ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)

1994 год Выпуск 151

УДК 519.17

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФОВ С ПАЛИНДРОМНЫМ ПОЛИНОМОМ ВИНЕРА*)

А.А.Добрынин

Введение

Полиномиальные инварианты графов являются интенсивно изучаемыми объектами в граф-теоретических исследованиях и находят многочисленные применения в приложениях. Так, в математической химии они используются для характеризации структур молекулярных графов химических соединений и полимеров [1-4]. Наибольшее внимание исследователей привлекают характеристический полином матрицы смежности графа, матрицы расстояний и лапласовой матрицы, ациклический многочлен, полином паросочетаний, полином Виланда, полином Хосойи и другие.

В [4] введен полином, названный по имени американского химика Г.Винера, коэффициенты которого определяются расстояниями между вершинами графа. Полином Винера $H(G)$ определяется формулой

$$H(G) = H(G,x) = \sum_{k\geq 0} d(G,k)x^k,$$

где коэффициент $d(G,k)$ есть число пар вершин связного графа G, в каждой из которых вершины находятся друг от друга на расстоя-

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда Фундаментальных исследований (код проекта 93-03-18657).

нии k. Последовательность, совпадающая с последовательностью коэффициентов полинома и называемая дистанционным распределением графа, рассматривалась и ранее для классов абстрактных графов [5], а также использовалась для установления структурного подобия молекулярных графов. Вектор коэффициентов полинома будет обозначаться $coeff(G) = coeff(H(G)) = (p,q,d(G,2), d(G,3),\dots,d(G,D))$. Ясно, что если граф имеет p вершин и q ребер, то $d(G,0) = p$ и $d(G,1) = q$, а сумма всех коэффициентов полинома $H(G)$ равна $p(p+1)/2$.

Понятие палиндромности полинома графа было предложено Kennedy [6] и изучалось для полиномов различных видов [6-9]. Полином $H(G)$ степени D называется *палиндромным*, если для его коэффициентов выполняются равенства $d(G,k) = d(G,D-k)$, $k = 0,1,\dots,D$, где $D = diam(G)$ есть диаметр графа G. Примером графа с палиндромным полиномом Винера является простой цикл C_p с нечетным числом вершин, для которого $d(C_p,k) = p$ для всех $k = 0,1,\dots,(p-1)/2$. В [10] рассмотрены некоторые свойства полинома Винера, высказано мнение о трудности построения графов с палиндромным полиномом Винера и сформулирована гипотеза, утверждающая, что не существует деревьев с палиндромным полиномом Винера.

Последовательность коэффициентов полинома $H(G)$ назовем *унимодальной*, если существует такое m, что для всех $1 \leq i \leq m$ выполняется $d(G,i-1) \leq d(G,i)$, а для $m \leq i \leq D-1$ справедливо неравенство $d(G,i) \geq d(G,i+1)$, т.е. до компоненты $d(G,m)$ последовательность коэффициентов является неубывающей, а после нее - невозрастающей. Известно, что унимодальность последовательности коэффициентов полиномов такого вида тесно связана с вещественностью их корней [11]. Нетрудно показать, что для произвольных графов последовательность $coeff(H(G))$ не является унимодальной.

В настоящей работе будут построены классы графов с диаметром $2 \leq \mathrm{diam}(G) \leq 6$ и палиндромным полиномом Винера. Схема построения включает два шага. На первом шаге выбирается начальный граф с непалиндромным полиномом. Второй шаг состоит в добавлении или удалении ребер начального графа таким образом, чтобы в результате получился граф с палиндромным полиномом. Для последовательности коэффициентов построенных графов будут рассматриваться условия, обеспечивающие ее унимодальность.

1. Графы с диаметром $\mathrm{diam}(G) = 2$

Очевидно, полином Винера для графа G является в этом случае палиндромным тогда и только тогда, когда выполняется условие $2p = \sum_v (p-\deg(v)-1)$ или $q = p(p-3)/2$, где $\deg(v)$ обозначает степень вершины v. При этом полином имеет простой вид: $H(G) = p+qx+px^2$. Соответствующие графы могут быть получены удалением p ребер из полного графа K_p (с сохранением связности графа). На 5 вершинах существует пара графов с палиндромным полиномом Винера, а на 6 вершинах имеется уже 15 графов с этим свойством. Их изображения приводятся на рис.1. Регулярные графы степени $r \geq 3$ диаметра 2 можно построить, например, из полного графа K_{r+3} удалением ребер гамильтонового цикла. Среди деревьев только звезда $K_{1,p-1}$ имеет диаметр равный 2, а ее последовательность $\mathrm{coeff}(K_{1,p-1})$ не является палиндромной. Следовательно, последовательность коэффициентов палиндромного полинома Винера графов диаметра 2 всегда унимодальна.

