

УДК 519.677:519.688:519.644.2

О ПОСТРОЕНИИ ЭКВИДИСТАНТ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ
ОБЛАСТИ И ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В.К. Королев

В работе [1] приведена формулировка задачи о построении внутренних эквидистант для плоского контура. Элементами контура могут быть прямолинейные отрезки и дуги окружностей - свободные и экранированные (для последних эквидистанты не проводятся). При обходе контура - против хода часовой стрелки - его внутренность остается слева. Этот контур можно рассматривать как половину осевого сечения некоторого тела вращения. Если же это тело имеет продольные вырезы (детальнее см. ниже, §2), то задача построения эквидистант в этом случае перестает быть плоской и значительно усложняется.

В данной работе 1) выводятся "траекторные" формулы для построения эквидистант плоской задачи; 2) приводится описание расширяющегося продольного плоского выреза с сопрягающим конусом (на основе этих двух моделей с помощью поперечных сечений тела конструируется решение трехмерной задачи построения эквидистант) и 3) предлагается способ сокращения вычислений при счете некоторых интегралов, связанных с этими эквидистантами.

§1. "Траекторные" формулы плоских эквидистант

В [1] для получения последовательных эквидистант плоского контура предварительно определяется его скелет, а затем уже

расчитываются сами эквидистанты. При этом используется пара - метризация лучей, исходящих из точек контура.

Вместо этого двухэтапного процесса можно находить эквиди- станты непосредственно, следя за движением по скелетным ветвям угловых точек контура. Скелет контура в этом случае выстраи- вается пошагово и не играет основополагающей роли. Кроме того, расстояние между соседними эквидистантами не обязано теперь быть постоянным. Наконец, отметим, что формулы, описывающие пе- ремещение угловых точек контура вдоль скелетных ветвей, оказы- ваются не зависящими от применяемой параметризации.

Итак, рассмотрим два соседних элемента контура, исходящие из угловой точки с номером K (см. рис. 1). В общем случае - это две дуги (рис. 1а), одна из которых может быть экранирован- ной (рис. 1б).

Применяя введенную в [1] параметризацию лучей для точек дуги с помощью полярного угла φ , имеем уравнения эквидис- тант для I -й дуги:

$$\begin{cases} x = x_K + R_I \cos \varphi_{I2} + (E - R_I) \cos \varphi_1, \\ y = y_K + R_I \sin \varphi_{I2} + (E - R_I) \sin \varphi_1; \end{cases}$$

для K -й дуги:

$$\begin{cases} x = x_K + R_K \cos \varphi_{K1} + (E - R_K) \cos \varphi_2, \\ y = y_K + R_K \sin \varphi_{K1} + (E - R_K) \sin \varphi_2, \end{cases}$$

если K -я дуга свободная, или

$$\begin{cases} x = x_K + R_K \cos \varphi_{K1} - R_K \cos \varphi_2, \\ y = y_K + R_K \sin \varphi_{K1} - R_K \sin \varphi_2, \end{cases}$$

если эта дуга экранированная.

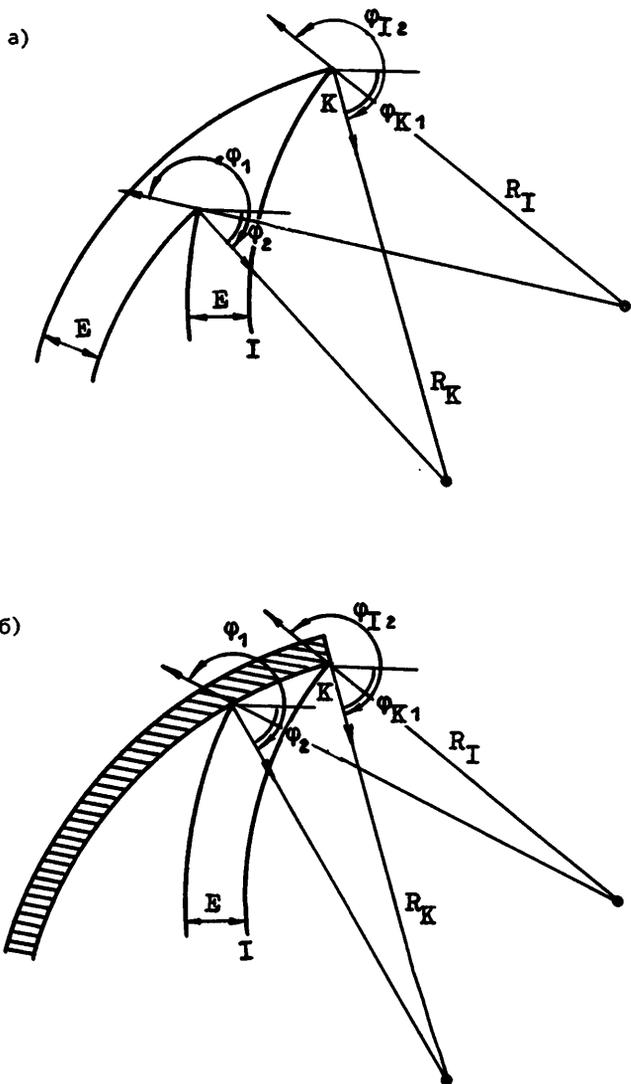


Рис. 1. Две соседние дуги: а) свободные, б) свободная и экранированная

Здесь: R_I и R_K - соответственно радиусы I-й и K-й дуг; φ_1 и φ_2 - текущие углы внутренних нормалей; φ_{I_2} и φ_{K_1} - углы внутренних нормалей соответственно в конечной точке I-й и начальной точке K-й дуг; E - текущий суммарный шаг эквидистанты.

