МЕХАНИЗМЫ СОВМЕСТНОСТИ, ТЕОРЕМА ОПУСКАНИЯ ТИПОВ И ЛОГИКА ХОАРА

Филимонов В.В., Пермь

Зафиксируем произвольную полную теорию T не более чем счетной сигнатуры σ. Через $F_n(\sigma)$ обозначим множество всех формул сигнатуры σ, свободные переменные которых принадлежат списку переменных $\bar{x}$ для $n = n(\bar{x})$, $n < \omega$; через $F_n(T)$ - множество всех T-непротиворечивых формул сигнатуры σ от переменных $\bar{x}$, т.е. $F_n(T) = \{\varphi \mid \varphi \in F_n(\sigma)$, $FV(\varphi) \subseteq x$, $\exists \bar{x}\ \varphi \in T\}$; через $C_n(T)$ - множество всех T-непротиворечивых конечных множеств формул сигнатуры σ от переменных $\bar{x}$, т.е. $C_n(T) = \{u \mid |u| < \omega,\ \&u \in F_n(T)\}$.

Множество формул $p \subseteq F_n(T)$ назовем T-непротиворечивым, если $\{u \mid |u| < \omega, v \subseteq p\} \subseteq C_n(T)$. Для $u, v \in C_n(T)$ определим отношение выводимости $u \vdash v$, если $\forall \bar{x}(\&u \to \&v) \in T$; $p \subseteq F_n(T)$ назовем T-замкнутым, если для $u, v \in C_n(T)$ из $u \vdash v$ и $u \subseteq p$ следует $v \subseteq p$. n-типом теории T назовем T-замыкание $\bar{p} = \cup\{v \mid u \vdash v$ для некоторого $u \subseteq p\}$ произвольного T-непротиворечивого $p \subseteq F_n(T)$. Через $D_n(T)$ обозначим множество всех n-типов теории T. Для $p, q \in D_n(T)$ говорят, что p аппроксимирует q, если $p \subseteq q$. Максимальные n-типы из $D_n(T)$ назовем T-полными, все другие - T-частичными (T-неполными).

Если $\mathbb{A} \in Mod(T, \sigma)$ и $\bar{a} \subseteq |\mathbb{A}|$ для $n = n(\bar{a})$, то через $F_n(\bar{a}, \mathbb{A})$ обозначим множество всех формул из $F_n(T)$, истинных на $\mathbb{A}$ при $x_i \to a_i$ для $i < n$, т.е. $F_n(\bar{a}, \mathbb{A}) \models \{\varphi \mid \varphi \in F_n(T), \mathbb{A} = \varphi[\bar{a}]\}$. Как показывает теорема компактности, для $p \in D_n(T)$ имеем $p \subseteq F_n(\bar{a}, \mathbb{A})$ для некоторых $\mathbb{A} \in Mod(T, \sigma)$ и $\bar{a} \subseteq |\mathbb{A}|$. При этом говорят, что

$\mathbb{A}$ реализует p при $x_i \to a_i$ для $i<n$. Очевидно, что $p\in D_n(T)$ является T-полным тогда и только тогда, когда $p = F_n(\bar{a},\mathbb{A})$ для некоторых $\mathbb{A}\in Mod(T,\sigma)$ и $\bar{a}\subseteq|\mathbb{A}|$. Тип $p\in D_n(T)$ назовем T-конечным, если $p=\bar{u}$ для некоторого $u\in C_n(T)$. Как показывает теорема опускания типов, $p\in D_n(T)$ является T-конечным тогда и только тогда, когда p реализуется в каждой (счетной) модели теории T. Очевидно, что для $p\in D_n(T)$ имеем $p=\cup\{\bar{u}\mid u\subseteq p\}$.

Введем в рассмотрение простой язык программирования из [1]. Через $S_n(\sigma)$ обозначим множество всех операторов сигнатуры σ, все переменные которых принадлежат списку переменных $\bar{x}$. Поставим в соответствие $S\in S_n(\sigma)$ на $\mathbb{A}\in Mod(T,\sigma)$ преобразователь состояний [2] $S^{\mathbb{A}}\subseteq|\mathbb{A}|^{\bar{x}}\times|\mathbb{A}|^{\bar{x}}$. Для $s\in|\mathbb{A}|^{\bar{x}}$ через $s(\bar{x})$ обозначим $s(x_0), s(x_1),\ldots$ $\ldots, s(x_{n-1})\subseteq|\mathbb{A}|$.

ТЕОРЕМА 1. *Для* $S\in S_n(\sigma)$ *и* $q\subseteq F_n(\sigma)$ *существует рекурсивное относительно* q *множество* $wlp(S,q)\subseteq$ $\subseteq F_n(\sigma)$ *такое, что если* $wlp(S,q)\subseteq F_n(s_1(\bar{x}),\mathbb{A})$ *для* $\mathbb{A}\in Mod(T,\sigma)$, $s_1\in|\mathbb{A}|^{\bar{x}}$ *и* $s_1 S^{\mathbb{A}} s_2$ *для* $s_2\in$ $\in|\mathbb{A}|^{\bar{x}}$, *то* $q\subseteq F_n(s_2(\bar{x}),\mathbb{A})$.

Для $u,v\in C_n(T)$ и $S\in S_n(\sigma)$ определим отношение выводимости $T\vdash uSv$, если $wlp(S,v)\subseteq\bar{u}$. Оператор $S\in$ $\in S_n(\sigma)$ назовем T-непротиворечивым, если для $u,v,w\in C_n(T)$ из $T\vdash uSv$ и $T\vdash uSw$ следует $v\cup u\in C_n(T)$. Через $S_n(T)$ обозначим множество всех T-непротиворечивых операторов из $S_n(\sigma)$; через $false$ - любое T-противоречивое конечное множество формул сигнатуры σ от переменных $\bar{x}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для* $S\in S_n(\sigma)$ *имеем* $S\in S_n(T)$ *тогда и только тогда, когда существует* $\mathbb{A}\in Mod(T,\sigma)$, *опускающая* $wlp(S,false)$.

