ПРИКЛАДНЫЕ СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА
(Вычислительные системы)
1995 год

УДК 519.95:681.3.06

АЛГОРИТМ WANGA-CUB

Н.Г.Загоруйко

Излагается алгоритм из семейства WANGA [1], предназначенный для определения значения $f(Q)$ характеристики f в произвольной точке Q трехмерного параллелепипеда, если f задана в его вершинах.

Задача 1. Представим себе трехмерное пространство, вдоль координатных осей которого откладываются значения трех характеристик - X,Y,Z соответственно. Точки, соответствующие минимальным (x_1,y_1,z_1) и максимальным (x_2,y_2,z_2) значениям этих характеристик, образуют вершины параллелепипеда с координатами (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_1,z_1), (x_1,y_2,z_1), (x_2,y_2,z_1), (x_1,y_1,z_2), (x_1,y_2,z_2), (x_2,y_2,z_2). Пусть в этих точках заданы значения некоторой характеристики f и задача состоит в определении ее значения $f(Q)$ в любой внутренней точке Q с координатами (xq, yq, zq). Метод решения этой задачи (алгоритм WANGA-CUB) и предположения, которые потребуются для ее решения, будем излагать, начиная с простейшего одномерного случая.

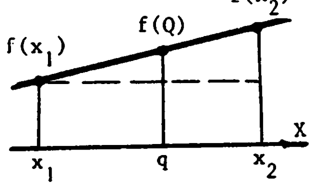

Рис.1

Пусть значение поля $f(x)$, изменяющего свою величину вдоль оси X, известно нам только в двух точках x_1 и x_2 и равно в этих точках $f(x_1)$ и $f(x_2)$ соответственно. Если закон изменения поля нам неизвестен, то самым простым предположением при прогнозировании поля в точке q, находящейся между точками x_1 и x_2, будет предположение о линейном изменении поля вдоль оси X (см.рис.1).

Из этого предположения следует, что $\{f(Q) - f(x_1)\}:\{f(x_2) - f(x_1)\} = (q-x_1):(x_2-x_1)$, откуда находим, что

$$f(Q) = f(x_1) + \{f(x_2) - f(x_1)\}*(q-x_1):(x_2-x_1). \qquad (1)$$

Если сдвинуть начало координат в точку x_1 и ввести обозначения $f(x_1) = f_1$ и $f(x_2) = f_2$, то уравнение (1) можно переписать так:

$$f(Q) = f_1 + (f_2 - f_1)*q:x_2. \qquad (2)$$

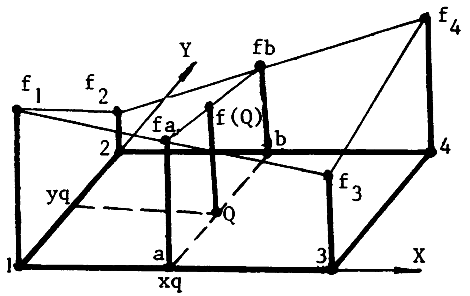

Рис. 2

Теперь представим себе, что поле меняет свою величину на плоскости XY как вдоль оси X, так и оси Y, и нам известны его значения в в четырех вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, т.е. в точках: $1(x_1, y_1)$, $2(x_1, y_2)$, $3(x_2, y_1)$, и $4(x_2, y_2)$. При отсутствии информации о законах изменения поля снова будем использовать самую простую линейную гипотезу: будем считать, что поле меняется линейно вдоль любой линии, параллельной одной из координат. Для сокращения записи формул будем считать, что вершина $1(x_1, y_1)$ совмещена с началом координат (см.рис.2), а значения поля в вершинах равны f1, f2, f3 и f4 соответственно.

Исходя из этого, значение поля в точке Q с координатами (xq, yq) можно определить следующим образом: нужно найти поле f(a) в точке "a" с координатами x = xq, y = y_1 и поле f(b) в точке "b" с координатами x = xq, y = y_2 по формулам, аналогичным приведенным выше:

$$f(a) = f_1 + (f_3-f_1)*xq:x_2, \quad f(b) = f_2 + (f_4-f_2)*xq:x_2.$$

Затем, рассматривая поле вдоль прямой, параллельной оси Y и соединяющей точки "a" и "b", можно найти его значение в точке Q:

$$f(Q) = f(a) + \{(f(b) - f(a)\}*yq:y_2. \tag{3}$$

Заметим, что этот результат не зависит от пути, по которому мы подходим к точке Q: тот же результат будет получен, если точки "a" и "b" будут заданы на прямой, проходящей через точку Q параллельно не оси Y, а оси X. В этом случае они будут иметь координаты $a(x_1, yq)$ и $b(x_2, yq)$, а значение функции в точке Q будет определяться равенством

$$f(Q) = f(a) + \{f(b)-f(a)\}*xq:x_2. \tag{4}$$

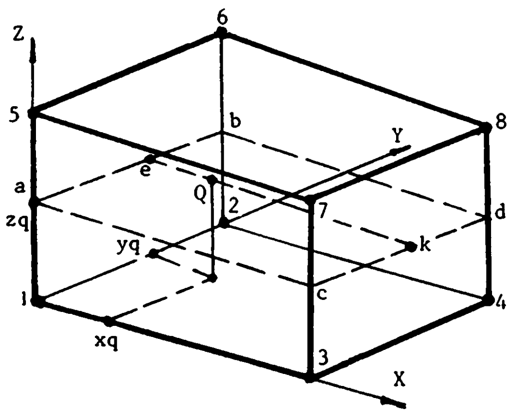

Рис. 3

Теперь представим себе трехмерное поле, меняющееся по неизвестному закону вдоль трех осей координат - X,Y и Z. Будем снова предполагать, что вдоль каждой координаты поле меняется по линейному закону. Теперь можно найти поле