Полагая для краткости:

$$C_I = \cos \varphi_{I_2}, C_1 = \cos \varphi_1, C_K = \cos \varphi_{K_1}, C_2 = \cos \varphi_2, \\ S_I = \sin \varphi_{I_2}, S_1 = \sin \varphi_1, S_K = \sin \varphi_{K_1}, S_2 = \sin \varphi_2$$

и вводя параметр α :

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{- для свободной дуги,} \\ 0 & \text{- для экранированной,} \end{cases}$$

запишем две пары уравнений для эквидистант в следующем виде:

$$\begin{cases} x = x_K + R_I C_I + (E - R_I) C_1, \\ y = y_K + R_I S_I + (E - R_I) S_1, \\ x = x_K + R_K C_K + (\alpha E - R_K) C_2, \\ y = y_K + R_K S_K + (\alpha E - R_K) S_2. \end{cases}$$

Приравнивая по отдельности x и y для точки пересечения эквидистант, получаем два соотношения:

$$\begin{cases} R_I C_I + (E - R_I) C_1 = R_K C_K + (\alpha E - R_K) C_2, \\ R_I S_I + (E - R_I) S_1 = R_K S_K + (\alpha E - R_K) S_2, \end{cases}$$

связывающие текущие углы нормалей φ_1 и φ_2 . Исключая, например, угол φ_1 , имеем уравнение:

$$A C_2 + B S_2 + C = 0,$$

где

$$A = R_K C_K - R_I C_I, \quad B = R_K S_K - R_I S_I,$$

$$C = \frac{\frac{\alpha^2 - 1}{2} E^2 + E(R_I - \alpha R_K) + R_K(R_K - R_I C_{KI})}{\alpha E - R_K},$$

$$C_{KI} = \cos(\varphi_{K1} - \varphi_{I2}).$$

Решая это уравнение и подставляя C_2 и S_2 в выражения для второй из эквидистант, можно получить следующие формулы для вычисления координат точки скелетной ветви:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_K + \left\{ E(R_K C_K - R_I C_I) \left[\frac{1 - \alpha^2}{2} E - (R_I - \alpha R_K) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (R_K S_K - R_I S_I)(R_K R_I S_{KI} - D) \right\} / (R_K^2 + R_I^2 - 2R_K R_I C_{KI}), \\ y &= y_K + \left\{ E(R_K S_K - R_I S_I) \left[\frac{1 - \alpha^2}{2} E - (R_I - \alpha R_K) \right] - \right. \\ &\quad \left. - (R_K C_K - R_I C_I)(R_K R_I S_{KI} - D) \right\} / (R_K^2 + R_I^2 - 2R_K R_I C_{KI}) \end{aligned} \right.$$

где

$$D^2 = R_K^2 R_I^2 S_{KI}^2 - E \left\{ E^3 \frac{(1 - \alpha^2)^2}{4} - E^2 (1 - \alpha^2) (R_I - \alpha R_K) - \right. \\ \left. - E [(R_K^2 - R_I^2 - R_K R_I C_{KI}) + 2\alpha R_K R_I + \alpha^2 (R_I^2 - R_K^2 - R_K R_I C_{KI})] + \right. \\ \left. + 2R_K R_I [(R_K - R_I C_{KI}) + \alpha (R_I - R_K C_{KI})] \right\},$$

$$S_{KI} = \sin(\varphi_{K1} - \varphi_{I2}).$$

Из этих формул следует, что при $E = 0$ $x = x_K$ и $y = y_K$. Таким образом, при увеличении параметра E угловая точка K перемещается по скелетной ветви, так что скелетные ветви служат траекториями движения угловых точек контура.

Неприятность при использовании полученных формул заключается в том, что приходится учитывать весь диапазон изменения

Радиусов R_I и R_K от 0 (случай вырождения в точку) до ∞ (случай прямолинейного отрезка).

Если R_I и R_K одновременно в нуль не обращаются, то полезно "траекторные" формулы иметь в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_K + \left\{ E \left[\frac{C_K}{R_I} - \frac{C_I}{R_K} \right] \left[E \frac{1-\alpha^2}{2R_K R_I} - \left(\frac{1}{R_K} - \frac{\alpha}{R_I} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{S_K}{R_I} - \frac{S_I}{R_K} \right) (S_{KI} - D_1) \right\} / \left[\frac{1}{R_K^2} + \frac{1}{R_I^2} - 2 \frac{C_{KI}}{R_K R_I} \right], \\ y &= y_K + \left\{ E \left[\frac{S_K}{R_I} - \frac{S_I}{R_K} \right] \left[E \frac{1-\alpha^2}{2R_K R_I} - \left(\frac{1}{R_K} - \frac{\alpha}{R_I} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{C_K}{R_I} - \frac{C_I}{R_K} \right) (S_{KI} - D_1) \right\} / \left[\frac{1}{R_K^2} + \frac{1}{R_I^2} - 2 \frac{C_{KI}}{R_K R_I} \right], \end{aligned} \right.$$

