ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНФОРМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1993 год Выпуск 148

УДК 517.11

К ТЕОРЕМЕ СПЕКТОРА-ГАНДИ ДЛЯ Σ-ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВ*)

Ю.Л. Ершов

Настоящая заметка написана в связи с появлением важной статьи [6], которая содержит дальнейшее развитие теории Σ-допустимых (в терминологии [1]) или +-допустимых (в терминологии [6]) множеств. В указанной работе доказана лемма об усечении, определено и доказано существование $\mathrm{HYP}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M})$ для любого резольвентного Σ-допустимого множества $\mathbb{A}$ и любой модели $\mathfrak{M}$ (сигнатура которой есть Σ-множество в $\mathbb{A}$). Главной задачей [6] является нахождение обобщения теоремы Спектора-Ганди о связи Π_1^1-классов счетных моделей $\mathfrak{M}$ с Σ-определимостью в $\mathrm{HYP}_{\mathbb{A}}$. Найденное там обобщение (теорема 3.3.1) имеет одно неестественное условие на Σ-допустимое множество $\mathbb{A}$ - не быть слабо стабильным. Другие условия естественны: счетность $\mathbb{A}$ используется по существу, условие резольвентности $\mathbb{A}$ необходимо для существования $\mathrm{HYP}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M})$. Оказывается, что условие не быть слабо стабильным в этой теореме может быть опущено.

Для понимания настоящей заметки необходимо знакомство со статьей [6], обозначениями и терминологией которой (с небольшими изменениями) будем пользоваться далее.

Основным утверждением является следующее усиление теоремы 3.3.3 из [6].

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (93-011-16014).

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\mathbb{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbb{P} \rangle$ *- резольвентное* Σ*-допустимое множество,* $\overline{\mathbf{R}} \subseteq \mathbf{A}$ *- предикатная сигнатура, являющаяся* Σ*-подмножеством* $\mathbf{A}$ *. Пусть* $\mathbb{J}$ *- класс* $\mathbb{A}$*-прамоделей (моделей с основным множеством из праэлементов, не пересекающимся с* $\mathbf{A}$ *). Если* $\mathbb{J}$ *есть* Σ*-класс над* $\mathbf{HYP}_{\mathbb{A}}$ *в* $\mathbb{A}$*-прамоделях, то* $\mathbb{J}$ *есть* $\mathbf{cPC}_d(\mathbb{A})$*-класс в* $\mathbb{A}$*-прамоделях.*

Пусть $\mathbb{A}$, $\overline{\mathbf{R}}$ и $\mathbb{J}$ удовлетворяют условиям теоремы. Пусть φ – Σ-формула и $\overline{a} \in \mathbf{A}$ таковы, что для любой $\mathbb{A}$-прамодели $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, \rho)$ сигнатуры $\overline{\mathbf{R}}$ $\mathfrak{M} \in \mathbb{J}$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{HYP}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M}), \mathbb{A}, \rho) \models \varphi(\overline{a})$.

По теореме Маккаи 1.4.1 из [6] достаточно доказать, что $\mathbb{J}$ есть $\mathbf{cPC}_d^!(\mathbb{A})$-класс. Для простоты предположим, что $\mathbb{P}$ состоит из одного множества $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{A}$. Пусть $\overline{\mathbf{K}}$ есть сигнатура $\langle \mathbf{A}', \mathbf{S}', \rho' \rangle \cup \langle \check{a} \mid a \in \mathbf{A} \rangle$, $\mathbf{M}' \notin \overline{\mathbf{K}} \cup \overline{\mathbf{R}}$, и $\overline{\mathbf{K}} \cap \overline{\mathbf{R}} = \emptyset$. Будем доказывать, что $\mathbb{J}$ совпадает с классом $\mathbb{L} \rightleftharpoons \mathrm{Mod}(\forall \mathbf{M}' \forall \overline{\mathbf{K}} (\wedge \Phi \to \varphi(\check{\overline{a}})))$, где Φ есть Σ-множество $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-предложений, описанное ниже.

