

УДК 519.615:519.624

ОРГАНИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

С.И. Фадеев

Математическое моделирование явлений, присущих пленочной электромеханике, связано с необходимостью использования численных методов исследования нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Характерными примерами являются задача об определении напряжения срабатывания пленочного электростатического реле, нелинейные колебания поршня в цилиндре, наполненном газом, под воздействием электростатических сил. Эти и другие подобные проблемы в области математического моделирования каталитических реакций, теории горения и т.д. послужили поводом для разработки предлагаемого численного метода решения нелинейных краевых задач, отличительной чертой которых является множественность решений как отражение гистерезисных процессов.

1. Пусть требуется найти компоненты $y_1(x), y_2(x), \dots$, $\dots, y_n(x)$ вектор-функции $y(x)$ на конечном интервале (a, b) скалярного аргумента x , удовлетворяющего условиям:

$$x \in (a, b), \quad \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n, Q),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n, Q),$$

... ..

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n, Q),$$

$$g_1[y_1(a), \dots, y_n(a), y_1(b), \dots, y_n(b), Q] = 0,$$

$$g_2[y_1(a), \dots, y_n(a), y_1(b), \dots, y_n(b), Q] = 0,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$g_n[y_1(a), \dots, y_n(a), y_1(b), \dots, y_n(b), Q] = 0.$$

Здесь Q - скалярный параметр, f_i и g_i , $i = 1, 2, \dots$, n - достаточно гладкие функции (например, дважды дифференцируемые) по совокупности аргументов в некоторой области их определения. Функции g_1, g_2, \dots, g_n представляют n независимых краевых условий. Полагая f_i и g_i компонентами вектор-функции f и g , запишем краевую задачу в векторном виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, Q), \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

$$g(\alpha, \beta, Q) = 0, \quad \alpha = y(a), \quad \beta = y(b). \quad (2)$$

В частности, краевые условия (2) могут задаваться независимо при $x = a$ и $x = b$:

$$l(\alpha, Q) = 0, \quad r(\beta, Q) = 0, \quad (3)$$

где l и r - вектор-функции размерности n_0 и $n - n_0$, имеющие компоненты l_1, l_2, \dots, l_{n_0} и $r_1, r_2, \dots, r_{n-n_0}$ соответственно. Если правая часть (1) является

ω -периодической вектор-функцией по x , то для отыскания ω -периодического решения ставятся условия:

$$y(0) = y(\omega), \quad \omega > 0, \quad (4)$$

т.е. $a = 0$, $b = \omega$. Возможны и другие варианты задания краевых условий.

Обычно в определении правых частей (1) и краевых условий (2) участвует множество параметров. Среди них выделяется параметр Q , если представляет интерес поведение решения $y(x, Q)$ краевой задачи (1), (2) в зависимости от значений параметра Q . Эффективным средством численного построения этой зависимости служит метод Ньютона-Канторовича-Рафсона (метод квазилинеаризации) в сочетании с процедурой продолжения решения по параметру [1, 2].

Пусть $Y^{[0]}(x)$ - вектор-функция, которая может служить начальным приближением решения краевой задачи (1) - (2) при некотором значении параметра $Q = \bar{Q}$. Тогда согласно методу квазилинеаризации строится последовательность вектор-функций $Y^{[k]}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, сходящаяся к $y(x, \bar{Q})$ при $k \rightarrow \infty$, и определяемая как решения линейных краевых задач:

$$\left. \begin{aligned} k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{du}{dx} = A^{[k]}(x)u + F^{[k]}(x), \quad x \in (a, b), \\ S^{[k]}u(a) + T^{[k]}u(b) + \varphi^{[k]} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где для удобства использованы обозначения:

$$u(x) = Y^{[k+1]}(x),$$

$$A^{[k]}(x) = f_{yy}(x, Y^{[k]}(x), \bar{Q}),$$

$$F^{[k]}(x) = f(x, Y^{[k]}(x), \bar{Q}) - A^{[k]}(x)Y^{[k]}(x),$$

$$S^{[k]} = g_{\alpha}(Y^{[k]}(a), Y^{[k]}(b), \bar{Q}),$$

$$T^{[k]} = g_{\beta}(Y^{[k]}(a), Y^{[k]}(b), \bar{Q}),$$

$$\varphi^{[k]} = g(Y^{[k]}(a), Y^{[k]}(b), \bar{Q}) + S^{[k]}Y^{[k]}(a) - \\ - T^{[k]}Y^{[k]}(b),$$

где f_y , ε_α , ε_β - соответствующие матрицы якобиана. Предполагается, что краевая задача (1), (2) имеет решение при $Q = \bar{Q}$, а $Y^{[0]}(x)$ - вектор-функция, достаточно близкая к $y(x, \bar{Q})$, так что при любом $k \geq 0$ краевая задача (5) однозначно разрешима [3]. Иными словами, однородная краевая задача, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= A^{[k]}(x)z, & x \in (a, b), \\ S^{[k]}z(a) + T^{[k]}z(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

имеет только тривиальное решение, или, что то же самое, существует ограниченная матричная функция Грина однородной краевой задачи (6), в том числе и краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= A(x)z, & x \in (a, b), \\ Sz(a) + Tz(b) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $A(x)$, S и T определены на решении $y(x, \bar{Q})$:

$$A(x) = f_y(x, y(x, \bar{Q}), \bar{Q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{[k]}(x),$$

$$S = \varepsilon_\alpha(y(a, \bar{Q}), y(b, \bar{Q}), \bar{Q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{[k]},$$

$$T = \varepsilon_\beta(y(a, \bar{Q}), y(b, \bar{Q}), \bar{Q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{[k]}.$$

Отсюда следует однозначная разрешимость линейной краевой задачи относительно производных $y_Q(x, \bar{Q})$ по Q решения (1), (2) при $Q = \bar{Q}$:

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= y_Q(x, \bar{Q}), \quad x \in (a, b), \\ \frac{dv}{dx} &= A(x)v + P(x), \\ Sv(a) + Tv(b) + \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь $P(x)$ и ψ - векторы производных по Q :

$$P(x) = f_Q(x, y(x, \bar{Q}), \bar{Q}),$$

$$\psi = g_Q(y(a, \bar{Q}), y(b, \bar{Q}), \bar{Q}).$$

Как известно, условие однозначной разрешимости краевой задачи (8) имеет вид:

$$\det[S\Phi(a) + T\Phi(b)] \neq 0, \quad (9)$$

где $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица решений уравнения

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z, \quad x \in (a, b).$$

Считая условие (9) выполненным, приведем выражения матричных функций Грина $G_0(x)$ и $G(x, t)$, $x, t \in (a, b)$:

$$G_0(x) = -\Phi(x)[S\Phi(a) + T\Phi(b)]^{-1},$$

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t), & a \leq x < t, \\ G_2(x, t), & t < x \leq b, \end{cases}$$

$$G_1(x, t) = -\Phi(x)[S\Phi(a) + T\Phi(b)]^{-1}T\Phi(b)\Phi^{-1}(t),$$

$$G_2(x, t) = \Phi(x)\{I - [S\Phi(a) + T\Phi(b)]^{-1}T\Phi(b)\}\Phi^{-1}(t).$$

При этом решение краевой задачи (8) запишется следующим образом:

$$v(x) = \int_a^b G(x, t)P(t)dt + G_0(x)\psi. \quad (10)$$

Из ограниченности норм $G(x, t)$ и $G_0(x)$, а также норм правых частей $P(x)$ и ψ вытекает ограниченность нормы вектор-функции производных решения (1), (2) по параметру Q при $Q = \bar{Q}$: $\|v(x)\| \leq M < \infty$.

Знание производных позволяет эффективно задать начальное приближение решения (1), (2) при $Q = \bar{Q} + \Delta Q$, если шаг по Q достаточно мал, например, в виде:

$$Y^{[0]}(x) = y(x, \bar{Q}) + y_Q(x, \bar{Q})\Delta Q.$$

Затем вновь строится последовательность $Y^{[k]}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, сходящаяся к $y(x, \bar{Q})$, $Q = \bar{Q} + \Delta Q$, при $k \rightarrow \infty$, и, кроме того, вычисляется вектор-функция производных решения по параметру Q и т.д. Тем самым численно строится зависимость решения (1), (2) от параметра Q на заданном отрезке $[\bar{Q}, \bar{Q}]$ по Q , если на каждом шагу имеет место существование ограниченной функции Грина однородной краевой задачи (7). Процессу продолжения решения по параметру Q можно дать следующую геометрическую интерпретацию.

В $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве (x, y_1, \dots, y_n) графиком решения краевой задачи (1), (2) при заданном значении параметра Q является гладкая пространственная кривая S_Q :

$$y_1 = y_1(x, Q), y_2 = y_2(x, Q), \dots, y_n = y_n(x, Q), Q \in [\bar{Q}, \bar{Q}].$$

Непрерывно меняя Q , мы получим гладкую поверхность Σ_Q , целиком состоящую из пространственных кривых S_Q . При этом каждому значению параметра Q соответствует единственная про-

пространственная кривая S_Q , принадлежащая поверхности Σ_Q . Очевидно, площадь полосы поверхности между двумя пространственными кривыми, задаваемыми решениями $y(x, \bar{Q})$ и $y(x, Q)$, $Q \in [\bar{Q}, \bar{Q}]$, также может играть роль параметра Q .

Отметим, что полная априорная информация о существовании решения краевой задачи при заданном значении параметра $Q = \bar{Q}$ имеется лишь в исключительных случаях. Поэтому продолжение решения по параметру Q может быть использовано в следующей типичной для нелинейной проблемы ситуации. Пусть известно, что при некотором значении параметра $Q = Q_0$, $Q_0 \in [\bar{Q}, \bar{Q}]$, мы можем численно, или даже точно, найти $y(x, Q)$, и в то же время способ задания $y^{[0]}(x)$ начального приближения решения $y(x, \bar{Q})$ не известен. Если в достаточно малой окрестности Q_0 решение дифференцируемо по Q , то естественно предпринять попытку продолжить решение $y(x, Q)$ от $Q = Q_0$ до $Q = \bar{Q}$ и этим способом получить $y(x, \bar{Q})$. При этом процедура продолжения решения по параметру носит характер численного эксперимента, который не всегда завершается построением решения $y(x, \bar{Q})$: может, например, оказаться, что при $Q = \bar{Q}$ решения краевой задачи не существует вообще. В том случае, когда \bar{Q} принадлежит упомянутой окрестности Q_0 , продолжение решения по параметру можно рассматривать, в частности, как способ задания начального приближения при решении нелинейной проблемы (1), (2), где $Q = \bar{Q}$. Иногда в тех же целях параметр Q вводится искусственным образом (см. [4, 5]).

Вполне возможно, что в процессе продолжения решения краевой задачи (1), (2) параметр Q попадет в достаточно малую окрестность собственного числа краевой задачи (7). При этом краевые задачи (5), (8) становятся плохо обусловленными, в частно-

сти, с приближением к собственному числу неограниченно растет норма решения краевой задачи (8). Поэтому для того чтобы задать очередное приемлемое начальное приближение $y^{[0]}(x)$ решения (1), (2), мы должны мельчить шаг по Q , медленно приближаясь к точке ветвления решения (1), (2) по параметру Q . Тем не менее, иногда удается избежать затруднений вычислительного характера в такого рода ситуациях за счет регулярного обращения к параметризации в процессе продолжения решения. Прежде чем дать определение понятию параметризации и очертить те нелинейные краевые задачи, при численном исследовании которых параметризация эффективна, остановимся на примере нелинейной краевой задачи, моделирующей работу пленочного электростатического реле, а затем, используя этот пример в качестве иллюстрации, сформулируем предлагаемый вариант параметризации.

2. Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{aligned}
 x \in (0, 1), \quad \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\
 \frac{dy_2}{dx} &= \frac{Q}{(1-y_1)^2}, \\
 y_2(0) = y_1(1) &= 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

описывающую положение гибкого натянутого электрода пленочного электростатического реле в зависимости от разности потенциалов, приложенной к неподвижному и гибкому электродам. Здесь Q - параметр, пропорциональный квадрату разности потенциалов. Значения прогиба отнесены к ширине зазора реле, а расстояние от центра симметрии прогиба отнесено к полудлине электрода. В краевых условиях учтена симметрия прогиба. Предполагается, что зазор много меньше длины электродов. Приведем точное решение задачи (11) в виде:

$$\lambda = y_1(0), \quad 0 \leq \lambda < 1,$$

$$x(y_1, \lambda) = \frac{1}{R} \left[\sqrt{(1-y_1)(\lambda-y_1)} + (1-\lambda) \ln \frac{\sqrt{1-y_1} + \sqrt{\lambda-y_1}}{\sqrt{1-\lambda}} \right],$$

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2} (1-\lambda) R^2, \quad R = \sqrt{\lambda} + (1-\lambda) \ln \frac{1 + \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Легко показать, что $y_1(x)$ - монотонно убывающая с ростом x функция и $y_1(0) = \max_x y_1(x)$. Так что значение $\lambda = y_1(0)$ вполне задает параболообразную форму прогиба гибкого электрода.