где

$$\begin{aligned} D_1^2 &= S_{KI}^2 - E \left\{ E^3 \frac{(1-\alpha^2)^2}{4R_K^2 R_I^2} - E^2 \frac{1-\alpha^2}{R_K R_I} \left(\frac{1}{R_K} - \frac{\alpha}{R_I} \right) - \right. \\ &\quad \left. - E \left[\left(\frac{1}{R_I^2} - \frac{1}{R_K^2} - \frac{C_{KI}}{R_K R_I} \right) + 2 \frac{\alpha}{R_K R_I} + \alpha^2 \left(\frac{1}{R_K^2} - \frac{1}{R_I^2} - \frac{C_{KI}}{R_K R_I} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[\left(\frac{1}{R_I} - \frac{C_{KI}}{R_K} \right) + \alpha \left(\frac{1}{R_K} - \frac{C_{KI}}{R_I} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Записанные в таком виде формулы охватывают все частные случаи вырождения одной из двух соседних дуг или обеих вместе в прямолинейный отрезок или экран. Например, при $R_I = R_K = \infty$ и $\alpha = 1$ получается уравнение биссектрисы угла между I-м и K-м отрезками (см. рис. 2а). Если при этом $\alpha = 0$ (K-й

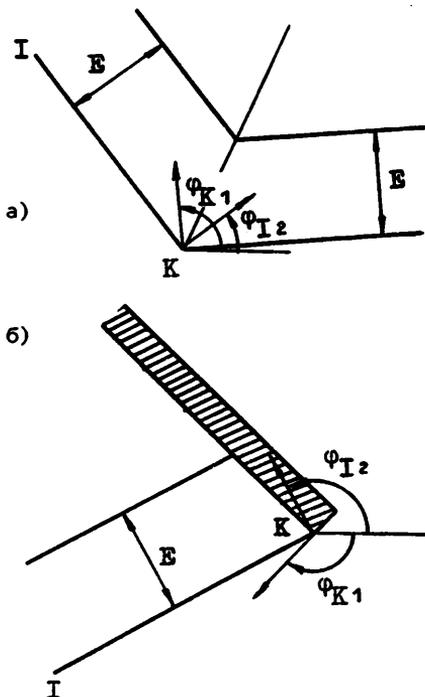


Рис. 2

скелетные ветви. Формулы справедливы лишь до того момента (обновления), когда исчезает какое-либо из семейств эквидистант (например, порожденное I -м элементом, см.рис. 3). Точное решение задачи об определении моментов обновления для общего случая довольно сложно (разбор различных случаев сочетания разнотипных элементов) и, кроме того, неэкономно (счет по громоздким формулам). Предлагается следующий простой приближенный способ.

Пусть вычислены координаты точек I', K', I и K - концов двух последовательных эквидистант (см.рис.3). Тогда могут быть вычислены координаты точки пересечения P прямых, про-

отрезок экранирован - ный), то получается уравнение самого этого отрезка (см.рис. 2б). Как и вообще в случае, когда одним из двух соседних элементов является экран, скелетная ветвь совпадает с этим экраном.

Итак, имея некоторый исходный контур, мы можем для каждой угловой точки контура проследить траекторию ее движения, как перемещение точки пересечения двух соседних синхронных эквидистантных дуг.

Приведенные формулы описывают отдельные

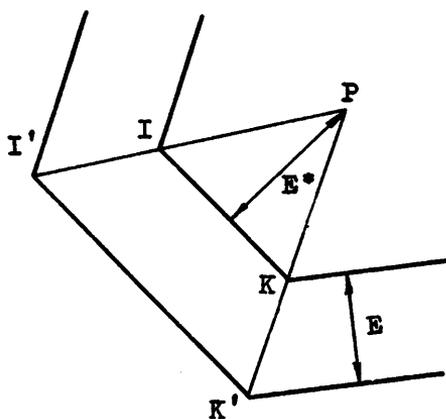


Рис. 3

ходящих через (I', I) и (K', K) и расстояние E^* от P до прямой, проходящей через (I, K) .

Это решение является точным, если все три соседних элемента — прямолинейные отрезки. Для криволинейных элементов решение приближенное и оно тем точнее, чем меньше шаг эквидистанты и чем ближе текущая эквидистанта к точке P .

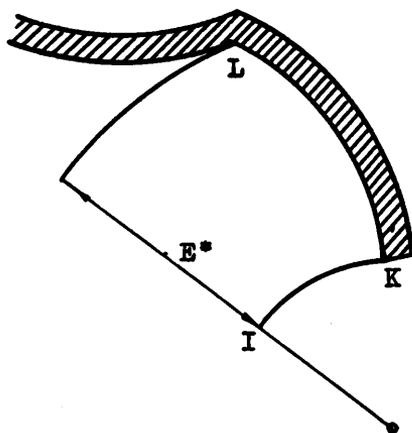


Рис. 4

Начиная с момента обновления, мы имеем дело с новым исходным контуром и, следовательно, с новой задачей построения эквидистант. К моментам обновления относятся также моменты прохождения эквидистант и через точки излома экранированных участков

контура (как, например, на рис.4). (Коротко говоря, всякое изменение в наборе гладких кусков кривых, составляющих контур, определяет момент обновления.) Задача об определении соответствующего значения E^* здесь проще предыдущей общей (поскольку координаты точек излома экрана известны) и решается точно.