2. Графы с диаметром $\mathrm{diam}(G) = 3$

Если граф G обладает палиндромным полиномом Винера, то его вектор коэффициентов имеет вид $\mathrm{coeff}(G) = (p,q,q,p)$. Отсюда немедленно следует равенство для количества ребер графа $q = p(p-3)/4$.

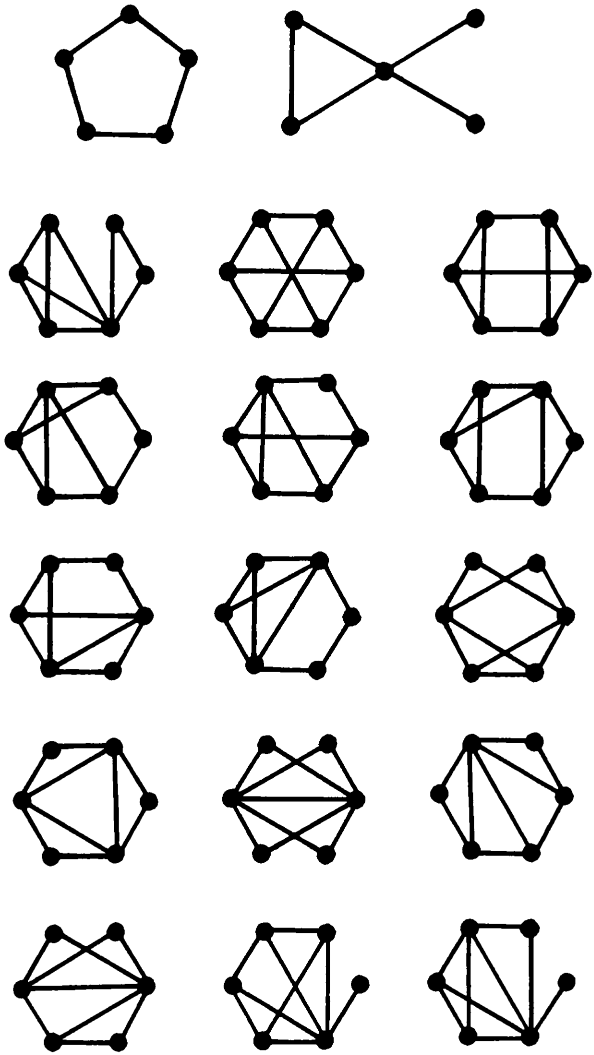

Рис. 1. Графы диаметра 2 с палиндромным полиномом Винера и числом вершин 5 и 6.

Рассмотрим граф F на рис.2 и пусть $\mathrm{coeff}(F) = (p,q,a,b)$. Заметим, что если мы соединим новым ребром вершины в подграфе F_1, F_2 или F_3, то получим $\mathrm{coeff}(F+e) = (p,q+1,a-1,b)$. Это свойство будет использовано для построения графов с палинд - ромным полиномом Винера.

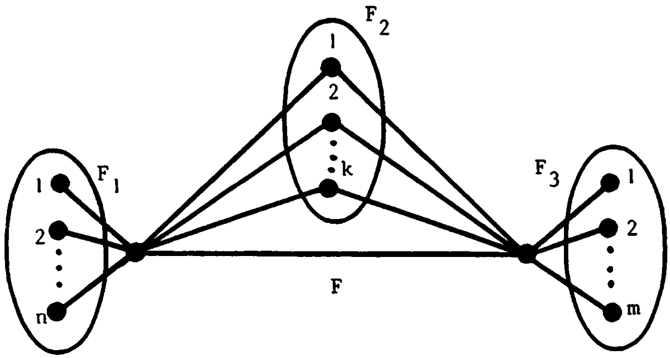

Рис. 2

Пусть подграфы F_1, F_2 и F_3 не имеют ребер, тогда $p = n+m+k+2$, $q = n+m+2k+1$, $a = (n^2+m^2+k^2+2nk+2mk+m+n-k)/2$ и $b = nm$. Выполнение равенства $b=p$ влечет $k = nm - (n+m+2) \geq 0$ и $\mathrm{coeff}(F) = (p,q,a,p)$. Предположим, что для коэффициентов выполняется неравенство $a-q \geq 0$ и $a \equiv q \pmod 2$. Пусть граф G образован из графа F добавлением $(a-q)/2$ ребер в подграфы F_1, F_2 и F_3. Тогда получим $\mathrm{coeff}(G) = (p,(a+q)/2,(a+q)/2,p)$, т.е. полином Винера графа G является палиндромным. Ясно, что для числа добавляемых ребер должно выполняться $(a-q)/2 \leq q(K_n) + q(K_m) + q(K_k)$.