Множественность решений (11) наглядно представлена графиком функции $Q(\lambda)$ на рис.1. Из графика следует, что при $Q < Q_*$ ($Q_* = 0.35$) краевая задача имеет два решения, а при $Q > Q_*$ решения (10) не существует вообще. При $Q = Q_*$, определяющем "напряжение срабатывания" реле, происходит ветвление решений. Пусть $y_1(0) = \lambda_*$ соответствует

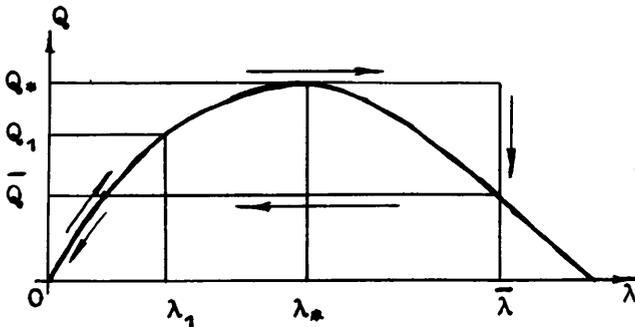


Рис. 1

Q_* , $\lambda_* = 0.3883$, и $Q = \bar{Q} < Q_*$, причем \bar{Q} отвечает значение $y_1(0) = \bar{\lambda}$, принадлежащее решению с большим значением $y(0)$, чем у другого решения. Тогда \bar{Q} определяет "напряжение размыкания" реле с "безразмерной" высотой контактного столбика, равной $1 - \bar{\lambda}$. Стрелками отмечена петля гистерезиса, характерная для работы пленочного электростатического реле. Качественно такой же вид имеет зависимость $Q(\lambda)$ для краевой задачи:

$$\left. \begin{aligned} x \in (0,1), \quad \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_4, \\ \sigma^2 \frac{dy_4}{dx} &= y_2 + \frac{Q}{(1-y_1)^2}, \\ y_2(0) = y_4(0) = y_1(1) = y_2(1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

в которой учитывается жесткость гибкого электрода, пропорциональная σ^2 . По-прежнему $y_1(x)$ - монотонно убывающая функция с максимумом $y_1(0)$.

Проследим на этом примере за различными ситуациями, связанными с численным построением решения краевой задачи $y(x, Q)$ методом продолжения решения по параметру. Заметим, что при $Q = Q_0 = 0$ точным решением является $y(x, Q) = 0$. Из рис. 1 видно, что продолжение решения по параметру Q в сторону его увеличения возможно лишь до некоторого значения $Q = Q_1 < Q_*$. Пусть Q_1 отвечает $\lambda = \lambda_1 = y_1(0, Q_1)$.

Чтобы избежать затруднений вычислительного характера при дальнейшем увеличении параметра Q , связанных с ветвлением решений по параметру Q при $Q = Q_*$, выберем λ в качестве параметра, и, начиная с $\lambda = \lambda_1$, продолжим решение уже по параметру λ вплоть до $\lambda = 1$. При этом мы не встретимся с ветвлением решения по параметру λ в силу однозначной зависимости Q от λ . Более того, мы могли бы продолжить решение краевой задачи по λ до $\lambda = \bar{\lambda}$, при котором $Q = \bar{Q}$, начиная с $\lambda = 0$.

Таким образом, целесообразно переформулировать краевые задачи (11) и (12) к виду, где параметром преобразованной краевой задачи будет λ , а соответствующее ему значение Q найдется из решения. Например, вместо (12) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned}
 x \in (0, 1), \quad \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\
 \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\
 \frac{dy_3}{dx} &= y_4, \\
 \sigma^2 \frac{dy_4}{dx} &= y_2 + \frac{Q}{(1-y_1)^2}, \\
 y_2(0) = y_4(0) = y_1(1) = y_2(1) &= 0, \\
 y_1(0) = \lambda, \quad 0 \leq \lambda < 1.
 \end{aligned} \right\} (12')$$

Процедуру выбора параметра краевой задачи для продолжения решения с целью избежать ветвления решения по параметру Q и связанную с этим переформулировку краевой задачи мы будем называть параметризацией. В данном примере параметризацию можно

осуществить представлением (12) в виде интегрального уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x \in (0,1), r(x) = y_1(x), F(r) = (1-r)^{-2}, \\ r(x) = Q \int_a^b \Gamma(x,t) F[r(t)] dt, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $\Gamma(x,t)$ - функция Грина однородной краевой задачи:

$$x \in (0,1), \quad \sigma^2 \frac{d^4 r}{dx^4} = \frac{d^2 r}{dx^2},$$

$$\frac{dr}{dx}(0) = \frac{d^3 r}{dx^3}(0) = r(1) = \frac{dr}{dx}(1) = 0.$$

Приведем ее точное выражение:

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} \Gamma_1(x,t,\sigma), & 0 \leq x < t, \\ \Gamma_2(x,t,\sigma), & t < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\Gamma_1(x,t,\sigma) = 1-t - \frac{\sigma}{\operatorname{sh} \frac{1}{\sigma}} \left[\operatorname{ch} \frac{1}{\sigma} - \operatorname{ch} \frac{t}{\sigma} + (\operatorname{ch} \frac{1-t}{\sigma} - 1) \operatorname{ch} \frac{x}{\sigma} \right],$$

$$\Gamma_2(x,t,\sigma) = 1-x - \frac{\sigma}{\operatorname{sh} \frac{1}{\sigma}} \left[\operatorname{ch} \frac{1}{\sigma} - \operatorname{ch} \frac{x}{\sigma} + (\operatorname{ch} \frac{1-x}{\sigma} - 1) \operatorname{ch} \frac{t}{\sigma} \right].$$