Подставляя x_L и y_L в уравнения скелетной ветви, можно получить квадратное уравнение относительно E^* :

$$\frac{(E^*)^2}{2R_K R_I} - \frac{E^*}{R_K} - \left[(x_L - x_K) \left(\frac{C_K}{R_I} - \frac{C_I}{R_K} \right) + (y_L - y_K) \left(\frac{S_K}{R_I} - \frac{S_I}{R_K} \right) \right] = 0,$$

справедливое во всех частных случаях, кроме $R_K = \infty$.

Для $R_K = \infty$ (прямой экран) отдельно выписываются уравнения скелетной ветви и получается квадратное уравнение:

$$\frac{(E^*)^2}{R_I} - 2E^* + 2GS_{KI} - \frac{G^2}{R_I} = 0, \text{ где } G = (x_L - x_K)S_K - (y_L - y_K)C_K.$$

§2. Математическое описание расширяющегося выреза

Задача о построении эквидистантных поверхностей для тела вращения с вырезами из плоской становится трехмерной. Ниже рассматриваются симметричные относительно некоторой осевой плоскости вырезы, ограниченные плоскостью и сопрягающимся с нею круговым конусом. На рис. 5 изображена часть такой конструкции: Ox — продольная ось тела, xy — плоскость симметрии; плоская поверхность выреза определяется точками с номерами $K-1$, K и $K+1$.

Уравнение этой плоскости можно записать в следующем виде:

$$A(x - x_K) + B(y - y_K) + C(z - z_K) = 0,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} y_{K-1} - y_{K-1} & z_{K-1} - z_{K-1} \\ y_{K+1} - y_K & z_{K+1} - z_K \end{vmatrix},$$

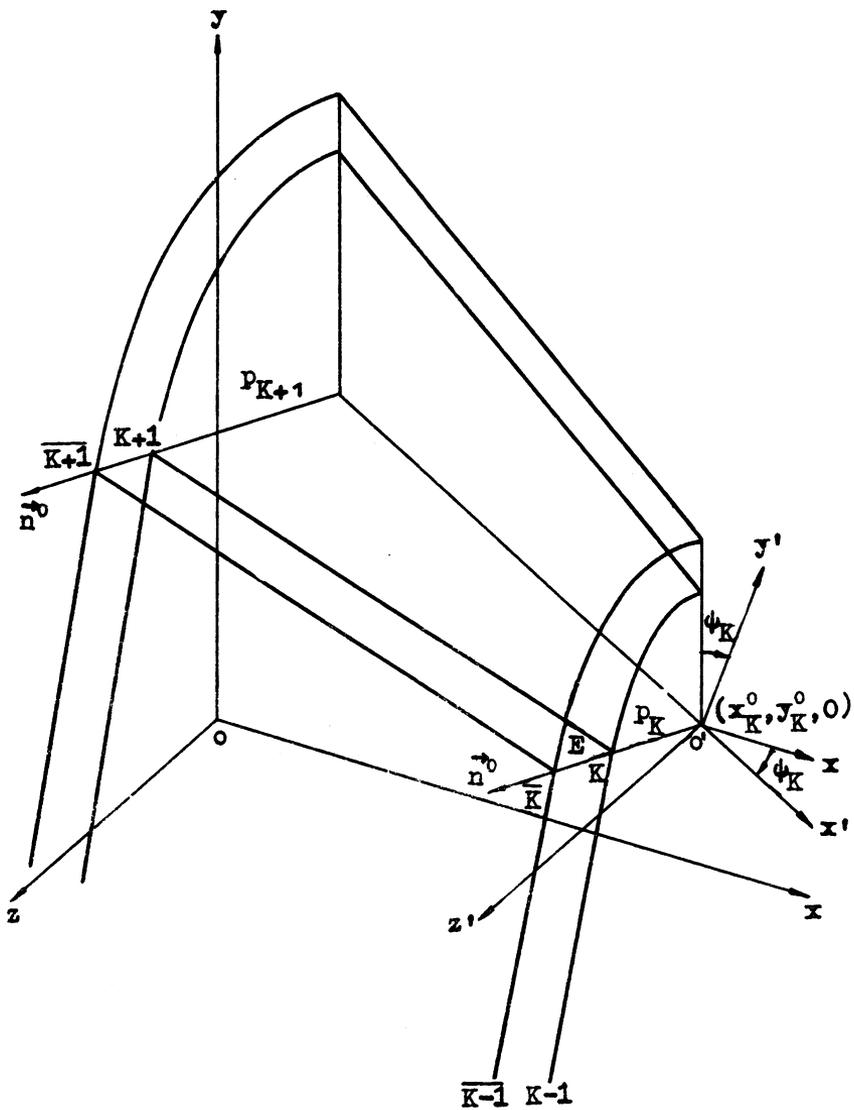


Рис. 5. Элементы продольного выреза

$$B = \begin{vmatrix} z_K - z_{K-1} & x_K - x_{K-1} \\ z_{K+1} - z_K & x_{K+1} - x_K \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_K - x_{K-1} & y_K - y_{K-1} \\ x_{K+1} - x_K & y_{K+1} - y_K \end{vmatrix}.$$

Единичный вектор внешней нормали к плоскости есть $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{D}$,
 где $\vec{n} = \{A, B, C\}$, $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Отметим, что случай, когда плоскость ортогональна оси Oz , исключается, поэтому всегда $C \neq 0$.

