АНАЛИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ТАБЛИЦ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1994 год Выпуск 150

УДК 510

ОБ ОДНОМ ИНДУКТИВНОМ РЕШЕНИИ КОНТИНУУМ-ПРОБЛЕМЫ

А.С. Нудельман

Введение

После доказательства Коэном независимости континуум-гипотезы от аксиом теории множеств Цермело-Френкеля ZF, являющихся формальным выражением канторовских (классических) теоретико-множественных представлений, возникла проблема поиска такого естественного расширения наших представлений о канторовском "мире множеств", при котором гипотеза континуума была бы разрешима. Возможность возникновения такой ситуации была отмечена еще Гёделем [1, с. 106].

Ясно, что гносеологический источник искомого расширения (классических) теоретико-множественных представлений не может находиться внутри этих представлений. Поэтому такой источник следует искать в более широких, общенаучных рамках. При этом, разумеется, необходимо иметь ввиду два обстоятельства:

1) континуум-проблема есть вопрос о наличии вполне определенного свойства у бесконечных множеств и

2) непосредственное интуитивное усмотрение каких-либо свойств у бесконечных множеств невозможно.

Первое обстоятельство является очевидным, а второе - представляется очевидным, поскольку бесконечные множества не имеют своих прототипов в реальном физическом мире. Заметим, что в теоретико-множественные представления аксиомой бесконечности A_{inf} (из теории ZF) бесконечное множество только вводится в качестве теоретического конструкта (естественно, вместе с внутренними структурными свойствами такого множества, дедуцируемыми из A_{inf}). Откуда же возникает весь известный спектр бесконечных множеств и весь известный спектр свойств этих теоретических конструктов?

Принятая здесь точка зрения состоит в следующем. Все аксиомы теории множеств ZF, за исключением аксиомы бесконечности A_{inf}, в конечном счете появились в качестве результата элементарного гносеологического приема - прямой экстраполяции (индукции), прямого распространения свойств конечных совокупностей на бесконечные: всякая аксиома $ZF\text{-}A_{inf}$ для (наследственно) конечных множеств истинна почти "осязаемо", почти эмпирически и такая аксиома, исходно выражающая некоторое свойство конечных множеств, принимается в качестве истинной для всех множеств, как конечных, так и бесконечных. Что касается свойств обозримых конечных множеств, выраженных аксиомами $ZF\text{-}A_{inf}$, то эти свойства непосредственно усматриваются на физических прототипах этих множеств - на обозримых совокупностях физических объектов. Таким образом, принятая здесь точка зрения позволяет рассматривать классическую теорию множеств как своеобразную эмпирическую теорию, позволяет не удивляться тому факту,что классический математический аппарат весьма полезен для описания эмпирического мира.

В данной работе продолжается формирование теоретико-множественных представлений в полном соответствии с вышеприведенной точкой зрения на гносеологический механизм их возникновения. Здесь реализована традиционная экстраполяция на бесконечные множества еще одного свойства конечных множеств, усмотренного на соответствующих прототипах из реального физического мира. Предполагается, что экстраполяция этого свойства не приводит к противоречивой системе аксиом.

§1. Существующее положение

К настоящему времени математиками предложены практически все мыслимые варианты решения континуум-проблемы [2], однако до сих пор не найден вариант, мотивировка которого была бы настолько убедительной, чтобы этот вариант решения можно было принять в качестве свойства канторовского "мира множеств". Как правило, предлагаемые мотивировки основываются на рассмотрении степени "разумности" тех теоретико-множественных фактов, которые следуют из принятия того или иного варианта решения континуум-проблемы. Но в последнее время, как исключение из этого правила, появились по крайней мере две работы [3,4], где авторы пытаются найти (и мотивировать) некоторые новые теоретико-множественные "истины" (аксиомы), которые, на первый взгляд, не связаны с континуум-проблемой, но которые имплицируют вполне определенный вариант решения этой проблемы.

В [3] основной гносеологической идеей пополнения аксиоматики теории множеств служит идея косвенной экстраполяции свойств конечных совокупностей на бесконечные. В ней неявно предполагается, что лимит свойств конечных совокупностей, пригодных для прямой экстраполяции на бесконечные совокупности, исчерпан и поэтому разработан новый гносеологический прием, названный косвенной экстраполяцией. Оказалось, что косвенная экстраполяция одного из наиболее простых свойств конечных совокупностей, а именно - независимости результата пересчета элементов конечной совокупности от порядка выбора этих элементов при пересчете, приводит к теории, в которой доказуемо отрицание континуум-гипотезы. Отметим, что при формализации механизма косвенной экстраполяции оказалось необходимым явно постулировать безусловный приоритет тех свойств бесконечных множеств, которые "приобретены" ими в результате прямой экстраполяции.