Теперь, чтобы получить формулировку краевой задачи, соответствующую (12'), достаточно в (13) положить $x = 0$ и воспользоваться равенством

$$\lambda = r(0) = Q \int_0^1 \Gamma(0,t) F[r(t)] dt$$

для исключения Q . В результате приходим к уравнению с параметром λ следующего вида:

$$r(x) = \lambda \frac{\int_0^1 \Gamma(x, t) F[r(t)] dt}{\int_0^1 \Gamma(0, t) F[r(t)] dt} . \quad (14)$$

Решению $r(x, \lambda)$ уравнения (14) отвечает значение $Q(\lambda)$, вычисляемое по формуле:

$$Q(\lambda) = \frac{\lambda}{\int_0^1 \Gamma(0, t) F[r(t, \lambda)] dt} .$$

Аналогичное преобразование имеет место и в более общем случае, когда нелинейная краевая задача имеет вид линейного дифференциального оператора с нелинейной функцией, содержащей параметр Q . При этом предполагается существование функции Грина линейного оператора. Численное решение уравнения (14) было получено в [6].

3. Априорное определение параметра λ при параметризации, как это было в рассмотренном примере, далеко не всегда возможно. Возвращаясь к краевой задаче (1), (2), мы всегда будем рассматривать в качестве возможных параметров для продолжения решения как параметр Q , так и компоненты вектор-функции $y(x)$ в некоторой точке $x = \xi$ интервала (a, b) . Получив решение краевой задачи типа (12) или (12'), следует вновь обратиться к процедуре выбора, как мы будем говорить, текущего параметра, краевой задачи (1), (2), по которому решение будет продолжено на шаг.

Остановимся на процедуре выбора текущего параметра. Простые рассуждения показывают, что если решение краевой задачи (1), (2) дифференцируемо по Q при $Q = \bar{Q}$, то это решение дифференцируемо и по параметру $\lambda = y_k(\xi)$, $\xi \in (a, b)$, при $\lambda = \bar{\lambda} = y_k(\xi, \bar{Q})$, если k -я компонента вектор-функции $v(x) = y_Q(x, \bar{Q})$, $x = \xi$, отлична от нуля. Иными словами, $y(x, \bar{Q})$ можно интерпретировать как решение краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} x \in (a, b), \quad \xi \in (a, b), \\ \frac{dy}{dx} = f(x, y, Q(\lambda)), \quad g(\alpha, \beta, Q(\lambda)) = 0, \\ y_k(\xi) = \lambda \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

с параметром λ при $\lambda = \bar{\lambda}$, определяющей вектор-функцию $y(x, \bar{\lambda})$ и $Q(\bar{\lambda})$. При этом $y(x, \lambda)$ и $Q(\lambda)$ дифференцируемы по λ , т.е. линейная краевая задача

$$\left. \begin{aligned} w(x) = y_\lambda(x, \bar{\lambda}), \quad x \in (a, b), \\ \frac{dw}{dx} = A(x)w + Q_\lambda(\bar{\lambda})P(x), \\ Sw(a) + Tw(b) + Q_\lambda(\bar{\lambda})\psi = 0, \\ w_k(\xi) = 1, \quad \xi \in (a, b) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

однозначно разрешима.

Действительно, решением (16) является вектор-функция

$$w(x) = v(x)/v_k(\xi) = Q_\lambda(\bar{\lambda})v(x), \quad v_k(\xi) \neq 0.$$

Предположим теперь, что существуют два решения (16), которые обозначим через $w^{[1]}(x), Q_\lambda^{[1]}(\bar{\lambda})$ и $w^{[2]}(x), Q_\lambda^{[2]}(\bar{\lambda})$. Пусть $W(x) = w^{[1]}(x) - w^{[2]}(x)$, $q = Q_\lambda^{[1]}(\bar{\lambda}) - Q_\lambda^{[2]}(\bar{\lambda})$ и $W(x) \neq 0, q \neq 0$. Тогда $W(x)$ и q являются решением краевой задачи:

$$x \in (a, b), \quad \xi \in (a, b),$$

$$\frac{dW}{dx} = A(x)W + qP(x), \quad W_k(\xi) = 0, \quad (17)$$

$$SW(a) + TW(b) + q\psi = 0.$$

Если $q = 0$, то $W(x) \equiv 0$, в силу того, что краевая задача (7) имеет только тривиальное решение. Пусть $q \neq 0$. Полагая в (17) $W(x) = q\omega(x)$, сразу убеждаемся, что $\omega(x) \equiv v(x)$, в силу однозначной разрешимости (8). Но согласно краевому условию (17) $\omega_k(\xi) = 0$, что противоречит предположению $v_k(\xi) \neq 0$.

Очевидно, верно и обратное утверждение. Если решение краевой задачи (15) дифференцируемо по параметру λ при $\lambda = \bar{\lambda}$ и $Q_\lambda(\bar{\lambda}) \neq 0$, то это решение дифференцируемо по параметру Q , т.е. краевая задача (8) однозначно разрешима при $Q = \bar{Q} = Q(\bar{\lambda})$, а ее решение пропорционально $w(x)$:

$$v(x) = w(x)/Q_\lambda(\bar{\lambda}), \quad Q_\lambda(\bar{\lambda}) \neq 0.$$

Отсюда следует, что решение краевой задачи (15) дифференцируемо и по параметру $\mu = y_j(\eta)$, $\eta \in (a, b)$, если j -я компонента вектор-функции $v(x)$ отлична от нуля при $x = \eta$.

Таким образом, решение $y(x, \bar{Q})$ краевой задачи (1), (2), полученное методом продолжения решения по параметру Q (и, следовательно, дифференцируемо по Q), может быть продол-

жено по параметру $\lambda = y_k(\xi)$ как решение $y(x, \bar{\lambda})$, $q(\bar{\lambda})$ краевой задачи (15), если $v_k(\xi) \neq 0$. Выберем для этого достаточно малый шаг по λ . Метод квазилинеаризации, в котором начальное приближение решения $y(x, \lambda)$, $\lambda = \bar{\lambda} + \Delta\lambda$, имеет, например, вид

$$\begin{aligned} Y^{[0]}(x) &= y(x, \lambda) + y_\lambda(x, \bar{\lambda}) \Delta\lambda, \\ Q^{[0]}(\lambda) &= q(\bar{\lambda}) + q_\lambda(\bar{\lambda}) \Delta\lambda, \end{aligned}$$

позволяет найти решение (15), дифференцируемое по параметру λ . И так далее, если всякий раз из решения краевой задачи (15) будет следовать, что $q_\lambda(\lambda) \neq 0$.