Переместим точку K вдоль нормали \vec{n}^0 в отрицательную сторону на величину p_K такую, что новое значение координаты $z = 0$:

$$0 = z_K - p_K \frac{n_z^0}{n_z^0}, \text{ т.е. } p_K = \frac{z_K}{\frac{n_z^0}{n_z^0}}.$$

При этом определяются другие координаты точки K^0 : $x_K^0 = x_K - p_K \frac{n_x^0}{n_x^0}$, $y_K^0 = y_K - p_K \frac{n_y^0}{n_y^0}$.

Аналогично поступим с точкой $K+1$: $0 = z_{K+1} - p_{K+1} \frac{n_z^0}{n_z^0}$,

$$\text{т.е. } p_{K+1} = \frac{z_{K+1}}{\frac{n_z^0}{n_z^0}}, \quad x_{K+1}^0 = x_{K+1} - p_{K+1} \frac{n_x^0}{n_x^0},$$

$$y_{K+1}^0 = y_{K+1} - p_{K+1} \frac{n_y^0}{n_y^0}.$$

Выберем новую систему координат $x'y'z'$ так, что ее начало O' совпадает с точкой $(x_K^0, y_K^0, 0)$, ось $O'x'$ направлена по лучу $(K+1)^0 K^0$, ось $O'z'$ параллельна оси Oz , а ось $O'y'$ перпендикулярна первым двум. При этом угол ϕ_K наклона оси $O'x'$ относительно оси Ox определен: $\phi_K = \arctg(y_K^0 - y_{K+1}^0, x_K^0 - x_{K+1}^0)$.

Таким образом, соответствующее преобразование координат записывается в виде:

$$x' = (x - x_K^0) \cos \phi_K + (y - y_K^0) \sin \phi_K, \quad \}$$

$$\left. \begin{aligned} y' &= -(x-x_K^0) \sin \phi_K + (y-y_K^0) \cos \phi_K, \\ z' &= z. \end{aligned} \right\}$$

В новой координатной системе координаты точек $K-1, K$ и $K+1$ пересчитываются и, аналогично предыдущему, вычисляется вектор \vec{n}'^0 : $\vec{n}'^0 = \frac{\vec{n}'}{D'}$, где $\vec{n}' = \{A', B', C'\}$, $D' = \sqrt{(A')^2 + (B')^2 + (C')^2}$.

Если теперь плоскость, определяемую в начальный момент тремя точками: $K-1, K$ и $K+1$, переместить эквидистантно на расстояние E в сторону внешней нормали, то прямая $K'(K+1)'$ займет положение $\bar{K}'(\bar{K}+1)'$, причем координаты точек \bar{K}' и $(\bar{K}+1)'$ вычисляются следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x}'_K &= x'_K + E n_x'^0, \\ \bar{y}'_K &= y'_K + E n_y'^0, \\ \bar{z}'_K &= z'_K + E n_z'^0, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{x}'_{K+1} &= x'_{K+1} + E n_x'^0, \\ \bar{y}'_{K+1} &= y'_{K+1} + E n_y'^0, \\ \bar{z}'_{K+1} &= z'_{K+1} + E n_z'^0. \end{aligned} \right.$$

Уравнение прямой $\bar{K}'(\bar{K}+1)'$ имеет вид:

$$\frac{x' - \bar{x}'_K}{\bar{x}'_{K+1} - \bar{x}'_K} = \frac{y' - \bar{y}'_K}{\bar{y}'_{K+1} - \bar{y}'_K} = \frac{z' - \bar{z}'_K}{\bar{z}'_{K+1} - \bar{z}'_K}.$$

Вращая эту прямую около оси $O'x'$, мы и получим конус, сопрягающийся с плоскостью $(K-1)'K'(K+1)'$ по прямой $\bar{K}'(\bar{K}+1)'$.

Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до прямой

$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}$$

выражается формулой

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

В нашем случае точка (x_0, y_0, z_0) - это точка $(x', 0, 0)$, направляющий вектор прямой есть:

$$a_x = \bar{x}_{K+1}' - \bar{x}_K', \quad a_y = \bar{y}_{K+1}' - \bar{y}_K', \quad a_z = \bar{z}_{K+1}' - \bar{z}_K',$$

а точка (x_1, y_1, z_1) на прямой - это точка $(\bar{x}_K', \bar{y}_K', \bar{z}_K')$.

Таким образом, в любом сечении конуса плоскостью $x' = x'_T$ мы имеем окружность $(z')^2 + (y')^2 = d^2$, где

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ \bar{y}_K' & \bar{z}_K' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ \bar{z}_K' & \bar{x}_K' - x'_T \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ \bar{x}_K' - x'_T & \bar{y}_K' \end{vmatrix}^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Остается лишь перейти от координат $()'$ к исходным.