Таким образом, подходящие параметры n и m, $n \leq m$, определяют класс графов $U(n,m)$ с одинаковыми палиндромными полиномами Винера. Наименьшее число вершин $p = 8$ имеет граф, построенный из дерева F с параметрами $n = 2$ и $m = 4$ $(k = 0)$, $\mathrm{coeff}(F) =$ $= (8,7,13,8)$. Добавив $(a-q)/2 = 3$ ребра на $q(K_2) + q(K_4) = 7$ мест в подграфы F_1 и F_3 дерева F, получим граф с $\mathrm{coeff}(G) =$ $= (8,10,10,8)$. Следовательно, класс $U(2,4)$ содержит 5 неизоморфных графов (см. рис.3). Существуют классы, состоящие из единственного графа, например, $U(2,12)$. При его построении 95

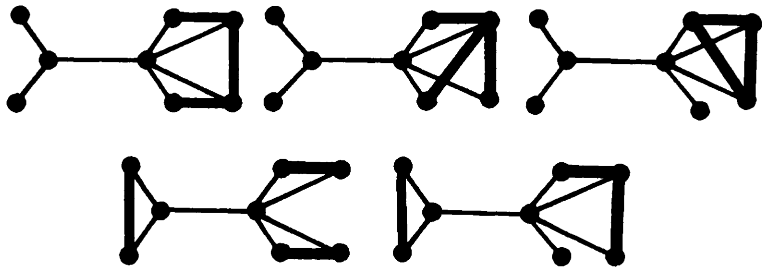

Рис. 3

ребер необходимо разместить на таком же количестве мест. В приложении 1 табулированы значения коэффициентов полинома графов F и G для начальных значений параметров n, m и k (без пропусков). Величины A и P обозначают количество добавляемых в F ребер и число возможных мест для размещения этих ребер, $A =$ $= (a-q)/2$ и $P = q(K_n) + q(K_m) + q(K_k)$.

Полиномы Винера для графов из разных классов также могут совпадать. Пусть $G \in U(n,m)$ и $G_1 \in U(n_1,m_1)$. Нетрудно показать, что $\mathrm{coeff}(G) = \mathrm{coeff}(G_1)$ тогда и только тогда, когда $nm = n_1m_1$, т.е. если порядки графов одинаковы.

Для унимодальности $\mathrm{coeff}(G)$ достаточно выполнения неравенства $p \leq (a+q)/2$, которое справедливо для всех допустимых значений n, m и k.

3. Графы с диаметром $diam(G) = 4$

Рассмотрим граф F с произвольными подграфами F_1, F_2 и F_3 (см. рис.4) и пусть $coeff(F) = (p,q,a,b,c)$. Если мы добавим новое ребро в подграф F_1, F_2 или F_3, то получим $coeff(F+e) = (p,q+1,a-1,b,c)$.

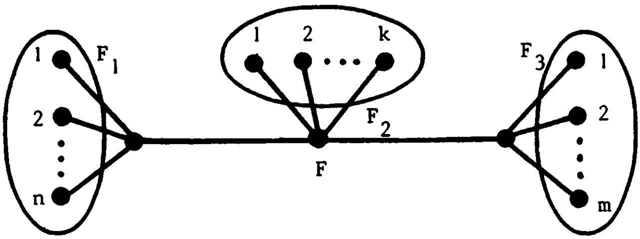

Рис. 4

Пусть F является деревом, тогда $p = n+m+k+3$; $q = n+m+k+2$; $a = (n^2+ m^2+ k^2+3k+n+m+2)/2$; $b = nk+mk+n+m$ и $c = nm$. Равенство $c = p$ определяет значение $k = nm-(n+m+3) \geq 0$ и $coeff(F) = (p,q,a,b,p)$. Предположим, что для коэффициентов полинома дерева F выполняются неравенства $0 < b-q < a$. Пусть граф G образуется из F добавлением $b-q$ ребер в подграфы F_1, F_2 и F_3 произвольным образом. Тогда $coeff(G) = (p,b,a+q-b,b,p)$, т.е. граф G имеет палиндромный полином Винера. Число добавляемых ребер не должно быть больше величины $q(K_n) + q(K_m) + q(K_k)$.

Класс графов $U(n,m)$ с совпадающими палиндромными полиномами Винера является непустым для почти всех n и m. Из анализа данных и проверки соответствующих неравенств для коэффициентов полиномов следует, что для любых значений параметров $n \geq 2$ и $m \geq 2$, $n \leq m$, за исключением $n = 2$, $m = 2,3,4,5$; $n = 3$, $m = 3,5,6,7,\ldots,18$; $n = 4$, $m = 4,5,\ldots,9$ и $n = 5$, $m = 5,6$ полином Винера графов класса $U(n,m)$ является палиндромным.