Как известно, обусловленность краевой задачи (8), или (16), определяется оценкой нормы матричной функции Грина. С учетом (10) решение краевой задачи (16) имеет следующее интегральное представление:

$$w(x) = \int_a^b \bar{G}(x, t) P(t) dt + \bar{G}_0(x) \psi,$$

где матричные функции Грина $\bar{G}(x, t)$ и $\bar{G}_0(x)$ пропорциональны $G(x, t)$ и $G_0(x)$ соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{G}(x, t) &= G(x, t) / v_k(\xi), \quad \bar{G}_0(x) = G_0(x) / v_k(\xi), \\ v_k(\xi) &\neq 0. \end{aligned}$$

Поэтому переход от текущего параметра Q с производными $v(x)$ решения краевой задачи (1), (2) по параметру Q при $Q = \bar{Q}$ к текущему параметру λ с производными $w(x)$ решения краевой задачи (15) по параметру λ при $\lambda = \bar{\lambda}$, $\bar{\lambda} = y_k(\xi, \bar{Q})$, целесообразен, если $|v_k(\xi)| > 1$. При этом краевая задача (16) оказывается лучше обусловленной, чем (8). Принимая во внимание это обстоятельство, можно предложить следующую процедуру выбора текущего параметра краевой задачи (1), (2).

Пусть из решения краевой задачи (8) известна вектор-функция $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и

$$|\mathbf{v}_k(\xi)| = \max_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{i}} |\mathbf{v}_i(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x}} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\| .$$

Если $|\mathbf{v}_k(\xi)| > 1$, то $\lambda = \mathbf{y}_k(\xi)$ выбирается текущим параметром. В противном случае решение продолжается по параметру \mathbf{Q} . Если найдено решение краевой задачи (16), то определяется

$$|\mathbf{w}_j(\eta)| = \max_{\mathbf{x}} \|\mathbf{w}(\mathbf{x})\|$$

и $|\mathbf{w}_j(\eta)|$ сравнивается с $|\mathbf{Q}_\lambda(\bar{\lambda})|$. Пусть

$|\mathbf{w}_j(\eta)| > |\mathbf{Q}_\lambda(\bar{\lambda})|$. Тогда $\mu = \mathbf{y}_j(\eta)$ выбирается текущим параметром, а $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x})/\mathbf{w}_j(\eta)$ - это вектор-функция производных решений краевой задачи (15) по параметру μ при $\mu = \bar{\mu}$ и $\mathbf{Q}_\mu(\bar{\mu}) = \mathbf{Q}_\lambda(\bar{\lambda})/\mathbf{w}_j(\eta)$, $\bar{\mu} = \mathbf{y}_j(\eta, \bar{\lambda})$.

В противном случае решение продолжается по параметру \mathbf{Q} с использованием производных $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x})/\mathbf{Q}_\lambda(\bar{\lambda})$ по параметру \mathbf{Q} .

4. Пусть $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_*$ - собственное число краевой задачи (7), принадлежащее отрезку по \mathbf{Q} , на котором численно исследуется решение краевой задачи (1), (2). Предположим, что применением параметризации получено решение $\mathbf{y}(\mathbf{x}, \lambda)$ и $\mathbf{Q}(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_*$ краевой задачи (15) и $\mathbf{Q}(\lambda_*) = \mathbf{Q}_*$. Тогда $\mathbf{Q}_\lambda(\lambda_*) = 0$, а краевая задача

$$\mathbf{x} \in (a, b), \quad \xi \in (a, b),$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{dx} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{w}, \quad \mathbf{S}\mathbf{w}(a) + \mathbf{T}\mathbf{w}(b) = 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{w}_k(\xi) = 1$$

однозначно разрешима. В этом случае при $Q = Q_*$ имеет место ветвление решений краевой задачи (1),(2) по параметру Q того же типа, что и в краевой задаче (12) рассмотренного примера. Тем не менее, параметризация позволяет непрерывным образом продолжить решение в окрестности Q_* по параметру $\lambda = \mathcal{Y}_x(\xi)$. При этом график функции $Q(\lambda)$ имеет вид, представленный на рис. 2.

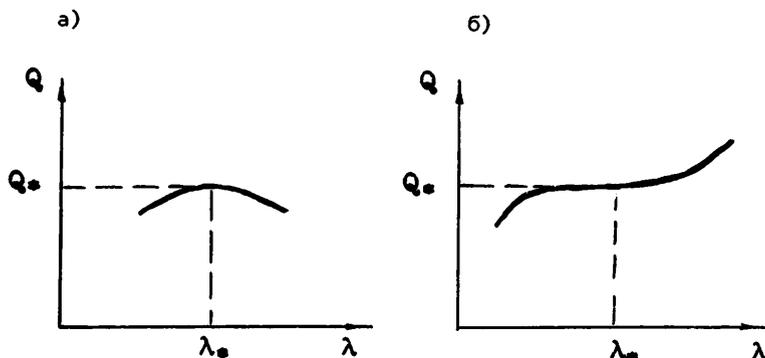


Рис. 2

Пусть на интересующем нас интервале изменения параметра Q характер возможных ветвлений решений по Q краевой задачи (1),(2) только указанного типа. Тогда графиком вектор-функции $y(x, Q)$ в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве $(x, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n)$ будет гладкая поверхность Σ_Q , которая может иметь "незауженные" складки. В этом случае существуют значения Q , при которых краевая задача (1),(2) имеет несколько решений. Площадь полосы поверхности Σ_Q между пространственными кривыми, задаваемыми решениями $y(x, \bar{Q})$ и $y(x, Q)$, $Q \in [\bar{Q}, \bar{Q}]$, служит универсальным параметром, каждому значению которого соответствует единственное решение крае-

вой задачи (1), (2). Предложенный способ продолжения решения в сочетании с квазилинеаризацией краевой задачи позволяет численно построить поверхность Σ_Q .

Отметим, что в случае разрешимости краевой задачи (18) мы имеем возможность исключить вообще параметр Q из многообразия текущих параметров и использовать для продолжения решения краевой задачи (1), (2) формулировку в виде (15).