В данной работе гносеологический прием, используемый для введения новой теоретико-множественной "истины", является традиционным - это прямая экстраполяция свойства конечных совокупностей на бесконечные. Новое здесь - само экстраполируемое свойство, которое в арсенале современных теоретико-множественных понятий отсутствует и которое, как предполагается,пригодно для прямой экстраполяции.Естественно,вариант решения континуум-проблемы, возникающий в результате применения прямой экстраполяции, имеет безусловный приоритет перед изложенным в [3] вариантом, который получен с помощью косвенной экстраполяции.

Интуитивной основой аксиом, вводимых в [4], служит следующий мысленный эксперимент: если на отрезке $[0,1]$ действительной прямой R зафиксировать множество чисел $M \subset [1,0]$, мощность которого пренебрежимо мала по сравнению с мощностью множества всех точек этого отрезка, и если затем случайным образом выбрать одно число $x \in [0,1]$, то с (сверх)большой степенью вероятности окажется, что $x \notin M$. Этот простейший мысленный эксперимент,дополненный естественными соображениями о симметричности некоторых однотипных ситуаций выбора, дает основание автору принять новые аксиомы

A_{ω_0}:

$$\forall f:R \to R_{\omega_0} \ \exists x_1,x_2(x_2 \notin f(x_1) \ \& \ x_1 \notin f(x_2)),$$

где f - функция, приписывающая каждому числу из R счетное подмножество множества R, и

$A_{<2^{\omega_0}}$:

$$\forall f:R \to R_{<2^{\omega_0}} \ \exists x_1,x_2(x_2 \notin f(x_1) \ \& \ x_1 \notin f(x_2)),$$

где f - функция, приписывающая каждому числу из R множество чисел из R, мощность которого меньше 2^{ω_0}. Аксиома A_{ω_0} решает континуум-проблему (в $ZFC + A_{\omega_0}$ доказуемо отрицание континуум-гипотезы), а аксиома $A_{<2^{\omega_0}}$ имлицирует невозможность вполне упорядочить множество действительных чисел R [4, с.192].

Обоснованность вышеупомянутых аксиом представляется, однако, сомнительной, поскольку подобным образом можно обосновать и заведомо ложное теоретико-множественное утверждение. Действительно, если в исходном мысленном эксперименте ограничиться рассмотрением только рациональных чисел множества R (рациональных чисел отрезка $[0,1]$), то всякий аргумент, высказываемый в пользу принятий аксиомы A_{ω_0} или аксиомы $A_{<2^{\omega_0}}$, будет трансформирован в аргумент, обосновывающий принятие аксиомы

$$A^*_{fin}(A^*_{<\omega_0}):$$

$$\forall f:R^* \to R^*_{fin} \exists x_1, x_2 (x_2 \notin f(x_1) \ \& \ x_1 \notin f(x_2)),$$

где f - функция, приписывающая каждому рациональному числу из R конечное множество рациональных чисел из R. Но эта аксиома имплицирует невозможность вполне упорядочить множество рациональных чисел из R и, значит, невозможность вполне упорядочить множество натуральных чисел.

В данной работе интуитивной основой новой аксиомы является тоже мысленный квазифизический эксперимент, но у этого эксперимента, в отличие от вышеупомянутого, имеется реальный физический прототип. Последнее обстоятельство позволяет надеяться на гносеологическую корректность обоснования излагаемого ниже решения континуум-проблемы.

Предлагаемый здесь мысленный эксперимент представляет собой, по сути, процесс порождения совокупностей (составленных из множеств) нового вида, не входящих в традиционный универсум множеств. И подобно тому, как изложенный в [5] мысленный процесс построения множеств мотивирует аксиомы традиционной теории множеств, новый мысленный процесс будет мотивировать новую аксиому.