Наименьшее число вершин $p = 12$ имеют графы, построенные при $n = 2$, $m = 6$ $(k = 1)$ и $n = 3$, $m = 4$ $(k = 2)$. В последнем случае коэффициенты полинома Винера для дерева F равны $coeff(F) = (12,11,22,21,12)$. Далее мы должны добавить $b - q = 10$ ребер в F на $q(K_3) + q(K_4) + q(K_2) = 10$ возможных мест. Следовательно, класс $U(3,4)$ содержит единственный граф и $coeff(G) = (12,21,12,21,12)$. Для дерева F порядка $p = 22$ с параметрами $n = 2$ и $m = 11$ $(k = 6)$ имеем $coeff(F) = (22,21,97,91,22)$. Так как $b-q = 70$ и $q(K_2) + q(K_{11}) + q(K_6) = 71$, то $U(2,11)$ состоит из трех графов.

В приложении 2 приводятся коэффициенты полинома Винера дерева F и построенного по нему графа G для начальных значений параметров, где $A = b-q$ и $P = q(K_n) + q(K_m) + q(K_k)$.

Для унимодальности $coeff(G)$ достаточно выполнение неравенства $b \leq a+q-b$. Так как $k \sim nm$, то справедливо $b \sim n^2m+nm^2$, и $a+q \sim n^2m^2$. Тогда для достаточно больших n и m последовательность коэффициентов полинома Винера будет унимодальной. Например, уже для $n \geq 10$ последовательность $coeff(G)$ является унимодальной.

Рассмотрим построение графов с палиндромным полиномом из дерева F с тремя диаметральными "метелками" (см.рис.5). Порядок дерева равен $p = nr+nm+rm$ или $p = n+m+r+k+4$, откуда $k = (nr+nm+rm) - (n+m+r+4)$. Тогда коэффициенты полинома Винера

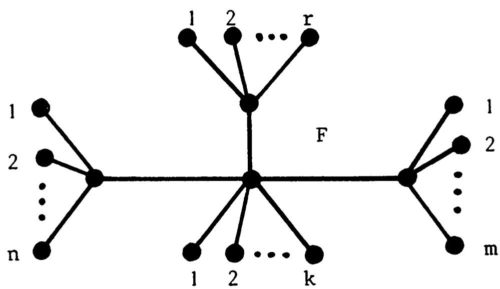

Рис. 5

определяются выражениями $a = (n^2+m^2+r^2+k^2+5k+n+m+r+6)/2$; $b = (k+2)(n+m+r)$ и $c = nr+nm+rn$. Далее все построения проводятся аналогично. В приложении 3 даются значения параметров и коэф - фициенты полинома Винера для таких графов. Наименьший порядок графа равен $P = 33$ при $n = m = 3$ и $r = 4$ $(k = 19)$. При этом в дерево F нужно добавить 178 ребер на 183 возможных места. Последовательности коэффициентов полинома равны coeff(F) = = (33,32,253,210,33) и coeff(G) = (33,210,75,210,33). Таким же образом для построения графов можно использовать деревья с более чем тремя диаметральными метелками.

4. Графы с диаметром diam(G) = 5

Рассмотрим граф F с произвольными подграфами F_1, F_2, F_3 и F_4 (см. рис. 6) и пусть coeff(F) = (p,q,a,b,c,d). После добавления нового ребра в подграфы F_1, F_2, F_3 или F_4 получим coeff(F+e) = (p,q+1,a−1,b,c,d). Если новым ребром соединить вершину из подграфа F_2 с вершиной из F_3, то легко увидеть, что coeff(F+e) = (p,q+1,a,b−1,c,d).

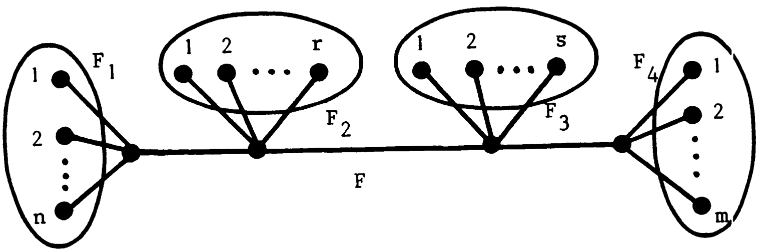

Рис. 6

Пусть F является деревом, тогда $p = n+m+r+s+4$; $q = n+m+r+s+3$; $a = (n^2+m^2+r^2+s^2+3r+3s+n+m+4)/2$; $b = nr+ms+rs+n+m+r+s+1$; $c = ns+mr+n+m$ и $d = nm$. Так как должно выполняться $d = p$, то $(r+s) = nm - (n+m+4) \geq 0$ и coeff(F) =

$= (p,q,a,b,c,p)$. Предположим, что для коэффициентов справедливы неравенства $c-q > b-a > 0$. Пусть граф G образуется из дерева F добавлением Δ_1 ребер в подграфы F_1, F_2, F_3 или F_4 произвольным образом. Далее вершины из F_2 соединим с вершинами из F_3 с помощью Δ_2 новых ребер. В результате имеем $\mathrm{coeff}(G) = (p,q+\Delta_1+\Delta_2,a-\Delta_1,b-\Delta_2,c,p)$. Приравняв соответствующие коэффициенты, получим $\Delta_1 = ((c-q) + (a-b))/2$ и $\Delta_2=((c-q) - (a-b))/2$. Построенный граф имеет палиндромный полином Винера с коэффициентами $\mathrm{coeff}(G) = (p,c,(q+a+b-c)/2,(q+a+b-c)/2,c,p)$.