Пусть $Y^{[0]}(x), Q^{[0]}$ — начальное приближение решения $y(x, \lambda)$ и $Q(\lambda)$ краевой задачи при $\lambda = \bar{\lambda}$. Согласно методу квазилинеаризации строится последовательность вектор-функций $Y^{[k]}(x)$ и значений $Q^{[k]}$, $k = 1, 2, \dots$, из решений краевых задач:

$$\left. \begin{aligned} u &= Y^{[k+1]}(x), \quad q = Q^{[k+1]}, \quad x \in (a, b), \\ \frac{du}{dx} &= A^{[k]}(x)u + P^{[k]}(x)q + R^{[k]}(x), \\ S^{[k]}u(a) + T^{[k]}u(b) + \psi^{[k]}q + \rho^{[k]} &= 0, \\ u_k(\xi) &= \bar{\lambda}, \quad \xi \in (a, b). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P^{[k]}(x) &= f_Q(x, Y^{[k]}(x), Q^{[k]}), \\ R^{[k]}(x) &= F^{[k]}(x) - P^{[k]}(x)Q^{[k]}, \\ \psi^{[k]} &= g_Q(Y^{[k]}(a), Y^{[k]}(b), Q^{[k]}), \\ \rho^{[k]} &= \varphi^{[k]} - \psi^{[k]}Q^{[k]}. \end{aligned}$$

Остальные обозначения были введены ранее.

Очевидно, для $u(x)$ имеет место представление:

$$u(x) = \Phi(x)u(a) + qV(x) + Z(x), \quad (20)$$

где $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица решений:

$$\frac{d}{dx} \Phi = A^{[k]}(x)\Phi, \quad \Phi(a) = I,$$

а

$$V(x) = \Phi(x) \int_a^x \Phi^{-1}(t)P^{[k]}(t)dt, \quad V(a) = 0,$$

$$Z(x) = \Phi(x) \int_a^x \Phi^{-1}(t)R^{[k]}(t)dt, \quad Z(a) = 0.$$

Здесь I - единичная матрица. Согласно (20) вектор-функции $u(x)$ и q определяются по методу прогонки, в которой компоненты вектора $u(a)$ и q играют роль параметров прогонки. При этом решения соответствующих задач Коши относительно $\Phi(x)$, $V(x)$ и $Z(x)$ следует сопровождать процедурами ортогонализации, предложенной С.К.Годуновым [7,8]. Формально параметры прогонки находятся из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} [S^{[k]} + T^{[k]}\Phi(b)]u(a) + [\psi^{[k]} + T^{[k]}V(b)]q = \\ = -\rho^{[k]} - T^{[k]}Z(b), \quad (21) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \Phi_{kj}(\xi)u_j(a) + V_k(\xi)q = \bar{\lambda} - Z_k(\xi),$$

где $\Phi_{kj}(\xi)$ - компоненты матрицы $\Phi(\xi)$. Разрешимость системы (21) следует из разрешимости краевой задачи,

5. Остановимся более подробно на численном исследовании краевой задачи (1), (2), связанном с приближенным представлением (1), (2) в виде конечномерной системы из N уравнений вида:

$$\begin{aligned} P_1(U_1, U_2, \dots, U_N, Q) &= 0, \\ P_2(U_1, U_2, \dots, U_N, Q) &= 0, \\ \dots & \dots \dots \\ P_N(U_1, U_2, \dots, U_N, Q) &= 0 \end{aligned}$$

или

$$P(U, Q) = 0, \quad (22)$$

где $P(U, Q)$ - достаточно гладкая вектор-функция размерности N с компонентами $P_1(U, Q), P_2(U, Q), \dots, P_N(U, Q)$, каждая из которых является функцией векторного аргумента U размерности N с компонентами U_1, U_2, \dots, U_N и скалярного аргумента Q [9]. При этом численный эксперимент состоит в построении вектор-функции $U(Q)$, задаваемой решением системы (22) в предположении, что при $Q \in [\bar{Q}, \bar{Q}]$ графиком $U(Q)$ является гладкая пространственная кривая L_Q в $(N+1)$ -мерном евклидовом пространстве $(U_1, U_2, \dots, U_N, Q)$.

Как известно, гладкость L_Q означает, что ранг матрицы $[P_U, P_Q]$ в окрестности решения $U(Q)$ (22) равен N . При этом в качестве текущего параметра λ системы (22) для продолжения решения может быть использован как параметр Q , если $\det P_U \neq 0$, так и U_k , если определитель матрицы $[P_U, P_Q]$ с вычеркнутым k -м столбцом отличен от нуля. Поэтому, рассматривая процесс продолжения решения системы (22) для построения гладкой пространственной кривой, мы будем символически записывать систему в виде:

$$P(\mathbf{X}, \lambda) = 0, \quad \det P_{\mathbf{X}} \neq 0, \quad (23)$$

подчеркивая, что λ - выбранный текущий параметр, а \mathbf{X} - вектор размерности N , среди компонент которого может быть параметр Q .

Пусть $\mathbf{X}^{[0]}$ - начальное приближение решения $\mathbf{X}(\lambda)$ (23) при $\lambda = \bar{\lambda}$. Тогда согласно методу Ньютона-Канторовича-Рафсона строится последовательность векторов $\mathbf{X}^{[j]}$, $j = 1, 2, \dots$, из решений системы линейных алгебраических уравнений относительно поправок $\mathbf{Z}^{[j]}$ к приближениям $\mathbf{X}^{[j]}$:

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{[j]}, \bar{\lambda}) \mathbf{Z}^{[j]} = -P(\mathbf{X}^{[j]}, \bar{\lambda}),$$

$$\det P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{[j]}, \bar{\lambda}) \neq 0,$$

$$\mathbf{X}^{[j+1]} = \mathbf{X}^{[j]} + \mathbf{Z}^{[j]},$$

сходящаяся к $\mathbf{X}(\bar{\lambda})$. Далее, находится вектор производных $\mathbf{X}_{\lambda}(\bar{\lambda})$ из системы

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) \mathbf{X}_{\lambda} = -P_{\lambda}(\mathbf{X}(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}). \quad (24)$$

Вектор производных $\mathbf{X}_{\lambda}(\bar{\lambda})$ используется затем для задания $\mathbf{X}^{[0]}$ - начального приближения решения системы (23) при $\lambda = \bar{\lambda} + \Delta\lambda$, например, в виде:

$$\mathbf{X}^{[0]} = \mathbf{X}(\bar{\lambda}) + \mathbf{X}_{\lambda}(\bar{\lambda}) \Delta\lambda,$$

где $\Delta\lambda$ - достаточно малый шаг по λ , и т.д.