§2. Аксиома плотного наполнения ACF

Рассмотрим эмпирическую ситуацию $C(n)$. Пусть размеры мерной емкости M таковы, что эта емкость способна вместить в себя точно n шаров диаметра d при самой плотной их упаковке в M. И пусть X есть некоторая совокупность шаров диаметра d. Закрепим емкость M на вибростоле, включим его и засыпем в M шары совокупности X, причем засыпку будем производить с такой скоростью, чтобы размещение уже находящихся в M шаров под воздействием силы тяжести и вибрации успевало уплотняться. Если в результате таких действий окажется, что имеется хотя бы один шар, не вмещающийся в M, то можно, очевидно, наблюдать следующий факт: емкость M наполнена шарами настолько плотно, что в нее дополнительно не может быть помещен ни один шар.

Перейдем теперь в квазифизический мир, который аналогичен физическому, но в котором вполне допустимы и бесконечные количества объектов, и бесконечные размеры объектов, и бесконечное время. Рассмотрим аналогичную только что рассмотренной ситуации $C(n)$ мысленную квазиэмпирическую ситуацию $C(\omega_o)$, где ω_o - счетно-бесконечное "число". Пусть мерная емкость M вмещает в себя при предельно плотной упаковке точно ω_o шаров диаметра d и пусть X - совокупность шаров диаметра d. Засыпем шары совокупности X в емкость M, одновременно уплотняя размещение уже находящихся в M шаров. Если в результате таких действий окажется, что имеется хотя бы один шар, не вмещающийся в M, то можно "наблюдать" следующий квазиэмпирический факт: емкость M наполнена шарами настолько плотно, что в нее дополнительно не может быть помещен ни один шар.

Сформулированной здесь аксиомой существующие теоретико-множественные представления пополняются новой "истиной", выражающей как вышеупомянутый квазиэмпирический факт, так и аналогичные факты, появляющиеся в аналогичных квазиэмпирических ситуациях $C(\omega_\alpha)$, где α - ординал и $\alpha > 0$. Разумеется,новая аксиома выражает также эмпирические факты, наблюдаемые в ситуациях $C(n)$. Последнее обстоятельство дает основание утверждать, что новая аксиома является результатом прямой экстраполяции свойств конечных совокупностей на бесконечные.

Приступим к формулировке аксиомы. Если α - ординал (кратко, $\alpha \in On$), то через m_α будем обозначать множество, которое всегда либо пусто, либо является единичным множеством. Всякое множество m_α, $\alpha \in On$, будем называть местом или, конкретнее, α-местом. Если A - множество ординалов,то множество $\{m_\alpha | \alpha \in A\}$ будем называть формой и обозначать через $M(A)$. Форму $M(B)$ будем называть подформой формы $M(A)$, если $B \subsetneqq A$.

Если место m_α не пусто и $x \in m_\alpha$, то будем говорить, что x занимает α-место. Если $M(A)$ - форма, то через $S[M(A)]$ будем обозначать совокупность (не всегда ZF-множество) $\{x | \exists\alpha \in A\ (x \in m_\alpha)\}$. Будем говорить, что элементы совокупности y наполняют (совокупность y наполняет) форму $M(A)$, если $y = S[M(A)]$.

Опишем процесс плотного наполнения CF. При этом через $x := y$ будем обозначать операцию присвоения, после выполнения которой множество x становится равным множеству y. Через $x \Leftarrow y$ будем обозначать операцию введения, после выполнения которой множество x становится элементом множества y. Если x - непу -

стое множество ординалов, то через Sup x будем обозначать минимальный ординал, превосходящий все ординалы из x.

Процесс CF.

Начальное условие: $\forall\beta \in On \quad (m_\beta = \emptyset)$.

Шаг 1. $X := \{0\}$; $0 \in M(1)$.

Шаг 2. $\beta := \mathrm{Sup}\ x$.

Шаг 3. Происходит "(уплотняющая) утряска" находящихся в форме $M(\beta)$ элементов множества X, сопровождающаяся случайным перераспределением находящихся в форме $M(\beta)$ элементов по местам этой формы. При этом соблюдаются следующие правила "утряски":

1) всякий элемент $e \in X$ покидает занимаемое им место тогда и только тогда, когда в процессе "утряски" это место занимается другим элементом множества X,

2) всякий элемент $e \in X$ занимает γ-место только тогда, когда в процессе "утряски" подформа $M(\gamma)$ не может быть наполнена совокупностью $S[M(\gamma)] \cup \{e\}$,

3) если в процессе "утряски" подформа $M(\gamma)$, $\gamma \in On$, может быть наполнена совокупностью $S[M(\gamma)] \cup \{e\}$, где $e \in X$ и $e \notin S[M(\gamma)]$, то в этом процессе подформа $M(A)$, $A \subseteq \gamma$ & $|A| = |\gamma|$, может быть наполнена совокупностью $S[M(A)] \cup \{e\}$.