Соответствующий класс $U(n,m,r)$, $n \le m$, содержит графы с совпадающими палиндромными полиномами Винера. Графы с наименьшим числом вершин имеют порядок $p = 16$ при $n = m = 4$ и $r = s = 2$. Для их построения нужно добавить $\Delta_1 = 4$ и $\Delta_2 = 5$ ребер в дерево F. Тогда коэффициенты $\mathrm{coeff}(F) = (16,15,32,33,24,16)$ преобразуются в $\mathrm{coeff}(G) = (16,24,28,28,24,16)$. Полином Винера может совпадать для разных классов графов. Например, $\mathrm{coeff}(G) = (36,132,165,165,132,36)$ для всех графов из классов $U(6,6,4,16)$, $U(6,6,5,15)$, $U(6,6,6,14)$, $U(6,6,7,13)$, $U(6,6,8,12)$ и $U(6,6,9,11)$. В приложении 4 приводятся значения параметров n, m, r и s, количество добавляемых ребер Δ_1, Δ_2 и соответствующие коэффициенты полиномов графов F и G.

Для унимодальности $\mathrm{coeff}(G)$ достаточно выполнения неравенств $p \le c \le (q+a+b-c)/2$. Первое неравенство очевидно, а второе справедливо для достаточно больших значений параметров n, m, r и s. Действительно, если $r \sim nm$ и $s \sim nm$, то $c \sim n^2m + nm^2$ и $q+a+b \sim n^2m^2$.

5. Графы с диаметром $\mathrm{diam}(G) = 6$

Рассмотрим граф F с произвольными подграфами F_1, F_2, F_3, F_4 и F_5 (см.рис.7) и пусть $\mathrm{coeff}(F) = (p,q,a,b,c,d,e)$.

Если мы добавим два ребра e_1 и e_2 как показано на рис.7, то коэффициенты полинома для нового графа будут равны

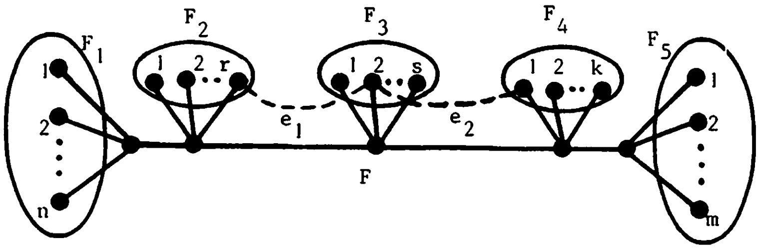

Рис. 7

$coeff(F+e_1+e_2) = (p,q+2,a+1,b-2,c-1,d)$. Если, как и ранее, мы соединим вершины подграфов F_2 и F_3 (или F_3 и F_4) новым ребром e, то получим $coeff(F+e) = (p,q+1,a,b-1,c,d,e)$.

Пусть F является деревом, тогда $p = n+m+r+s+k+5$; $q = n+m+r+s+k+4$; $a = (n^2+m^2+r^2+s^2+k^2+3r+3s+3k+n+m+6)/2$; $b = nr+ms+kr+ks+n+m+r+s+2k+2$; $c = nk+mk+rs+n+m+r+s+1$; $d = ns+mr+m+n$ и $e = nm$. Если $p = e$, то $(r+s+k) = nm-(n+m+5)$ и $coeff(F) = (p,q,a,b,c,d,p)$. Пусть для коэффициентов выполняются неравенства $d-q > 0$, $c-a > 0$ и $c \equiv a \pmod 2$. Добавив $\Delta_1 = (c-a)/2$ пар ребер первым способом, получим $coeff(G) = (p,q+(c-a),(c+a)/2,b-(c-a),(c+a)/2,d,p)$. Далее соединим вершины графа с помощью $\Delta_2 = d+a-q-c$ ребер вторым способом. Результирующий граф G имеет $coeff(G) = (p,d,(c+a)/2,b+q-d,(c+a)/2,d,p)$. Так как коэффициенты положительны, то необходимо выполнение условий $b-(c-a) > 0$ и $b+q-d > 0$.