Для выбора текущего параметра системы (22) можно предложить тот же способ, что и при продолжении решения краевой задачи (1), (2). Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N$ - компоненты вектора

\mathbf{X} , а $d\mathbf{X}_1/d\lambda, d\mathbf{X}_2/d\lambda, \dots, d\mathbf{X}_N/d\lambda$ - компоненты век-

ра \mathbf{X}_{λ} при $\lambda = \bar{\lambda}$. Определим максимальную по модулю ком-

поненту вектора \mathbf{X}_λ :

$$\left| \frac{d\mathbf{x}_k}{d\lambda} \right| = \max \left\{ \left| \frac{d\mathbf{x}_1}{d\lambda} \right|, \left| \frac{d\mathbf{x}_2}{d\lambda} \right|, \dots, \left| \frac{d\mathbf{x}_N}{d\lambda} \right| \right\} .$$

Если $\left| \frac{d\mathbf{x}_k}{d\lambda} \right| > 1$, то $\mu = \mathbf{x}_k$ - новый текущий параметр системы

$$P(\mathbf{V}, \mu) = 0 ,$$

где \mathbf{V} - вектор размерности N , составленный, как и в \mathbf{X} , из компонент вектора \mathbf{U} и параметра Q после выбора среди них текущего параметра μ . Так как компоненты вектора \mathbf{X}_λ при $\lambda = \bar{\lambda}$ известны, то

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{d\mu} = \frac{d\mathbf{x}_i}{d\lambda} / \frac{d\mathbf{x}_k}{d\lambda} , \quad i = 1, 2, \dots, N+1 .$$

Напомним, что среди компонент вектора \mathbf{X} может быть и параметр Q . Согласно (24)

$$\left| \frac{d\mu}{d\lambda} \right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = \left| \frac{\det P_V(\mathbf{V}, \bar{\mu})}{\det P_X(\mathbf{X}, \bar{\lambda})} \right| , \quad \bar{\mu} = \mathbf{x}_k(\bar{\lambda}) ,$$

причем $\det P_X(\mathbf{X}, \bar{\lambda}) \neq 0$ и $\left| d\mu/d\lambda \right|_{\lambda=\bar{\lambda}} > 1$. Поэтому

$$\left| \det P_V(\mathbf{V}, \bar{\mu}) \right| > \left| \det P_X(\mathbf{X}, \bar{\lambda}) \right| > 0 ,$$

т.е. матрица P_V при указанном правиле выбора текущего параметра обязана быть невырожденной. Если $\left| d\mathbf{x}_k/d\lambda \right| < 1$, то текущим параметром по-прежнему остается λ .

Заметим, что в процессе продолжения решения системы (22) параметр Q может принимать значения $Q = Q_*$ такие, что

$\det P_U = 0$. Однако если L_Q - гладкая пространственная кривая, то решение системы в окрестности Q_* может быть продолжено по текущему параметру λ , отличному от Q , в виде решения системы (23). Зависимость Q от λ в этом случае представлена на рис. 2. Таким образом, параметризация позволяет построить часть гладкой пространственной кривой между двумя особыми точками, если таковые существуют. Длина дуги L_Q , отсчитываемая от точки $(\bar{Q}, U(\bar{Q}))$ до точки $(Q, U(Q))$, принадлежащих L_Q , является универсальным параметром системы (22), каждому значению которого соответствует единственное решение системы (22), в то время как при заданном значении $Q \in [\bar{Q}, \bar{Q}]$ может существовать несколько решений.

Если P_U - разреженная матрица, то в отличие от варианта параметризации, в котором используется метод Гаусса для выявления N линейно-независимых столбцов матрицы $[P_U, P_Q]$, предложенный способ позволяет учитывать структуру матрицы P_U , что существенно в отношении числа арифметических операций, необходимых для решения линейных алгебраических уравнений с матрицей P_X . Действительно, после определения текущего параметра $\lambda = x_k$, $k = 1, 2, \dots, N+1$, для построения P_X достаточно вычеркнуть k -й столбец $[P_U, P_Q]$, сохранив при этом разреженность матрицы P_X .

Обратимся теперь к краевой задаче (1), (2) и рассмотрим вариант приближенного представления краевой задачи в виде системы (22), которую в этом случае будем называть дискретной моделью краевой задачи.

Пусть x_1 - i -й узел сетки из разбиения отрезка $[a, b]$ на m частей:

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1} = b, \quad h_j = x_{j+1} - x_j.$$

Будем считать, что на каждом из отрезков $[x_1, x_{i+1}]$ ре-

шение краевой задачи приближенно представлено кубической параболой $S_3(x)$, принимающей на концах отрезка заданные значения:

$$x \in [x_i, x_{i+1}] ,$$

$$S_3(x_i) = y^i \approx y(x_i), \quad \frac{dS_3}{dx}(x_i) = f^i = f(x_i, y^i, Q),$$

$$S_3(x_{i+1}) = y^{i+1} \approx y(x_{i+1}), \quad \frac{dS_3}{dx}(x_{i+1}) = f^{i+1} = \\ = f(x_{i+1}, y^{i+1}, Q).$$

В середине отрезка

$$S_3\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{1}{2}(y^i + y^{i+1}) + \frac{h}{8}(f^i - f^{i+1}).$$

Воспользовавшись формулой Симпсона, получим:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x), Q) dx \approx \frac{h}{6}(f^i + 4f^{i+1/2} + f^{i+1}), \quad (25)$$

где

$$f^{i+1/2} = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, S_3\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right), Q\right).$$

В результате приходим к следующей системе уравнений вида (22) размерности $N = (m+1)n$ относительно приближенных сеточных значений y^1, y^2, \dots, y^{m+1} вектор-функции $y(x)$:

$$\begin{aligned}
&g(y^1, y^{m+1}, Q) = 0, \\
&y^1 - y^2 + \frac{h_1}{6} (f^1 + 4f^{3/2} + f^2) = 0, \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
&y^m - y^{m+1} + \frac{h}{6} (f^m + 4f^{m+1/2} + f^{m+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Очевидно, дискретная модель (26) позволяет найти приближенное решение с погрешностью порядка h_{\max}^4 , $h_{\max} = \max_i h_i$, на решениях краевой задачи (1), (2). Матрица P_U системы (26) имеет ненулевые блоки размеров $n \times n$ только по главной диагонали и ниже расположенной побочной блочной диагонали, а также блок в правом верхнем углу в силу краевого условия (2).

