphi_i$  и  $\theta_i$  направляющий вектор образующей  $\bar{Q}_i$ :

$$Q_i^1 = \sin \theta_i, \quad Q_i^2 = \cos \theta_i \sin \varphi_i, \quad Q_i^3 = \cos \theta_i \cos \varphi_i.$$

Необходимую интерполяцию можно провести следующим образом. Обозначим через  $\Delta_i$  расстояние между точками  $\bar{P}_i$  и

$\bar{P}_{i+1}$ . Построим набор чисел  $\{t_i\}_{i=1, \dots, n}$  по правилу  $t_1 = 0$ ;  $t_{i+1} = t_i + h_i, i = 1, \dots, n-1$ .

В качестве функций  $\varphi, \theta, P^1, P^2, P^3$  берем кубические сплайны, построенные по наборам чисел  $\{t_i\}$  (узлы) и соответственно  $\{\varphi_i\}, \{\theta_i\}, \{P_i^1\}, \{P_i^2\}, \{P_i^3\}$ . Можно использовать и более простые способы интерполяции, позволяющие вычислять вторые производные.

С другими способами задания поверхностей вектор-сплайнами можно познакомиться в [1].

Важно отметить следующее обстоятельство. Если сеть точек, задающая поверхность, густая, то погрешности в задании координат точек сильно влияют на значения первых и вторых производных функции  $\bar{H}$  (результата интерполяции). Это может сделать предложенный способ определения положения фрезы совершенно непригодным. Поэтому желательно брать число точек небольшим\*) и исключать набор данных вручную с неизбежными при этом округлениями. Лучше, если в одной программе расчет движения фрезы непосредственно следует за расчетом формы поверхности или между этими этапами промежуточные данные записываются без округления на внешних носителях.

Такого рода трудности связаны с высокой чувствительностью метода к форме поверхности (плата за точность). Но могут возникнуть и затруднения, не связанные с гладкостью поверхности.

Первое связано с тем, что теоретически метод можно применять с полным эффектом (погрешность  $O(d^3)$ ) только при условии, что продольная кривизна фрезы  $\mu_1$  удовлетворяет неравенству  $\max \lambda_2 \leq \mu_1 \leq \min \lambda_1$ , где максимум и минимум берутся по точкам заданной поверхности. Правда, даже в том слу-

\*) В таких ситуациях целесообразно вместо интерполяционных использовать сглаживающие сплайны [1] (Прим. ред.)

чае, если это условие не выполняется, метод дает минимально возможную погрешность,

Другое затруднение связано с тем, что метод, как правило, дает на выбор четыре положения фрезы. Два из них отбрасываются как технически не осуществимые. Для выбора из оставшихся двух привлекаются требования, чтобы угол между осью фрезы и направлением ее движения был возможно ближе к прямому и движение фрезы было непрерывным. К сожалению, эти требования могут оказаться несовместимыми. Например, возможны два варианта плавных проходов фрезы, причем у одного из них в начале фреза располагается поперек направления своего движения, а в конце - вдоль. У другого варианта наоборот - в начале вдоль, а в конце - поперек. Тогда для непрерывной стыковки первой половины первого варианта со второй половиной второго варианта необходимо, чтобы в некоторой средней точке поверхности достигался  $\max \lambda_2$  или  $\min \lambda_1$ , совпадающий с  $\mu_1$ , и вектор  $\bar{e}_2$  (соответственно  $\bar{e}_1$ ) был направлен поперек движения фрезы.

Таким образом, для успешного применения метода его особенности надо иметь в виду еще на стадии проектирования поверхности. Например, при использовании конических фрез, желательно представлять поверхность как линейчатую.

#### Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии. - М.: Машиностроение, 1985. - 224 с.
2. ПОГОРЕЛОВ А.В. Геометрия. -М.: Наука, 1983. - 288 с.

Поступила в ред.-изд. отд.

11 января 1991 года