*ся при некотором положительном $C$ на односторонне одноленточной машине Тьюринга за* $2^{C\cdot\max(M^A,p)}+H$ *шагов, где* $M$ *– длина записи системы из* $T$.

Доказательство основано на сведении к булевым функциональным уравнениям и использовании полученной для них нижней оценки на число шагов вычисления [2].

Отметим, что если в теореме вместо системы уравнений, являющихся сравнениями полиномов по константному модулю, рассматривать только уравнение с одной переменной-неизвестной, то может быть получена полиномиальная верхняя оценка на число шагов установления разрешимости этого уравнения.

Если же при этом разрешить использовать несколько переменных-неизвестных, то задача становится полной для недетерминированного полиномиального времени. Таким образом, использование более мощных обозначений превращает (с точки зрения классической математики одну и ту же) задачу в существенно более сложную.

P-СПЭЙС-полнота упомянутой в начале задачи устанавливается с помощью сведения к задаче установления истинности пропозициональных формул с кванторами по пропозициональным переменным.

*Литература*

1. Косовский Н.К. Элементарная теория сравнений полиномов по константным модулям // Десятая Всесоюз. конф. по математической логике.- Алма-Ата, 1990.- С.85.

2. Косовский Н.К. Основы теории элементарных алгоритмов.- Л., 1987.- 153 с. (ЛГУ).

## СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОНГРУЭНТНЫХ ЗАМЫКАНИЙ НА ГРАФАХ

Кривой С.Л., Киев

Рассматривается задача вычисления конгруэнтного замыкания некоторого априорного отношения эквивалентности на множестве вершин графа, посредством которого представляются элементы алгебры термов. Приводятся сложностные оценки решения как этой задачи, так и других связанных с ней задач.

Основные обозначения. Пусть $T(\Omega, R)$ – алгебра термов сигнатуры $\Omega$ над множеством переменных $R$ ($\emptyset$-алгебра), а $\Omega_0 = \Omega$ – множество функциональных символов арности 0. Если $t = w(t_1, t_2,\dots,t_n)$, то $t_i$, $i = \overline{1,n}$, называются непосредственными под -

термами терма $t(t_i <= t)$. Транзитивное замыкание $<-$ отношения $<=$ означает отношение "быть подтермом". Алгебру $T(\Omega,R)$ будем называть A(K)-*алгеброй*, если в $\Omega$ имеется непустое множество $\Omega_A \subseteq \Omega$ ($\Omega_K \subseteq \Omega$) ассоциативных (коммутативных) операций. Алгебру $T(\Omega,R)$ будем называть АК-*алгеброй*, если $\Omega_A = \Omega_K \neq \emptyset$, $\Omega_A$, $\Omega_K \subseteq \Omega$.

Пусть $G(v_o) = (V,E)$ – инициальный орграф, $v_o \in V$ – выделенная (начальная) вершина, $f\colon V \to R \cup \Omega$ – функция отметок вершин и $t \in T(\Omega,R)$. Говорят, что *граф* $G(v_o)$ представляет терм $t$ посредством функции $f$ ($G_t^f(v_o)$), если 1) $t = z$ и $z \in R \cup \Omega_o$, то $f(v_o) = z$, $ar(v_o) = 0$ и $V = \{v_o\}$; 2) $t = w(t_1,\ldots,t_n)$, то $f(v_o) = w$, $ar(v_o) = n$ и $G(v_i)$ представляет терм $t_i$, $i = \overline{1,n}$, где $(v_o, v_i)$ – i-я дуга вершины $v_o$, а $ar(v)$ означает число дуг, исходящих из вершины $v$.

Пусть $\alpha$ – некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин $V$ графа $G(v)$. Отношение $\alpha^*$, называемое *конгруэнтным* замыканием отношения $\alpha$, определяется следующим образом:

$$v\,\alpha^*\,v' \Leftrightarrow v\,\alpha v' \vee (f(v) = f(v')\ \&\ v_i\,\alpha^*\,v'_i),$$

где $(v,v_i)$ $(v',v'_i)$ – i-е дуги вершин $v$ и $v'$ соответственно. Отношение $\alpha^*$ называется *симметричным* ($\alpha_c^*$) [1], если дуги в вершины $v$ ($v'$) можно переупорядочить таким образом, что первоначально $\alpha^*$-неэквивалентные вершины $v$ и $v'$ становятся $\alpha^*$-эквивалентными.

<u>Основные результаты</u>. Пусть граф $G_t^f(v_o) = (V,E)$ – конечный и $m = |E|$, $n = |V|$.

ТЕОРЕМА 1. *Построение классов эквивалентности отношения* $\alpha^*$ *на графе* $G_t^f(v_o)$ *можно выполнить за время* $O(m\log m)$.