Наименьший порядок графов равен $p = 24$ при $n = 3$, $m = 8$, $r = 1$, $s = 2$ $(k = 5)$ и при $n = 4$, $m = 6$, $r = 2$ и $s = 3$ $(k = 4)$. Для графов из первого класса коэффициенты полинома дерева F равны $coeff(F) = (24,23,72,60,72,25,24)$. После добавления в граф $\Delta_2 = 2$ ребер получим $coeff(G) = (24,25,72,58,72,25,24)$. В приложении 5 табулированы начальные значения параметров и соответствующие им коэффициенты полиномов для дерева F и графа G.

Если справедливы неравенства $p \le d \le (c+a)/2 \le b+q-d$, то последовательность coeff(G) будет унимодальной. Однако, для достаточно больших значений параметров n, m, k, r и s последнее неравенство может не выполняться. Действительно, если $r \sim nm$, $s \sim nm$ и $k \sim nm$, то $d \sim n^2m+nm^2$, $b \sim n^2m + nm^2$ и $a \sim n^2m^2$.

Заключение

В работе построены классы графов с диаметром от 2 до 6 и палиндромным полиномом Винера. Рассмотренные классы не покрывают все множество графов с палиндромным полиномом Винера и данным диаметром, так как кроме используемых конструкций начальных графов возможны и другие, например, с несколькими диаметральными метелками. Для ряда случаев сформулированы условия на параметры графов, обеспечивающие унимодальность последовательности коэффициентов полиномов. Отметим, что не удалось найти контрпримера к гипотезе из [10] о не существовании деревьев с палиндромным полиномом Винера.

Литература

1. TRINAJSTIĆ N. Chemical graph theory. - Florida: CRC Press, Boca Raton. - 1983.

2. ЦВЕТКОВИЧ Д., ДУБ М., ЗАХС Х. Спектры графов. Теория и применение. - Киев: Наукова думка, 1984.

3. TRINAJSTIĆ N., KLEIN D.J., RANDIĆ M. On some solved and unsolved problems of chemical graph theory //Int. J. Quantum Chem. Quantum Chem. Symp. - 1986. - Vol. 20. -P. 699-742.

4. HOSOYA H. On some counting polynomials in chemistry // Discrete Appl. Math. - 1988. - Vol. 19. - P. 239-257.

5. BUCKLEY F. Equalites involving certain graphical distributions //Lect. Notes Math. - 1984. - Vol. 1073. - P.179-192.

6. KENNEDY J.W. Palindromic graphs //Graph Theory Notes of New York. - 1992. - The New York Academy of Sciences. - Vol. XXII. - P. 27-32.

7. FARRELL E.J., KENNEDY J.W., QUINTAS L.V., WAHID S.A. Graphs with palindromic matching and characteristic polynomials //International J. Graph Theory. - 1992. - Vol. 1. - P.61-78.

8. GUTMAN I. Independent vertex palindromic graphs //Graph Theory Notes of New York. - 1992. - The New York Academy of Sciences. - Vol. XXIII. - P. 21-24.

9. GUTMAN I. A contribution to the study of palindromic graphs //Graph Theory Notes of New York.-1993. - The New York Academy of Sciences. - Vol. XXIV. - P. 51-56.

10. GUTMAN I. Some properties of the Wiener polynomial // Graph Theory Notes of New York - 1993. - The New York Academy of Sciences. - Vol. XXV. - P. 13-17.

11. Recent results in the theory of graph spectra /Cvetković D., Doob M., Gutman I., Torgasev A. - North-Holland,1988.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 июля 1994 года

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Графы с diam(G) = 3. Первыми указаны значения параметров n, m,k,A и P, далее даны коэффициенты полиномов H(F) и H(G).

