ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ В ХИМИИ
(Вычислительные системы)
1993 год Выпуск 149

УДК 519.17

ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ ЭЙЛЕРОВЫХ ГРАФОВ

А.А.Добрынин

Рассматриваются связные конечные графы без петель и кратных ребер, состоящие из p вершин и q ребер. Граф называется *максимальным планарным* (*плоским*) графом, если при добавлении любого ребра он перестает быть планарным (плоским). Хорошо известно, что каждая грань максимального плоского графа (в том числе внешняя) является треугольником [1]. Для числа вершин и ребер такого графа выполняется равенство $q = 3p-6$. Граф называется *эйлеровым*, если в нем существует цикл, содержащий все ребра графа. Согласно теореме Эйлера граф обладает этим свойством тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны. *Максимальный планарный эйлеров* граф (МПЭ-граф) является максимальным планарным графом, имеющим эйлеров цикл.

Бокчи и Левинтер [2] построили МПЭ-графы с числом вершин $p = 3k$ для $k \geq 2$, диаграммы которых приводятся на рис.1. В настоящей работе дается ответ на вопрос из [2] о существовании МПЭ-графов с произвольным числом вершин.

Треугольник является единственным МПЭ-графом, имеющим вершины степени 2. Для числа вершин МПЭ-графа существует простая верхняя оценка через количество его вершин степени 4 и 6. Обозначим n_k число вершин графа степени k.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Любой максимальный планарный эйлеров граф содержит не менее 6 вершин степени 4 и* $n_4 + n_6 \leq p \leq 2n_4 + n_6 - 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из неравенств $2q \geq 4n_4 + 6(p-n_4)$ и $2q \geq 4n_4 + 6n_6 + 8(p-n_4-n_6)$. Отсюда, в частности, вытекает невозможность построения МПЭ-графов с 4 и 5 вершинами.

В [2] показано, что существует единственный МПЭ-граф на 6 вершинах степени 4 (рис.1), который вместе с треугольником являются единственными регулярными МПЭ-графами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для любого* $p \geq 3$, *за исключением* $p = 4,5,7$, *существуют максимальные планарные эйлеровы графы на* p *вершинах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G является МПЭ-графом. Мы можем построить из G новый граф G', применяя операцию вставки в произвольную грань G нового треугольника как показано на рис.2, где вставляемый треугольник выделен штриховкой. Назовем такую процедуру операцией расширения графа. Граф G' также является МПЭ-графом и $p(G') = p(G)+3$. Таким образом, для того чтобы построить искомые графы, достаточно найти подходящий начальный граф G и далее последовательно применять операцию расширения. Вначале построим более простые чем в [2] примеры графов с числом вершин $p = 3k$, $k \geq 3$. Как видно из рис.3 такие графы можно построить из треугольника.

Для построения графов с $p = 3k+2$, $k \geq 2$, вершинами подходит начальный граф на 8 вершинах, показанный на рис.4а. Для получения МПЭ-графов с $p = 3k+1$, $k \geq 3$, вершинами можно воспользоваться начальным графом на рис.4б, имеющим 10 вершин. Если бы существовал МПЭ-граф на 7 вершинах, то он должен иметь степенную последовательность $6^1 4^6$. Как показано в [3] такая степенная последовательность не может быть реализована максимальным планарным графом. ■