Так как $\mathbb{A}$ – резольвентное Σ-допустимое множество, то для $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ и $\overline{\mathbf{R}}$ существуют хорошие Σ-резольвенты $\mathbf{a}$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{r}$. Пусть $\varphi_0(x,y,\overline{a})$, $\varphi_1(x,y,\overline{a})$ и $\varphi_2(x,y,\overline{a})$ - Σ-формулы, которые определяют графики резольвент $\mathbf{a}$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{r}$ соответственно (не уменьшая общности, можно считать, что они зависят от тех же параметров, что и φ).

Множество Φ определяется как объединение следующих множеств:

1) $\mathbf{AKPU}(\mathbf{A}', \mathbf{S}', \rho')$ (система аксиом теории Адамсона-Крипке-Платека с праэлементами, т.е. теория Σ-допустимых множеств с $\mathbb{P} = \langle \mathbf{A}', \mathbf{S}', \rho' \rangle$);

2) $\{\forall xy(\mathbf{A}'(y) \wedge x \in y \to \mathbf{A}'(x))\} \cup \{\forall x(\mathbf{S}'(x) \to \mathbf{A}'(x)\} \cup \mathbf{AKPU}(\mathbf{S}')^{\mathbf{A}'}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти предложения гарантируют, что $\mathbf{A}'$ - транзитивное подмножество модели $\mathbb{B} \in \mathrm{Mod}\ \Phi$, $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{A}'$ и что $\mathbb{B} | \mathbf{A}' \models \mathrm{AKPU}(\mathbf{S}')$;

3) $\{\mathbf{A}'(\check{a}) \mid a \in \mathbf{A}\} \cup \{\mathrm{U}(\check{q}) \mid q \in \mathrm{U}(a)\} \cup \{\neg \mathrm{U}(\check{\emptyset})\} \cup$

$$\cup \{\forall v_0 (v_0 \in \check{a} \leftrightarrow \bigvee_{b \in a} v_0 = \check{b}) \mid a \in \mathbf{A}\} \cup \{\mathbf{S}'(\check{a}) \mid a \in \mathbf{S}\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти предложения гарантируют, что $\mathbf{A}'$ есть концевое расширение $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathbf{A}'$) и что $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}'$;

4) $\{\forall xyz (\varphi_i^{\mathbf{A}'}(x,y,\bar{\check{a}}) \wedge \varphi_i^{\mathbf{A}'}(y,z,\bar{\check{a}}) \to y = z) \mid i =$

$= 0,1,2\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти предложения гарантируют, что $\varphi_i^{\mathbf{A}'}$ определяет функцию в любой модели Φ, $i = 0,1,2$;

5) $\{\forall xyz\ (\rho'(\langle x,y \rangle) \wedge \rho'(\langle x,z \rangle) \to y = z)$,

$$\forall x (\exists y \rho'(\langle x,y \rangle) \leftrightarrow \exists uv (\varphi_2^{\mathbf{A}'}(u,v,\bar{\check{a}}) \wedge x \in v))\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти предложения гарантируют, что в любой модели Φ ρ' определяет функцию с областью определения $\cup \{v \mid \exists u\ \varphi_2^{\mathbf{A}'}(u,v,\bar{\check{a}})\}$;

6) $\{\forall x (\mathrm{M}(x) \to \mathrm{U}(x)),\ \forall \bar{v} (= v_1 \ldots v_{\# P}) (\mathrm{P}(\bar{v}) \to$

$$\to \mathrm{M}'(\bar{v})\ (= \bigwedge_{i=1}^{\# P} \mathrm{M}'(v_i))) \wedge \forall \bar{v}\ (\exists v_0\ \rho'(\langle \check{P}, v_0 \rangle) \wedge$$

$$\wedge \langle \bar{v} \rangle \in v_0 \leftrightarrow \mathrm{P}(\bar{v})) \mid \mathrm{P} \in \bar{\mathrm{R}}\}.$$

Нетрудно видеть, что Φ есть Σ-подмножество $\mathbb{A}$. Пусть $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, \rho)$ - $\mathbb{A}$-прамодель. Пусть $\mathfrak{h}(\mathfrak{M})$ - естественное обогащение Σ-допустимого множества $(\mathrm{HYP}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M}), \mathbf{A}, \mathbf{S}, \rho)$