T-реализацией оператора $S \in S_n(T)$ назовем $\mathbb{A} \in \mathrm{Mod}(T,\sigma)$, которая опускает $\mathrm{wlp}(S,\mathrm{false})$.

ТЕОРЕМА 2. *Существует счетная* $\mathbb{A} \in \mathrm{Mod}(T,\sigma)$, *которая является* T*-реализацией для каждого* $S \in S_n(T)$.

Поставим в соответствие каждому $S \in S_n(T)$ в теории T преобразователь n-типов $S^T: D_n(T) \to D_n(T)$. Для $p \in D_n(T)$ определим $S^T(p) = \cup\{v \mid T \vdash uSv$ для некоторого $u \subseteq p\}$ [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для* $S \in S_n(T)$ *и* $u,v \in C_n(T)$ *имеем* $T \vdash uSv$ *тогда и только тогда, когда* $\bar{v} \subseteq S^T(\bar{u})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для* $S \in S_n(T)$ *существует* $p^s \in D_n(T)$ *такое, что* $S^T(p^s) = p^s$ *и для каждого* $p \in D_n(T)$ *из* $S^T(p) \subseteq p$ *следует* $p^s \subseteq p$.

Для $\bar{a},\bar{b} \subseteq |\mathbb{A}|$, $\mathbb{A} \in \mathrm{Mod}(T,\sigma)$, определим отношение эквивалентности $\bar{a} \cong_n \bar{b}$, если $F_n(\bar{a},\mathbb{A}) = F_n(\bar{b},\mathbb{A})$. Для $S \in S_n(T)$ и $\mathbb{A} \in \mathrm{Mod}(T,\sigma)$ установим связь между $S^{\mathbb{A}}$ и S^T при помощи следующей простой леммы. Отметим также связь с T-универсальной $\mathbb{A} \in \mathrm{Mod}(T,\sigma)$ [4].

ЛЕММА 1. *Для* $\bar{a},\bar{b} \subseteq |\mathbb{A}|$, $\mathbb{A} \in \mathrm{Mod}(T,\sigma)$, *и любого терма* t *сигнатуры* σ *имеем* $\bar{a} \cong_n \bar{b}$ *тогда и только тогда, когда* $\bar{a},t^{\mathbb{A}}[\bar{a}] \cong_{n+1} \bar{b},t^{\mathbb{A}}[\bar{b}]$.

Следуя [3], $w = \{(u_0,v_0),\dots,(u_{n-1},v_{n-1})\} \subseteq C_n(T) \times C_n(T)$ назовем T-непротиворечивым, если для каждого $I \subseteq \{0,1,\dots,n-1\}$ из $\bigcup_{i \in I} u_i \in C_n(T)$ следует $\bigcup_{i \in I} v_i \in C_n(T)$. Через $C_n(T \to T)$ обозначим множество всех таких T-непротиворечивых конечных множеств из $C_n(T) \times C_n(T)$, т.е. $C_n(T \to T) = \{w \mid w \subseteq C_n(T) \times C_n(T)$, $|w| < \omega$, ω - T-непротиворечивое множество$\}$. Для $w,w' \in C_n(T \to T)$ определим отношение выводимости $w \vdash w'$, если для каждой $(u,v)\in w'$ имеем $\cup\{v_i \mid u \vdash u_i\} \vdash v$. Как и выше, для $H \subseteq C_n(T)\times C_n(T)$ введем понятия T-не - противоречивости и T-замкнутости. Поставим в соответствие $S\in S_n(T)$ множество $H_n(S) = \{(u,v) \mid T \vdash uSv\} \subseteq \subseteq C_n(T)\times C_n(T)$.

ТЕОРЕМА 3. *Для* $S\in S_n(T)$ *множество* $H_n(S)$ *является* T-*непротиворечивым и* T-*замкнутым.*

Литература

1. ДЕЙКСТРА Э. Дисциплина программирования. - М.: Мир, 1978.
2. ЛАВРОВ С.С. Методы задания семантики языков программирования //Программирование. - 1978. -№6. -С. 3-10.
3. SCOTT D.S. Domains for Denotational Semantics //Lecture Notes in Computer Science. - 1982. - N 140. -P.577-612.
4. ФИЛИМОНОВ В.В. Программные логики. Теорема о полноте //Тез.докл. 11-й Всесоюз. конф. по прикладной логике. - Новосибирск, 1988. -С. 228-230.

ОБ ОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРОЙ

Хисамиев З.Г., Усть-Каменогорск

Изучается вычислительная система с однородной структурой следующего типа.

Атомом системы является плоская квадратная вычислительная ячейка с двумя операционными и одним транзитным входом,операциями являются элементарные булевы операции. Выходы операционного и транзитного каналов могут быть удвоены. Выходы и входы могут быть расположены с любой стороны "квадратика", но с каждой стороны не более одного входа и выхода.

Операция выполняется за один временной такт. Выход по сравнению с входом по времени задерживается на 1 или 2 такта.

Из таких атомов может быть составлена программа для обработки бесконечных последовательностей 0 и 1. Программа - это плоская матрица из атомов,в которой между собой соединяются только соседние атомы.

Пусть E^{ω} - множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц; P^{ω} - множество всех n-местных функций из $(E^{\omega})^n$ в P^{ω}, $n \geq 0$.