2	4	0	3	7	(8	7	13	8)	(8	10	10	8)
2	6	2	14	17	(12	13	41	12)	(12	27	27	12)
2	8	4	33	35	(16	19	85	16)	(16	52	52	16)
2	10	6	60	61	(20	25	145	20)	(20	85	85	20)
2	12	8	95	95	(24	31	221	24)	(24	126	126	24)
3	16	27	466	474	(48	74	1006	48)	(48	540	540	48)
3	17	29	533	545	(51	79	1145	51)	(51	612	612	51)
3	20	35	761	788	(60	94	1616	60)	(60	855	855	60)
4	8	18	183	187	(32	49	415	32)	(32	232	232	32)
4	9	21	241	252	(36	56	538	36)	(36	297	297	36)
4	10	24	307	327	(40	63	677	40)	(40	370	370	40)
4	11	27	381	412	(44	70	832	44)	(44	451	451	44)
4	12	30	463	507	(48	77	1003	48)	(48	540	540	48)
4	13	33	553	612	(52	84	1190	52)	(52	637	637	52)
4	14	36	651	727	(56	91	1393	56)	(56	742	742	56)
4	15	39	757	852	(60	98	1612	60)	(60	855	855	60)
4	16	42	871	987	(64	105	1847	64)	(64	976	976	64)
4	17	45	993	1132	(68	112	2098	68)	(68	1105	1105	68)
4	18	48	1123	1287	(72	119	2365	72)	(72	1242	1242	72)
4	19	51	1261	1452	(76	126	2648	76)	(76	1387	1387	76)
4	20	54	1407	1627	(80	133	2947	80)	(80	1540	1540	80)
5	7	21	225	241	(35	55	505	35)	(35	280	280	35)
5	8	25	306	338	(40	64	676	40)	(40	370	370	40)
5	11	37	624	731	(55	91	1339	55)	(55	715	715	55)
5	12	41	755	896	(60	100	1610	60)	(60	855	855	60)
5	15	53	1223	1493	(75	127	2573	75)	(75	1350	1350	75)
5	16	57	1404	1726	(80	136	2944	80)	(80	1540	1540	80)
5	19	69	2022	2527	(95	163	4207	95)	(95	2185	2185	95)
5	20	73	2253	2828	(100	172	4678	100)	(100	2425	2425	100)
6	6	22	240	261	(36	57	537	36)	(36	297	297	36)
6	8	32	461	539	(48	79	1001	48)	(48	540	540	48)
6	10	42	754	921	(60	101	1609	60)	(60	855	855	60)
6	12	52	1119	1407	(72	123	2361	72)	(72	1242	1242	72)
6	14	62	1556	1997	(84	145	3257	84)	(84	1701	1701	84)
6	16	72	2065	2691	(96	167	4297	96)	(96	2232	2232	96)
6	18	82	2646	3489	(108	189	5481	108)	(108	2835	2835	108)

Графы с diam(G) = 4 и двумя диаметральными метелками. В нечетной строке указаны значения n,m,k,A и P, в чет - ной строке даны коэффициенты полиномов H(F) и H(G).

2 6	1	5	16						
(12	11	27	16	12)	(12	16	22	16	12)
2 7	2	14	23						
(14	13	37	27	14)	(14	27	23	27	14)
2 8	3	25	32						
(16	15	49	40	16)	(16	40	24	40	16)
2 9	4	38	43						
(18	17	63	55	18)	(18	55	25	55	18)
2 10	5	53	56						
(20	19	79	72	20)	(20	72	26	72	20)
2 11	6	70	71						
(22	21	97	91	22)	(22	91	27	91	22)
3 4	2	10	10						
(12	11	22	21	12)	(12	21	12	21	12)
3 19	32	670	670						
(57	56	757	726	57)	(57	726	87	726	57)
3 20	34	746	754						
(60	59	846	805	60)	(60	805	100	805	60)
4 10	23	297	304						
(40	39	365	336	40)	(40	336	68	336	40)
4 11	26	362	386						
(44	43	454	405	44)	(44	405	92	405	44)
4 12	29	433	478						
(48	47	553	480	48)	(48	480	120	480	48)
4 13	32	510	580						
(52	51	662	561	52)	(52	561	152	561	52)
4 14	35	593	692						
(56	55	781	648	56)	(56	648	188	648	56)
4 15	38	682	814						
(60	59	910	741	60)	(60	741	228	741	60)
4 16	41	777	946						
(64	63	1049	840	64)	(64	840	272	840	64)
4 17	44	878	1088						
(68	67	1198	945	68)	(68	945	320	945	68)
4 18	47	985	1240						
(72	71	1357	1056	72)	(72	1056	372	1056	72)

Графы с diam(G) = 4 и тремя диаметральными метелками. В нечетной строке указаны значения n,m,r,k,A и P, в четной строке даны коэффициенты полиномов H(F) и H(G).

2 2 9 23 286 291

(40 39 376 325 40) (40 325 90 325 40)

2 2 10 26 349 372

(44 43 467 392 44) (44 392 118 392 44)

2 3 6 21 218 229

(36 35 306 253 36) (36 253 88 253 36)

2 3 7 25 284 325

(41 40 415 324 41) (41 324 131 324 41)

2 3 8 29 358 438

(46 45 541 403 46) (46 403 183 403 46)

2 3 9 33 440 568

(51 50 684 490 51) (51 490 244 490 51)

2 3 10 37 530 715

(56 55 844 585 56) (56 585 314 585 56)

2 4 5 23 238 270

(38 37 353 275 38) (38 275 115 275 38)

2 4 6 28 317 400

(44 43 499 360 44) (44 360 182 360 44)

2 4 7 33 406 556

(50 49 671 455 50) (50 455 265 455 50)

2 4 8 38 505 738

(56 55 869 560 56) (56 560 364 560 56)

2 4 9 43 614 946

(62 61 1093 675 62) (62 675 479 675 62)

2 4 10 48 733 1180

(68 67 1343 800 68) (68 800 610 800 68)

2 5 5 29 328 427

(45 44 529 372 45) (45 372 201 372 45)

2 5 6 35 430 621

(52 51 742 481 52) (52 481 312 481 52)

2 5 7 41 544 852

(59 58 992 602 59) (59 602 448 602 59)

. . . .