Опуская довольно громоздкие выкладки, выпишем окончательное уравнение конуса:

$$z^2 + F_{x_2} x^2 + F_{y_2} y^2 - 2F_{xy} xy - 2F_x x - 2F_y y + F_0 = 0,$$

где

$$F_{x_2} = S^2 + C^2 \delta_2, \quad F_{y_2} = C^2 - S^2 \delta_2, \quad F_{xy} = SC(1 + \delta_2),$$

$$F_x = SV + C(\delta_1 - w\delta_2), \quad F_y = -CV + S(\delta_1 - w\delta_2),$$

$$F_0 = V^2 - (\delta_0 - 2w\delta_1 + w^2 \delta_2).$$

Здесь $S = \sin \phi_K$, $C = \cos \phi_K$, $V = x_K^0 S - y_K^0 C$,
 $W = \bar{x}_K^1 + x_K^0 C + y_K^0 S$, $\delta_0 = [(a_y \bar{z}_K^1 - \bar{y}_K^1 a_z)^2 + a_x^2 (\bar{y}_K^1)^2 +$
 $+ \bar{z}_K^1]^2] / T$, $T = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, $\delta_1 = a_x (a_y \bar{y}_K^1 +$
 $+ a_z \bar{z}_K^1) / T$, $\delta_2 = (a_y^2 + a_z^2) / T$.

ПРИМЕРЫ.

На рис. 6 а, б изображено два частных случая вырезов, плоские поверхности которых параллельны координатной плоскости XOY . Сопрягающие конусы в обоих случаях вырождаются в цилиндры.

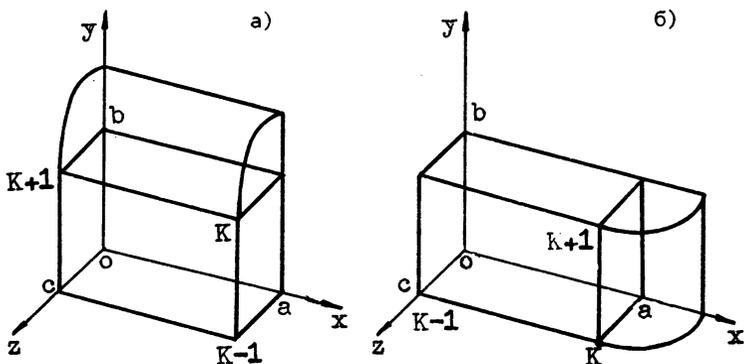


Рис. 6

Случай "а":

$$a_x = -a, \quad a_y = a_z = 0, \quad \bar{y}_K^1 = 0, \quad \bar{z}_K^1 = -c,$$

$$x_K^0 = a, \quad y_K^0 = b, \quad S = 0, \quad C = 1, \quad V = -b, \quad w = 2a,$$

$$T = a^2, \quad \delta_0 = c^2, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0.$$

Поэтому:

$$F_{x_2} = 0, F_{y_2} = 1, F_{xy} = F_x = 0, F_y = b, F_0 = b^2 - c^2.$$

$$\text{Уравнение цилиндра: } z^2 + (y-b)^2 = c^2.$$

Случай "б":

$$a_x = -b, a_y = a_z = 0, \bar{y}'_K = 0, \bar{z}'_K = c,$$

$$x^0_K = a, y^0_K = 0, S = -1, C = 0, V = -a,$$

$$w = a, T = b^2, \delta_0 = c^2, \delta_1 = \delta_2 = 0.$$

Поэтому

$$F_{x_2} = 1, F_{y_2} = 0, F_{xy} = F_y = 0, F_x = a, F_0 = a^2 - c^2, .$$

$$\text{Уравнение цилиндра: } z^2 + (x-a)^2 = c^2.$$

После того, как получено математическое описание расширяющегося (с ростом \mathbb{E}) выреза, процедура построения эквидистантной поверхности может быть организована следующим образом. Выбирается некоторая сетка поперечных сечений тела и для каждого текущего сечения $\mathbf{X} = \mathbf{X}_T$ определяется пересечение двух областей: внутренней, полученной из решения плоской задачи (т.е. для тела вращения) и внешней - для выреза. При этом достаточно рассмотреть лишь половину сектора симметрии поперечного сечения. В результате получается набор поперечных сечений, в каждом из которых определена область (или области), граница которой соответствует текущей эквидистантной поверхности.

3. Вычисление интегралов

В работе [2] приведены примеры интегралов, вычисление которых может представлять интерес после того, как эквидистантные поверхности построены. Для практических целей объемные (и поверхностные) интегралы можно вычислять послойно, используя

два соседних поперечных сечения со ступенчатой (или линейной) аппроксимацией граничных (внешней и внутренней) поверхностей.

При счете поперечных моментов инерции обычно приходится рассматривать либо половину поперечного сечения (если число вырезов N нечетное), либо четверть (при N четном). Поскольку число N может быть большим то встает вопрос о сокращении времени счета. К тому же априори неясно, различаются ли моменты инерции по y и по z .

Оказывается, что при симметричных и симметрично расположенных вырезах, число которых $N \geq 3$:

- 1) моменты инерции по y и по z совпадают;
- 2) формулы для вычисления поперечного момента инерции можно преобразовать так, что достаточно вычислять соответствующий интеграл лишь для половины симметричного сектора.

Таким образом, этот минимальный элемент поперечного сечения полностью представляет всю картину процесса.