Шаг 4. $\beta \in X$; $\beta \in M(\beta+1)$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Комментарий. После выполнения на шаге 4 операции $\beta \in M(\beta+1)$ введенный в форму $M(\beta+1)$ элемент β не имеет еще своего места в этой форме, поэтому форма $M(\beta+1)$ оказывается в неустойчивом (возбужденном) состоянии. Устойчивое состояние формы $M(\beta+1)$, т.е. состояние, при котором все находящиеся в этой форме элементы (множества X) занимают свои места, достигается после завершения естественного (т.е. находящегося вне контроля программиста) процесса "уплотняющей утряски" шага 3.

Если α - ординал и $\alpha > 0$, то через $CF(\alpha)$ будем обозначать процесс, являющийся начальным отрезком процесса CF до момента, когда на шаге 2 будет выполнено присвоение $\beta := \alpha$ и завершится "уплотняющая утряска" шага 3.

АКСИОМА плотного наполнения ACF. *Для всякого отличного от нуля ординала* α *существует процесс* $CF(\alpha)$.

В общем случае понятие процесса $CF(\alpha)$ не определимо в терминах традиционных теоретико-множественных представлений, что обусловлено первичностью понятия процесса "уплотняющей утряски" (шаг 3), т.е. независимостью этого понятия от концепций, с которыми имеет дело теория множеств ZFC. Однако, если $\alpha < \omega_1$, то все теоретико-множественные явления, связанные с процессом $CF(\alpha)$, описуемы средствами ZFC и, более того, в ZFC доказуемо существование этих явлений.

§3. Решение континуум-проблемы в теории ZF+ACF

Предметная область теории ZF+ACF будет содержать все множества из предметной области V теории множеств ZF, все начальные отрезки $CF(\alpha)$, $0 \in \alpha \in On$, процесса плотного наполнения CF и все объекты, определимые в терминах множеств из V и процессов $CF(\alpha)$.

Аксиомами теории ZF+ACF будут аксиомы теории ZF (без аксиомы выбора), релятивизованные относительно области V, и аксиома плотного наполнения ACF.

Логическая основа теории ZF+ACF будет классической.

Будем называть результатом процесса $CF(\alpha)$ и обозначать через $RCF(\alpha)$ то распределение по местам m_β, $\beta \in On$, элементов множества α, которое сформировалось после заключительной "уплотняющей утряски" процесса $CF(\alpha)$. Заметим, что существование результата $RCF(\alpha)$ обусловливается правилом 1 "утряски".

Если A - множество ординалов, то совокупность $S[M(A)]$ в результате $RCF(\alpha)$ будем обозначать через $S_\alpha(A)$. Ясно, что во всяком результате $RCF(\alpha)$ имеет место $S_\alpha(\alpha) = \alpha$, поскольку во

всяком $RCF(\alpha)$ место $m_\alpha = \emptyset$ и, следовательно, $\forall\beta \in On$ $(\beta \geq \alpha \to$
$\to m_\beta = \emptyset)$.

Пусть $CF(\alpha)$ - процесс плотного наполнения и A - множество ординалов. Тогда совокупность $S_\alpha(A)$ будем называть плотным A-множеством (в $RCF(\alpha)$), если процессом $CF(\alpha+1)$ форма $M(A)$ не может быть наполнена совокупностью $S_\alpha(A) \cup \{\alpha\}$.

Через $|x|$ будем обозначать мощность множества x, а через $|x|^+$ - минимальную мощность, превосходящую $|x|$. Ясно, что мощностью плотного A-множества (в каком-либо $RCF(\alpha)$) будет $|A|$. Заметим, что конечные плотные A-множества есть множества в смысле ZF (множества, принадлежащие области V). Бесконечные плотные A-множества не являются множествами из V, они есть совокупности иного "онтологического" статуса.

В первых двух предложениях будет доказано, по сути, существование бесконечных совокупностей, названных плотными множествами. В них будут представлены, по-видимому, все случаи возникновения таких совокупностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если β - бесконечный ординал, то совокупность $S_\alpha(\beta)$ будет плотным β-множеством тогда и только тогда, когда $|\alpha| > |\beta|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_\alpha(\beta)$ - плотное β-множество. Если $|\alpha| \leq |\beta|$, то $|\alpha+1| \leq |\beta|$ (поскольку β - бесконечный ординал) и, следовательно, в результате $RCF(\alpha+1)$ место $m_\beta = \emptyset$. Значит, процессом $CF(\alpha+1)$ форма $M(\beta)$ будет наполнена совокупностью $S_\alpha(\beta) \cup \{\alpha\}$.