Отметим, что аппроксимация решения краевой задачи будет характеризоваться погрешностью порядка h_{\max}^6 , если вместо $S_3(x)$ использовать параболу пятой степени $S_5(x)$, принимающей на концах отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ заданные значения вместе с первой и второй производными, а вместо формулы Симпсона (25) взять интерполяционную формулу Котеса, точную на многочленах пятой степени [10]. При этом дискретная модель записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned}
&g(y^1, y^{m+1}, Q) = 0, \\
&y^1 - y^2 + \frac{h}{90} (7f^1 + 32f^{5/4} + 12f^{3/2} + 32f^{7/4} + 7f^2) = 0, \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \\
&y^m - y^{m+1} + \frac{h}{90} (7f^m + 32f^{m+1/4} + 12f^{m+1/2} + \\
&\quad + 32f^{m+3/4} + 7f^{m+2}) = 0.
\end{aligned} \right\} \tag{27}$$

Здесь

$$f^{i+\frac{1}{4}j} = f(x, S_5(x), Q), \quad x = x_i + \frac{j}{4} h_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$S_5(x_i) = y^i \approx y(x_i) \quad S_5(x_{i+1}) = y^{i+1} \approx y(x_{i+1}),$$

$$S_5(x_i + \frac{1}{4} h_i) = \frac{459 y^i + 53 y^{i+1}}{512} + h_i \frac{189 f^i - 39 f^{i+1}}{1024} +$$

$$+ h_i^2 \frac{27 \frac{f^i f^i}{y} + 9 \frac{f^{i+1} f^{i+1}}{y}}{2048},$$

$$S_5(x_i + \frac{1}{2} h_i) = \frac{y^i + y^{i+1}}{2} + h_i \frac{5(f^i - f^{i+1})}{32} +$$

$$+ h_i^2 \frac{\frac{f^i f^i}{y} + \frac{f^{i+1} f^{i+1}}{y}}{64},$$

$$S_5(x_i + \frac{3}{4} h_i) = \frac{53 y^i + 459 y^{i+1}}{512} + h_i \frac{39 f^i - 189 f^{i+1}}{1024} +$$

$$+ h_i^2 \frac{9 \frac{f^i f^i}{y} + 27 \frac{f^{i+1} f^{i+1}}{y}}{2048},$$

$$f^i = f(x_i, y^i, Q), \quad f^{i+1} = f(x_{i+1}, y^{i+1}, Q),$$

$$f_y^i = f_y(x_i, y^i, Q), \quad f_y^{i+1} = f_y(x_{i+1}, y^{i+1}, Q).$$

Можно полагать, что на решениях (27) матрица $[P_U, P_Q]$ является возмущенной матрицей $[P_U, P_Q]$ системы (26) с нормой возмущений порядка h_{\max}^4 , и использовать последнюю для вычисления компонент матрицы P_X на итерациях при решении (27) по методу Ньютона-Канторовича-Рафсона. Определенный таким

образом модифицированный метод Ньютона позволяет эффективно строить решения дискретной модели (27) практически с теми же затратами, что и (26).

6. Программа BPR-Q, предназначенная для численного исследования краевой задачи (1), (2) методом продолжения решения с параметризацией, подробно описана в [11] вместе с примерами. Обратим внимание на основные характеристики программы:

а) Экономичность по числу арифметических операций, обусловленная выбором варианта параметризации, позволяющим, в частности, учесть структуру матрицы якобиана.

б) Высокая степень аппроксимации решения на неравномерной сетке по \mathbf{x} .

в) Возможность адаптации сетки в процессе продолжения решения, что позволяет строить решения краевой задачи с большими градиентами.

г) Возможность численного определения компонент матрицы f_y , g_α и g_β .

д) В процессе продолжения решения по текущим параметрам программа строит решения при заданном значении параметра Q , а также для Q , при которых происходит ветвление решения по параметру Q .

е) Допускается случай, когда правые части $f(\mathbf{x}, y, Q)$ имеют конечное число разрывов первого рода по \mathbf{x} при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$, $j = 1, 2, \dots$. При этом достаточно включить \mathbf{x}_j в массив узлов сетки по \mathbf{x} .

Эффективность работы программы проверена на большом числе нелинейных краевых задач из разных областей приложений. Некоторые примеры, которые можно рассматривать как тесты, приведены в [11].

Появлением этой работы автор во многом обязан С.К. Годунову, с которым обсуждались проблемы статьи, и выражает ему глубокую признательность.

Л и т е р а т у р а

1. КАНТОРОВИЧ Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика //Успехи мат. наук. - 1948. - Т. 3, № 6. -С.89-175.
2. БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1975. - 631 с.
3. БИБИКОВ Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. - Л.: Издательство Ленинградского университета, 1981. - 232 с.
4. ОРТЕГА Дж., РЕЙНБОЛД В. Итерационные методы решения систем уравнений со многими неизвестными. - М.: 1975. - 558 с.
5. ОДЕН Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976. - 464 с.
6. ЛУКЬЯНОВА Р.Г., ФАДЕЕВ С.И., ШВЕДОВА К.В. Расчет статических параметров механической модели пленочного электростатического реле //Вычислительные системы. - Новосибирск, 1970. - Вып. 40. - С. 3-35.
7. ГОДУНОВ С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений //Успехи мат. наук. - 1961. - Т. 16, № 3. - С. 171-174.
8. КУЗНЕЦОВ С.В. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. (Труды Института математики). - 1985. - Т. 6. - С. 85-110.
9. KUBICEK M., MAREC M. Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures. - New York - Berlin-Tokyo: Springer-Verlag, 1983. - 243 p.
10. КРЫЛОВ В.И., ШУЛЬГИН Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. - М.: Наука, 1966. - 370 с.
11. ФАДЕЕВ С.И. Программа численного решения нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами //Вычислительные методы линейной алгебры. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. - (Труды Института математики). - 1990. -Т 17. -С.104-198.

Поступила в ред.-изд.отд.

25 октября 1991 года