Итак, рассмотрим в плоскости $zoу$ область, заключенную между окружностями с радиусами r и R , с удалением неко-

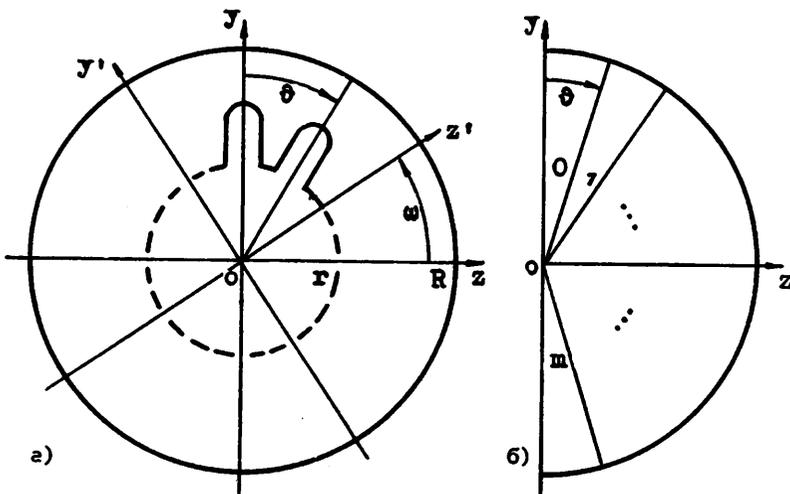


Рис. 7

торых вырезов (см. рис. 7а). Число таких секторов симметрии равно N , $N \geq 3$, и угол сектора $\vartheta = -2\pi/N$.

Вычислим момент инерции цилиндрического слоя единичной толщины относительно оси Oy' , повернутой по отношению к оси Oy на произвольный угол ω :

$$J_{y'} = \int_0^{2\pi} \int_{r(\varphi)}^R ((z')^2 + x^2) \rho \, d\rho \, d\varphi$$

(здесь функция $r(\varphi)$ описывает нижнюю границу; можно было бы считать, что и $R = R(\varphi)$). Опустим слагаемое с x^2 , поскольку координата x не зависит от угла φ . По формулам поворота

$$z' = z \cos \omega + y \sin \omega.$$

Кроме того, в цилиндрических координатах

$$z = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Подставляя эти соотношения в выражение для интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{y'} &= \int_0^{2\pi} \int_{r(\varphi)}^R \rho^3 \cos^2(\varphi - \omega) \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\vartheta} \int_{r(\varphi_0)}^R \rho^3 \cos^2(\varphi_0 - \omega) \, d\rho \, d\varphi_0 + \\ &+ \int_{\vartheta}^{2\vartheta} \int_{r(\varphi_1)}^R \rho^3 \cos^2(\varphi_1 - \omega) \, d\rho \, d\varphi_1 + \dots \\ &\dots + \int_{(N-1)\vartheta}^{N\cdot\vartheta} \int_{r(\varphi_{N-1})}^R \rho^3 \cos^2(\varphi_{N-1} - \omega) \, d\rho \, d\varphi_{N-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_1 = \varphi_0 + \vartheta, \dots, \varphi_{N-1} = \varphi_0 + (N-1)\vartheta$ и в силу симметрии $\Gamma(\varphi)$ - одно и то же для каждого слагаемого, то

$$\tilde{J}_y = \int_0^{\vartheta} \int_{\Gamma(\varphi_0)}^R \rho^3 [\cos^2(\varphi_0 - \omega) + \cos^2(\varphi_0 - \omega + \vartheta) + \dots + \cos^2(\varphi_0 - \omega + (N-1)\vartheta)] d\rho d\varphi_0.$$

Сумма в квадратных скобках приводится к виду

$$\begin{aligned} & \cos^2(\varphi_0 - \omega) \{ [1 + \cos 2\vartheta + \dots + \cos 2(N-1)\vartheta] - \\ & - \operatorname{ctg}(\varphi_0 - \omega) [\sin 2\vartheta + \dots + \sin 2(N-1)\vartheta] \} + \\ & + \sin^2\vartheta + \dots + \sin^2(N-1)\vartheta. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что:

$$1) 1 + \cos 2\vartheta + \dots + \cos 2(N-1)\vartheta = \sin 2\vartheta + \dots + \sin 2(N-1)\vartheta = 0.$$

(достаточно рассмотреть геометрическую прогрессию $1 + e^{i2\vartheta} + \dots + e^{i2(N-1)\vartheta}$) и

$$2) \sin^2\vartheta + \sin^2 2\vartheta + \dots + \sin^2(N-1)\vartheta = N/2$$

(используя формулу А (361.3) стр. 44 из справочника [3]).

Итак,

$$\tilde{J}_y = \frac{N}{2} \int_0^{\vartheta} \int_{\Gamma(\varphi)}^R \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Следовательно, момент инерции не зависит от угла поворота ω (в частности, отсюда следует равенство моментов инерции относительно осей y и z) и может быть вычислен с помощью интеграла по одному сектору симметрии.

Несколько сложнее показать, что при вычислении момента инерции можно ограничиться половиной сектора симметрии.

Рассмотрим полуокруг, разбитый на M полусекторов, занумерованных от 0 до $m = M-1$ (см. рис. 76). Представим интеграл в виде суммы:

$$\begin{aligned}
 J_y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r(\varphi)}^R \rho^3 \cos^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r(\varphi_0)}^R \rho^3 \cos^2 \varphi_0 \, d\rho \, d\varphi_0 + \\
 &\quad + \int_{\frac{\pi}{2} + 2\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2}} \int_{r(\varphi_1)}^R \rho^3 \cos^2 \varphi_1 \, d\rho \, d\varphi_1 + \dots \\
 &\quad \dots + \int_{\frac{\pi}{2} + M\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{M-1}{2}\frac{\vartheta}{2}} \int_{r(\varphi_m)}^R \rho^3 \cos^2 \varphi_m \, d\rho \, d\varphi_m.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно нечетные и четные слагаемые.