3 3 4 19 178 183

(33 32 253 210 33) (33 210 75 210 33)

3 3 5 24 248 292

(39 38 378 286 39) (39 286 130 286 39)

Графы с diam(G) = 5. В нечетной строке указаны значения параметров n,m,r,s, Δ_1 и Δ_2, в четной строке даны коэффициенты полиномов H(F) и H(G).

```
3  8  1  8    7  13
  (24 23  90  96  43 24)  (24  43  83  83  43 24)
3  8  2  7    6  19
  (24 23  84  97  48 24)  (24  48  78  78  48 24)
3  8  3  6    7  23
  (24 23  80  96  53 24)  (24  53  73  73  53 24)
3  8  4  5   10  25
  (24 23  78  93  58 24)  (24  58  68  68  58 24)
3  9  1 10    9  16
  (27 26 120 127  51 27)  (27  51 111 111  51 27)
3  9  2  9    7  24
  (27 26 112 129  57 27)  (27  57 105 105  57 27)
3  9  3  8    7  30
  (27 26 106 129  63 27)  (27  63  99  99  63 27)
3  9  4  7    9  34
  (27 26 102 127  69 27)  (27  69  93  93  69 27)
3  9  5  6   13  36
  (27 26 100 123  75 27)  (27  75  87  87  75 27)
3 12  2 15   13  36
  (36 35 226 249  84 36)  (36  84 213 213  84 36)
3 12  3 14   10  48
  (36 35 214 252  93 36)  (36  93 204 204  93 36)
3 12  4 13    9  58
  (36 35 204 253 102 36)  (36 102 195 195 102 36)
3 12  5 12   10  66
  (36 35 196 252 111 36)  (36 111 186 186 111 36)
3 12  6 11   13  72
  (36 35 190 249 120 36)  (36 120 177 177 120 36)
3 12  7 10   18  76
  (36 35 186 244 129 36)  (36 129 168 168 129 36)
3 12  8  9   25  78
  (36 35 184 237 138 36)  (36 138 159 159 138 36)
        . . . . . . . . . . . . . . . .
4  4  2  2    4   5
  (16 15  32  33  24 16)  (16  24  28  28  24 16)
4  5  2  5    6  14
  (20 19  52  60  39 20)  (20  39  46  46  39 20)
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Графы с diam(G) = 6. В нечетной строке указаны значения параметров n,m,r,s,k, Δ_1 и Δ_2, в четной строке даны коэффициенты полиномов H(F) и H(G).

3 8 1 2 5 0 2
(24 23 72 60 72 25 24) (24 25 72 58 72 25 24)
3 9 1 3 6 0 4
(27 26 92 84 92 30 27) (27 30 92 80 92 30 27)
3 9 2 2 6 1 8
(27 26 91 78 93 36 27) (27 36 92 68 92 36 27)
4 6 2 3 4 0 11
(24 23 62 71 62 34 24) (24 34 62 60 62 34 24)
4 7 3 4 5 1 19
(28 27 84 105 86 48 28) (28 48 85 84 85 48 28)
4 8 1 6 8 0 13
(32 31 122 145 122 44 32) (32 44 122 132 122 44 32)
4 8 3 6 6 0 29
(32 31 112 149 112 60 32) (32 60 112 120 112 60 32)
4 9 1 6 11 3 5
(36 35 164 179 170 46 36) (36 46 167 168 167 46 36)
4 9 2 7 9 1 22
(36 35 152 194 154 59 36) (36 59 153 170 153 59 36)
4 9 4 7 7 1 40
(36 35 142 196 144 77 36) (36 77 143 154 143 77 36)
5 6 2 6 6 0 24
(30 29 98 127 98 53 30) (30 53 98 103 98 53 30)
5 7 1 7 10 0 20
(35 34 148 176 148 54 35) (35 54 148 156 148 54 35)
5 7 2 7 9 2 23
(35 34 140 181 144 61 35) (35 61 142 154 142 61 35)
5 7 6 7 5 0 55
(35 34 128 181 128 89 35) (35 89 128 126 128 89 35)
5 8 1 6 15 2 8
(40 39 218 210 222 51 40) (40 51 220 198 220 51 40)
5 8 4 9 9 2 47
(40 39 176 255 180 90 40) (40 90 178 204 178 90 40)
6 6 3 8 8 1 41
(36 35 142 195 144 78 36) (36 78 143 152 143 78 36)
6 6 5 8 6 1 53
(36 35 136 195 138 90 36) (36 90 137 140 137 90 36)