до сигнатуры $\sigma(\mathbb{A}) \cup \langle M', A', S', \rho' \rangle \cup \langle \check{a} \mid a \in A \rangle$ ($M'(\mathfrak{h}(\mathfrak{M})) \rightleftharpoons M, A'(\mathfrak{h}(\mathfrak{M})) \rightleftharpoons A$, $S'(\mathfrak{h}(\mathfrak{M})) \rightleftharpoons S$, $\rho'(\mathfrak{h}(\mathfrak{M})) \rightleftharpoons \rho$, $\check{a}(\mathfrak{h}(\mathfrak{M})) \rightleftharpoons a$, $a \in A$). Тогда легко видеть, что $\mathfrak{h}(\mathfrak{M})$ является моделью для Φ.

Покажем теперь, что $\mathbb{J} = \mathbb{L}$, где

$$\mathbb{L} = \mathrm{Mod}(\forall M' \forall \bar{K}(\wedge \Phi \to \varphi(\check{\bar{a}}))).$$

Покажем, что $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{J}$. Пусть $\mathfrak{M}$ - $\mathbb{A}$-прамодель из $\mathbb{L}$, тогда $\mathfrak{h}(\mathfrak{M})$ - модель Φ и, следовательно, $\mathfrak{h}(\mathfrak{M}) \models \varphi(\check{\bar{a}})$, $(\mathrm{HYP}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M}), A, S, \rho) \models \varphi(\check{\bar{a}})$, $(\mathrm{HYP}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M}), A, S, \rho) \models \varphi(\bar{a})$, но тогда $\mathfrak{M} \in \mathbb{J}$.

Покажем теперь, что $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{L}$. Пусть $\mathfrak{M}$ - $\mathbb{A}$-прамодель из $\mathbb{J}$ и пусть $\mathfrak{L}$ - произвольная модель Φ такая, что $\mathfrak{L} \mid M'(\mathfrak{L}) \upharpoonright \bar{R} = \mathfrak{M}$. Нужно показать, что $\mathfrak{L} \models \varphi(\check{\bar{a}})$: для этого достаточно показать, что $\hat{\mathfrak{L}} \models \varphi(\check{\bar{a}})$, где $\hat{\mathfrak{L}}$ - вполне упорядоченная часть $\mathfrak{L}$, так как $\hat{\mathfrak{L}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathfrak{L}$ и $\varphi(\check{\bar{a}})$ - Σ-формула. Из предложения о концевых расширениях из Φ (группа 3) следует, что $A \subseteq A'(\hat{\mathfrak{L}})$ и $\langle \mathbb{A}, S \rangle \subseteq_{\mathrm{end}}$ $\subseteq_{\mathrm{end}} \hat{\mathfrak{L}} \mid A'(\hat{\mathfrak{L}}) \upharpoonright \langle \sigma(\mathbb{A}), S' \rangle$.

Из группы 4 аксиом Φ следует, что Σ-формулы $\varphi_i^{A'}(x, y, \check{\bar{a}})$, $i = 0, 1, 2$, определяют (частичные) функции на $\hat{\mathfrak{L}}$; заметим, что эти функции $\hat{a}$, $\hat{s}$ и $\hat{r}$ являются расширениями функций (резольвент) a, s и r, определимых в $\langle \mathbb{A}, S \rangle$ формулами $\varphi_0(x, y, \bar{a})$, $\varphi_1(x, y, \bar{a})$, $\varphi_2(x, y, \bar{a})$ соответственно, так как $\langle \mathbb{A}, S \rangle \subseteq_{\mathrm{end}} \hat{\mathfrak{L}} \mid A'(\hat{\mathfrak{L}}) \upharpoonright \langle \sigma(\mathbb{A}), S' \rangle$. Пусть $\alpha \rightleftharpoons \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$, тогда $\alpha \subseteq \mathrm{Ord}(\hat{\mathfrak{L}})$ и множества $\bar{A} \rightleftharpoons \{b \mid \exists \beta < \alpha \;\; \hat{\mathfrak{L}} \models \varphi_0^{A'}(\beta, b, \check{a})\}$,

$\bar{S} \rightleftharpoons \{b \mid \exists \beta < \alpha \quad \hat{\mathcal{L}} \models \varphi_1^{A'}(\beta, b, \check{\bar{a}})\}$ и $\bar{\rho} \rightleftharpoons \{b \mid \exists \beta < \alpha \quad \hat{\mathcal{L}} \models \varphi_2^{A'}(\beta, b, \check{\bar{a}})\}$ являются Σ-подмножествами $\hat{\mathcal{L}}$; тогда $\langle \hat{\mathbb{B}}, \bar{A}, \bar{S}, \rho'(\hat{\mathcal{L}}) \restriction \bar{\rho} \rangle$ является Σ-допустимым множеством.