Пусть $|\alpha| > |\beta|$. Тогда в результате $RCF(\alpha)$ место $m_\beta \neq \emptyset$. Если процессом $CF(\alpha+1)$ форма $M(\beta)$ может быть наполнена совокупностью $S_\alpha(\beta) \cup \{\alpha\}$, то процессом $CF(\alpha)$ форма $M(\beta)$ может быть наполнена совокупностью $S_\alpha(\beta) \cup m_\beta$ (что противоречит правилу 2 "утряски").

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть* $\beta \in On$ *и* $A \subseteq \beta$. *Тогда если* $S_\alpha(\beta)$ *- плотное* β*-множество, то* $S_\alpha(A)$ *- плотное* A*-множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_\alpha(\beta)$ - плотное β-множество. Если процессом $CF(\alpha+1)$ форма $M(A)$ может быть наполнена совокупностью $S_\alpha(A) \cup \{\alpha\}$, то процессом $CF(\alpha+1)$ форма $M(\beta)$ может быть наполнена совокупностью $S_\alpha(\beta) \cup \{\alpha\}$, поскольку $M(A)$ - подформа формы $M(\beta)$.

Через $CF_o(\alpha)$ будем обозначать процесс, являющийся начальным отрезком процесса $CF(\alpha)$ до момента, когда начнется заключительная "уплотняющая утряска" шага 3.

Следующее предложение проясняет основную особенность процесса плотного наполнения, приводящего к возникновению бесконечных плотных множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть* β *- бесконечный ординал и* $\alpha = |\beta|^+$. *Тогда процессом* $CF_o(\alpha)$ *в форму* $M(\beta)$ *вводятся все элементы кардинала* α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \in \alpha$. Поскольку α - кардинал, то $|\gamma| < |\alpha|$ и $|\gamma+1| < |\alpha|$. Следовательно, $|\gamma+1| \leq |\beta|$. Значит, в результате $RCF(\gamma+1)$ место $m_\beta = \emptyset$, что указывает на то, что процессом $CF(\gamma+1)$ (следовательно, процессом $CF_o(\alpha)$) было осуществлено введение $\gamma \in M(\beta)$. Поскольку во всяком результате $RCF(\delta)$, где $\gamma+1 < \delta < \alpha$, место $m_\beta = \emptyset$ ($\alpha = |\beta|^+$ и $\delta < \alpha$ влекут $|\delta| \leq |\beta|$), то элемент γ процессом $CF_o(\alpha)$ из формы $M(\beta)$ не выводится.

Докажем теперь континуум-гипотезу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Выполняется равенство* $2^{\omega_o} = \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложений 1 и 3 следует, что для возникновения в процессе CF плотного ω_o-множества в форму $M(\omega_o)$ достаточно ввести все элементы множества мощности ω_1. Покажем (и этим завершим доказательство, поскольку уже известно, что $\omega_1 \leq 2^{\omega_o}$), что для возникновения в процессе CF плотного ω_o-множества в форму $M(\omega_o)$ необходимо ввести все элементы множества, мощность, которого $\geq 2^{\omega_o}$.

Будем обозначать через K множество такое, что

1) $\forall k \in K \ (k \subseteq \omega_o \ \& \ |k| = \omega_o)$,

2) $\forall k_1, k_2 \in K \ (k_1 \neq k_2 \to |k_1 \cap k_2| < \omega_o)$,

3) $|K| = 2^{\omega_o}$.

(Доказательство существования такого множества приведено в [6, с. 82].)

Рассмотрим результат $RCF(\omega_o)$. Ясно (ввиду предложения 1), что $S_{\omega_o}(\omega_o)$ не будет плотным ω_o-множеством. Значит (ввиду правила 3 "утряски"), для всякого $k \in K$ совокупность $S_{\omega_o}(k)$ не будет плотным k-множеством. Но для всякого $k \in K$ совокупность $S_{\omega_1}(k)$ будет (ввиду плотности $S_{\omega_1}(\omega_o)$ и предложения 2) плотным k-множеством. Следовательно, после завершения процесса $CF(\omega_o)$ каждая из подформ $M(k)$, $k \in K$, процессом $CF(\omega_1)$ будет пополнена по крайней мере одним элементом.