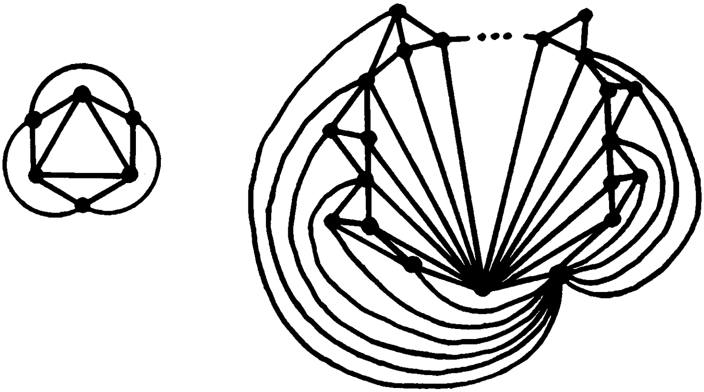


Рис. 1

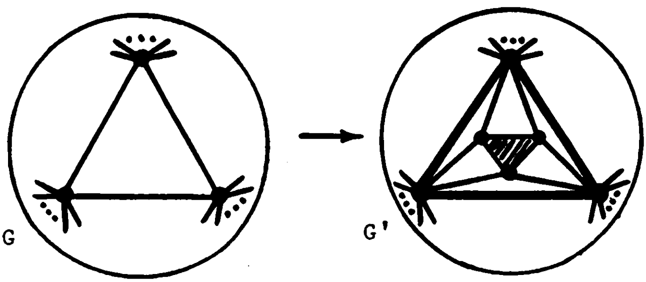


Рис. 2

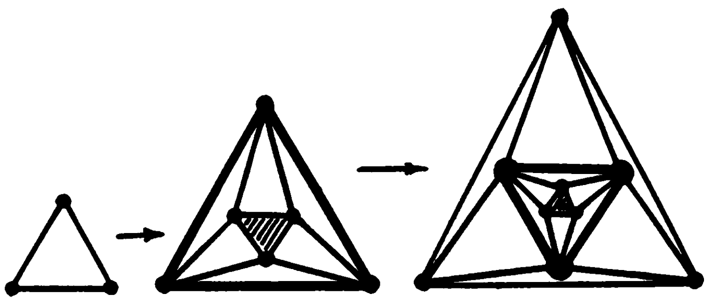


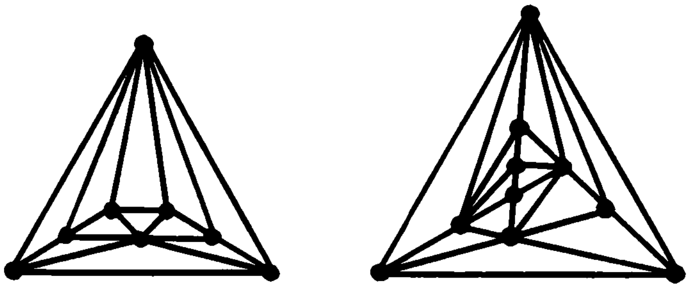
Рис. 3

В заключение рассмотрим некоторые свойства степенных последовательностей МПЭ-графов. На рис.5 показан способ применения операции расширения МПЭ-графа, при котором происходит последовательное увеличение степени единственной вершины v до заданной величины. Среди других вершин графа на каждом шаге увеличивается степень только двух ее соседних вершин с 4 до 6. Заметим, что число вершин степени 4 увеличивается на 1. На рис.6 показана операция расширения графа, при которой количество вершин степени 6 также увеличивается на 1. Применяя подобным образом операцию расширения, нетрудно показать справедливость следующих утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Для любых* $n \geq 0$ *и* $k \geq 6$ *существуют максимальные планарные эйлеровы графы, имеющие точно* n *вершин степени* k *(точно* $n \geq 6$ *вершин степени* $k = 4$*).*

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Пусть* d *есть произвольная невозрастающая последовательность четных чисел, наименьший элемент которой больше 6. Тогда существуют максимальные планарные эйлеровы графы со степенной последовательностью* $d6^m4^k$ *для некоторых* k *и* m.

Опишем один из возможных способов построения таких графов. Пусть необходимо построить МПЭ-граф, имеющий вершины со степенями $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, где $d_i \geq 8$. Возьмем в качестве начального МПЭ-граф на 6 вершинах (рис.5). Операциями расширения увеличиваем степень вершины v до величины d_1. В полученном графе всегда существует грань с тремя вершинами степени 4, образованная на последнем шаге. Далее выбираем одну из этих вершин и операциями расширения доводим ее степень до величины d_2 и т.д. Так как для получения вершины степени d_i требуется $(d_i-4)/2$ операций расширения, то число вершин построенного



а) б)

Рис. 4

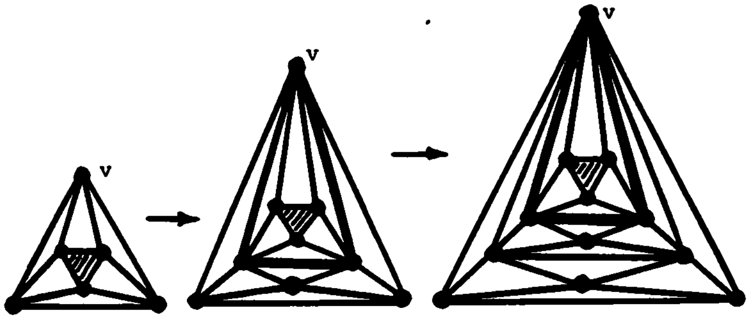


Рис. 5

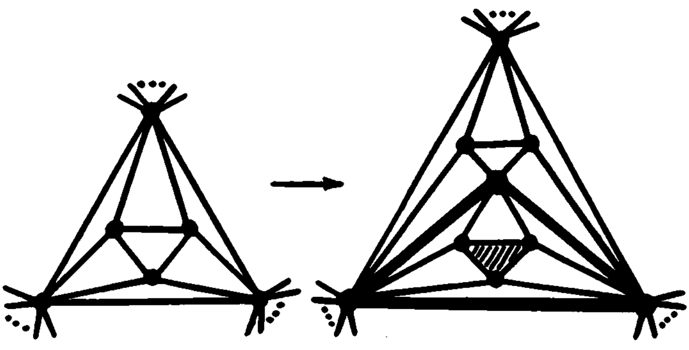


Рис. 6

МПЭ-графа равно $p = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i - 6n + 6$. Количество вершин со степенями 4 и 6 равно $k = \sum_{i=1}^{n} (d_i-4)/2 - n+6 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i - 3n+6$ и $m = \sum_{i=1}^{n} d_i - 4n$ соответственно.

Литература

1. ХАРАРИ Ф. Теория графов. - М.: Мир. - 1973.

2. BOCCHI T., LEWINTER M. Maximal planar Eulerian graphs //Graph Theory Notes of New York. - 1993. - Vol. XXIV. The New York Academy of Sciences.-P.47-50.

3. SCHMEICHEL E.F., HAKIMI S.L. On planar graphical degree sequences //SIAM J. Appl. Math. - 1977. - Vol. 32. - P. 598-609.

Поступила в ред.-изд.отд.

1 октября 1993 года