Из отмеченных выше включений $a \subseteq \hat{a}$, $s \subseteq \hat{s}$, $r \subseteq \hat{r}$ вытекает, что на самом деле $\bar{A} = A$ $\bar{S} = S$ и $\bar{\rho} = \bar{R}$ и, следовательно, $\rho'(\hat{\mathcal{L}}) \restriction \bar{\rho} = \rho$. Итак, $\langle \hat{\mathbb{B}}, A, S, \rho \rangle$ - Σ-допустимо; следовательно, $\langle \mathrm{HYP}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M}), A, S, \rho \rangle \subseteq \langle \hat{\mathbb{B}}, A, S, \rho \rangle$. Из $\mathfrak{M} \in \mathbb{J}$ следует $\langle \mathrm{HYP}_{\mathbb{A}}(\mathfrak{M}), A, S, \rho \rangle \models \varphi(\bar{a})$, откуда $\langle \hat{\mathbb{B}}, A, S, \rho \rangle \models \varphi(\check{\bar{a}})$, но $A \subseteq A'(\hat{\mathcal{L}})$, $S \subseteq S'(\hat{\mathcal{L}})$, $\rho \subseteq \rho'(\hat{\mathcal{L}})$ и φ - Σ-формула, позитивная в A', S', ρ'; отсюда $\langle \hat{\mathbb{B}}, A'(\hat{\mathcal{L}}), S'(\hat{\mathcal{L}}), \rho'(\hat{\mathcal{L}}) \rangle \models \varphi(\check{\bar{a}})$; следовательно, и $\mathcal{L} \models \varphi(\check{\bar{a}})$. Итак, $\mathfrak{M} \in \mathbb{L}$ и равенство $\mathbb{J} = \mathbb{L}$ установлено. $\square$

Следствием доказанного является справедливость теоремы 3.3.1 из [6] без предположения о том, что Σ-допустимое множество $\mathbb{A}$ не является слабо стабильным.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Из работы [6] следует, что понятие Σ-допустимого множества, введенное автором в [1], по существу совпадает с понятием +-допустимого множества, введенного много ранее в работе [4]. К сожалению, важная работа [4], как и последующая [5], прошли мимо внимания автора и поэтому он не сделал на них ссылки. Следует отметить, что теорема Ганди для Σ-допустимых множеств не была доказана ни в [4], ни в [5,6], хотя важность ее несомненна.

2. Следует отметить также, что в работе [4] содержится теорема 5.6, близкая к теореме 1 из работы автора [2], хотя доказательства совсем различны.

3. Еще одно пересечение работ автора с работами А.Адамсона, это предложение 2.4 из [5] и предложение 1 из [3].

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-допустимые множества //Логические вопросы теории типов данных. - Новосибирск, 1986. - Вып. 114: Вычислительные системы. - С. 35-39.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Форсинг в допустимых множествах //Алгебра и логика. - 1990. - Т. 29, № 6. - С. 648-658.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Любое семейство подмножеств праэлементов порождает допустимое множество //Сиб.мат.журн. - 1989. - Т.30,№6. - С. 65-67.

4. ADAMSON A. Admissible sets and saturation of structures //Ann. Math. Log. - 1978. - Vol.14, N 2. -P. 111-157.

5. ADAMSON A. Saturated structures, unions of chains, and preservation theorems //Ann.Math.Log. - 1980. - Vol.19, N 1-2. - P. 67-96.

6. LAVINE S. A Spector-Gandy Theorem for $cPC_d(A)$-classes //J.Symbolic. Logic. - 1992. - Vol. 57, N 2. - P.478-500.

Поступила в ред.-изд.отд.
18 февраля 1993 года