Покажем, что вводимый процессом $CF(\omega_1)$ в форму $M(\omega_o)$ новый элемент может пополнить не более, чем одну подформу из семейства $\{M(k) | k \in K\}$. Пусть $k_1 \in K$ и $e \in M(k_1)$, т.е. элемент e пополняет форму $M(k_1)$ в процессе $CF(\omega_1)$ после завершения процесса $CF(\omega_o)$. Тогда, если $k_2 \in K$, $k_2 \neq k_1$ и $e \in M(k_2)$, то $e \in M(k_1 \cap k_2)$. Но последнее невозможно, поскольку $S_{\omega_o}(k_1 \cap k_2)$ - плотное $(k_1 \cap k_2)$-множество. Действительно, $|k_1 \cap k_2| < \omega_o$ влечет существование ординала $\gamma < \omega_o$ такого, что $k_1 \cap k_2 \subsetneq \gamma$, а плотность совокупности $S_{\omega_0}(\gamma)$ (ввиду $m_\gamma \neq \emptyset$ в $RCF(\omega_0)$) и предложение 2 влекут плотность совокупности $S_{\omega_0}(k_1 \cap k_2)$.

Таким образом, для возникновения в процессе CF плотных k-множеств, $k \in K$, в форму $M(\omega_0)$ необходимо ввести все элементы множества, мощность которого $\geq |K|$, т.е. $\geq 2^{\omega_0}$. Возникновение в процессе CF плотных k-множеств, $k \in K$, есть необходимое условие (ввиду предложения 2) возникновения в этом процессе плотного ω_0-множества.

Заключение

Если принять существование мысленных квазиэмпирических ситуаций $C(\omega_\alpha)$, $\alpha \in On$, то представляется естественным принятие существования как процессов плотного наполнения $CF(\alpha)$, $\alpha \in On$, так и совокупностей, названных плотными A-множествами. Даже несмотря на "онтологическую" необычность таких совокупностей в тех случаях, когда они бесконечны. Ведь всякое плотное A-множество Q_A в $RCF(\alpha)$ (при соответствующих $\alpha \in On$ и $A \subsetneq \alpha$) является, по сути, максимальной совокупностью мощности $|A|$, порождаемой процессом $CF(\alpha)$. Если A конечно, то Q_A есть множество в традиционном смысле, в смысле ZF. Но если A бесконечно, то Q_A не будет множеством в смысле ZF. Последнее указывает на то, что в понятии "бесконечное плотное A-множество" выражена новая грань математической бесконечности, не находящая своего отражения в существующей теории математической бесконечности (в теории множеств ZF). Кроме того, если A бесконечно, то совокупность Q_A, в отличие от ZF-множества, не является "свободным" объектом: бесконечное плотное A-множество Q_A в $RCF(\alpha)$, возникающее в процессе плотного наполнения, не существует вне формы M(A) и вне результата RCF(α).

Интуитивная основа предлагаемого в данной работе варианта решения континуум-проблемы заложена, в конечном счете, в физическом мире, где существуют процессы плотного наполнения в ситуациях C(n). Это обстоятельство дает основание предполагать, что принятие именно этого варианта решения континуум-проблемы окажется полезным при использовании математического аппарата для описания явлений реального физического мира.

Литература

1. FRAENKEL A.A, BAR-HILLEL Y., LEVY A. Foundations of set theory. - Amsterdam: North-Holland, 1973.

2. MADDY P. Believing the axioms. I //J. Symbol. Log. - 1988. - Vol. 53, N 2. - P. 481-511.

3. НУДЕЛЬМАН А.С. Об одном расширении теории множеств Цермело-Френкеля //Методы анализа данных. - Новосибирск, 1985. - Вып. 111: Вычислительные системы. -С. 140-151.

4. FREILING C. Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line //J. Symbol. log. - 1986. - Vol. 51, N 1. - P. 190-200.

5. ШЕНФИЛД Д.Р. Аксиомы теории множеств //Справочная книга по математической логике. - Ч.2: Теория множеств.- М.: Наука, 1982. - С. 9-34.

6. КЮНЕН К. Комбинаторика //Там же. - С. 64-98.

Поступила в ред.-изд.отд.
28 февраля 1994 года