1) Нечетное слагаемое

$$J_{y_H}^K = \int_{\frac{\pi}{2} + (2K+1)\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\pi}{2} + (2K+2)\frac{\vartheta}{2}} \int_{r(\varphi_{2K+1})}^R \rho^3 \cos^2 \varphi_{2K+1} \, d\rho \, d\varphi_{2K+1}.$$

После замены переменной
получаем

$$\varphi_{2K+1} = \pi - \varphi_0 + (K+1)\theta$$

$$J_{J_H}^K = \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}}^{\pi} \int_{r(\varphi_0)}^R \rho^3 \cos^2[\varphi_0 - (K+1)\theta] d\rho d\varphi_0 .$$

2) Четное слагаемое

$$J_{J_4}^K = \int_{\frac{\pi}{2} + (2K+1)\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2} + 2K\frac{\theta}{2}} \int_{r(\varphi_{2K})}^R \rho^3 \cos^2 \varphi_{2K} d\rho d\varphi_{2K} .$$

Замена переменной $\varphi_{2K} = \varphi_0 + K\theta$ приводит этот интеграл к виду:

$$J_{J_4}^K = \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r(\varphi_0)}^R \rho^3 \cos^2(\varphi_0 + K\theta) d\rho d\varphi_0 .$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} J_J &= \\ &= \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r(\varphi_0)}^R \rho^3 \{ \cos^2 \varphi_0 + \cos^2(\varphi_0 - \theta) + \cos^2(\varphi_0 + \theta) + \dots \\ &\dots + \cos^2(\varphi_0 - K\theta) + \cos^2(\varphi_0 + K\theta) + \cos^2[\varphi_0 + (K+1)\theta] \} d\rho d\varphi_0 \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r(\varphi_0)}^R \rho^3 \Omega d\rho d\varphi_0.$$

Последнее слагаемое в фигурных скобках присутствует, если m - нечетное, и отсутствует в противном случае.

Разберем отдельно оба случая.

1) $m = 2K$ - четное (т.е. $m-1 = 2K-1$).

Имеем:

$$\begin{aligned} \cos^2(\varphi_0 - K\theta) + \cos^2(\varphi_0 + K\theta) &= \\ &= 2(\cos^2\varphi_0 \cos^2 K\theta + \sin^2\varphi_0 \sin^2 K\theta). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Omega &= \cos^2\varphi_0 [1 + 2(\cos^2\theta + \dots + \cos^2 K\theta) - \\ &- 2(\sin^2\theta + \dots + \sin^2 K\theta)] + 2(\sin^2\theta + \dots + \sin^2 K\theta) = \\ &= \cos^2\varphi_0 [1 + 2K - 4(\sin^2\theta + \dots + \sin^2 K\theta)] + \\ &+ 2(\sin^2\theta + \dots + \sin^2 K\theta). \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему, можно показать, что

$$2(\sin^2\theta + \dots + \sin^2 K\theta) = M/2.$$

Отсюда следует, что $\Omega = M/2$.

2) $m = 2K-1$ - нечетное ($2K+2 = m+1 = M$, т.е. $K = M/2$). Последнее слагаемое в выражении Ω равно

$$\begin{aligned} \cos^2[\varphi_0 - (K+1)\theta] &= \cos^2\varphi_0 [\cos 2(K+1)\theta + \\ &+ \operatorname{tg}\varphi_0 \sin 2(K+1)\theta] + \sin^2(K+1)\theta = \cos^2\varphi_0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Omega = \cos^2 \varphi_0 [2 + 2K - 4(\sin^2 \theta + \dots + \sin^2 K\theta)] + \\ + 2(\sin^2 \theta + \dots + \sin^2 K\theta) = M/2 .$$

Таким образом:

$$J_y = \frac{M}{2} \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r(\varphi_0)}^R \rho^3 d\rho d\varphi_0 .$$

Итак, для любого $N \geq 3$ (четного или нечетного) вычисление момента инерции можно свести к счету интеграла по φ в пределах лишь одной половины сектора симметрии.

В данной статье отражены лишь три наиболее существенных части большой задачи. Работа проводилась в течение нескольких лет. Имеется пакет программ на языке PL/1 для ЕС ЭВМ, просчитано большое число различного рода конструкций описанного выше типа. Реализован вывод на графопостроитель текущей графической и численной информации (эквидистанты и значения интегралов).

Л и т е р а т у р а

1. КОРОЛЕВ В.К. Построение скелета и эквидистант для плоского контура //Сплайн-аппроксимация и численный анализ. - Новосибирск, 1985. - Вып. 108: Вычислительные системы. -С. 111-127.
2. КОРОЛЕВ В.К. Об алгоритмизации вычислений некоторых интегралов в инженерной геометрии //Сплайны в вычислительной математике. - Новосибирск, 1986. - Вып. 115: Вычислительные системы. - С. 137-149.
3. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.-Л.: Гостехиздат, 1951.

Поступила в ред.-изд.отд.
21 мая 1991 года