ТЕОРЕМА 2. *Построение классов эквивалентности отношения* $\alpha_c^*$ *на графе* $G_t^f(v_o)$ *можно выполнить за время* $O(rm\log m)$, *где* $r = \max\{ar(v)\,|\,v \in V\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Построение классов эквивалентности отношения* $i^*$ *на графе* $G_t^f(v_o)$ *можно выполнить за время* $O(m\log n)$, *где* $i$ - *тождественное отношение эквивалентности* [2].

Отношение $\alpha^*$ называется ациклическим $(\alpha_A^*)$, если как $G_t^f(v_o)/\alpha$, так и $G_t^f(v_o)/\alpha^*$ являются ациклическими фактор-графами.

ТЕОРЕМА 4. *Построение классов эквивалентности на графе* $G_t^f(v_o)$ *для отношений*

*а)* $\alpha_A^*$ *и* $i_A^*$ *можно выполнить за время* $O(m)$ [3];

*б)* $\alpha_{AC}^*$ *можно выполнить за время* $O(rm)$.

Пусть $t, t_1, \ldots, t_n \in T(\Omega, R)$ представлены соответственно графами $G_t^f(v_o) = (V, E)$, $G_{t_i}^f(v_o) = (V_i, E_i)$, $i = \overline{1,n}$. Термы $t$, $t_1, \ldots, t_n$ называются ациклическими, если представляющие их графы конечные и ациклические.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Проверка тождества конечного числа ациклических термов* $t_1, \ldots, t_n$ *выполняется в*

*а)* $\emptyset$- *и А-алгебре за время* $O(M)$, *где* $M = m_1 + m_2 + \ldots$ $\ldots + m_n$;

*б)* K-*алгебре за время* $O(rM)$;

*в) АК-алгебре за время* $O(rM)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Проверка истинности* $t' \leftarrow t$, *где* $t', t$ - *ациклические термы, выполняется в*

*а)* $\emptyset$-*алгебре за время* $O(m+m')$;

*б) К-алгебре за время* $O(r(m+m'))$;

*в) А-алгебре за время, ограниченное величиной* $O(l(t) + l(t'))$, *где* $l(t)$ - *длина терма* $t$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Проверка того, что равенство* $t = t'$ *является следствием множества равенств* $Eq = \{t_1 = t_1', \ldots$ $\ldots, t_n = t_n'\}$, *выполняется за время*

*а)* $O(L\log L)$ *в* $\emptyset$-*алгебре, где* $L = m+m'+m_1+m_1'+ \ldots +m_n+$ $+m_n'$;

*б)* O(L) *в Ø-алгебре при условии, что* $t, t', t_i, t_i$, $i = \overline{1,n}$, *- ациклические термы;*

*в)* O(rL) *в К-алгебре при условии, что* $t, t', t_i, t_i'$, $i = \overline{1,n}$, *- ациклические термы.*

*Литература*


1. DOWNEY P.J., SETHY R., TARJAN R.E. Variation on the common subexpression problem //Journ. ACM. - 1980. - Vol.27,N4. - P. 758-771.
2. ЛЕТИЧЕВСКИЙ А.А., ГОДЛЕВСКИЙ А.Б. Оптимизация алгоритмов в процессе их проектирования методом формализованных технических заданий //Автоматизация проектирования ЭВМ и их компонентов. -Киев, 1977. -С. 46-71 (ИК АН Украины).
3. ГОДЛЕВСКИЙ А.Б., КРИВОЙ С.Л. Трансформационный синтез эффективных алгоритмов с учетом дополнительных спецификаций // Кибернетика. - 1986. -№6. -С. 37-43.


## ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММНЫЕ АЛГЕБРЫ И ЛОГИКИ ДЛЯ ТРАДИЦИОННЫХ ЯЗЫКОВ ПРОГРАММИРОВАНИЯ


Кузенко В.Ф., Киев


В программологии учет манипуляционного аспекта данных приводит к необходимости уточнять собственно данные по меньшей мере как именные [1] и, следовательно, исследовать императивные программные алгебры и логики.

Отправляясь от уровня абстракции, соответствующего именным данным, можно получать адекватные уточнения программистских понятий в языках любого уровня за счет выбора подходящих конкретизаций именных данных.

Для языков, подобных Паскалю, удается не только предложить строгую трактовку таких ключевых понятий, как программные переменные и программные константы, но и привести ее в полное соответствие с традиционным в математической логике толкованием (по Г.Фреге-А. Черчу [2]) констант и переменных.

Принципиальная особенность императивных программных алгебр для традиционных языков программирования - это наличие средств, связанных с конкретизацией вычислений по (абстрактным) именам их денотатов,и, кроме того, средств, обеспечивающих возможность абстрактным именам не только участвовать в вычислениях, но и самим вычисляться, т.е. "вырабатываться" некоторыми специальными функциями.

Предлагаются полные наборы базовых функций для машинно-ориентированных языков и языков, подобных Паскалю.