$f(Q)$ в любой внутренней точке $Q(xq, yq, zq)$ параллелепипеда со сторонами, параллельными координатным плоскостям, если известны значения поля в его вершинах. Для этого сначала нужно найти поле в вершинах прямоугольника a,b,c,d, которые находятся на ребрах параллелепипеда и лежат в одной плоскости, перпендикулярной, например, оси Z, и пересекают ее в точке zq. Пронумеруем вершины параллелепипеда так,как указано на рис.3, сдвинем вершину 1 в начало координат и обозначим величины поля в вершинах через $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ и f_8 соответственно.

Поле в вершинах прямоугольника находим по знакомым формулам:

$$f(a) = f_1 + (f_5-f_1)*zq:z_2,$$
$$f(b) = f_2 + (f_6-f_2)*zq:z_2,$$
$$f(c) = f_3 + (f_7-f_3)*zq:z_2,$$
$$f(d) = f_4 + (f_8-f_4)*zq:z_2.$$

На плоскости с точками a,b,c,d построим прямую,проходящую через точку Q параллельно оси X. Эта прямая пересечет стороны прямоугольника [a, b, c, d] в точках $e(x_1, yq, zq)$ и $k(x_2, yq, zq)$. Найдем значения поля в этих двух точках:

$$f(e) = f(a) + \{f(c)-f(a)\}*yq:y_2,$$
$$f(k) = f(b) + \{f(d)-f(b)\}*yq:y_2.$$

Теперь мы можем найти значение поля в точке $Q(xq,yq,zq)$:

$$f(Q) = f(e) + \{f(k)-f(e)\}*xq:x_2.. \qquad (5)$$

Можно переписать это уравнение в терминах значений поля f в вершинах параллелепипеда:

$$f(Q) = f(a) + \{f(c)-f(a)\}*yq:y_2 + [f(b) +$$
$$+ \{f(d)-f(b)\}*yq:y_2 - f(a) - \{f(c)-f(a)\}*yq:y_2]*xq:x_2 =$$
$$= f_1+(f_5-f_1)*zq:z_2+\{f_3+(f_7-f_3)*zq:z_2-f_1-(f_5-f_1)*zq:z_2\}*yq:y_2 +$$
$$+ [f_2+(f_6-f_2)*zq:z_2+\{f_4+(f_8-f_4)*zq:z_2-f_2-(f_6-f_2)*zq:z_2\}*yq:y_2-$$
$$- f_1-(f_5-f_1)*zq:z_2-\{f_3+(f_7-f_3)*zq:z_2-f_1 -$$
$$- (f_5-f_1)*zq:z_2\}*yq:y_2]*xq:x_2.$$

При обозначениях $(zq:z_2) = Z$, $(xq:x_2) = X$, $(yq:y_2) = Y$ получаем:

$$\begin{aligned} f(Q) = {} & f_1(1-X-Y-Z+XY+XZ+YZ+XYZ) + f_2(X-XY-XZ+XYZ) + \\ & + f_3(Y-YX-YZ+XYZ) + f_5(Z-ZX-ZY+XYZ) + f_4(XY-XYZ) + \\ & + f_6(XZ-XYZ) + f_7(YZ-XYZ) + f_8(XYZ). \end{aligned} \tag{6}$$

Снова заметим, что результат не зависит от маршрута движения к точке Q: плоскость a,b,c,d можно провести перпендикулярно любой координатной оси, а линию e,k - параллельно любой из двух других координат.

Задача 2. Сформулируем еще одну задачу. Пусть поле изменяется вдоль координат по линейному закону и величина поля известна во всех вершинах параллелепипеда, кроме одной. Требуется найти значение поля в этой вершине. Очевидно, что для одномерного случая эта задача не имеет единственного решения. Как видно из рис.2, нет его и для двумерного случая: точки f(a), f(b), f(c) и f(d) в пространстве XYF могут и не лежать в одной плоскости и потому по трем точкам предсказать четвертую даже при условии линейного изменения поля вдоль каждой координаты нельзя. Требуется сделать еще одно предположение: поле меняется линейно вдоль любого направления на плоскости XY. Тогда все точки, отображающие поле f, образуют плоскость, которую можно однозначно задать по любым трем точкам, не лежащим на одной прямой. А зная эту плоскость, можно определить значение поля в любой другой точке, в том числе и в любой вершине прямоугольника. Для этого случая справедливо, что $f(a) - f(c) = f(b) - f(d)$, откуда

$$f(a) = f(c) + f(b) - f(d), \tag{7}$$

что соответствует правилу: поле в любой вершине прямоугольника равно сумме полей в смежных вершинах минус поле в противоположной вершине.

Теперь обратимся к трехмерному случаю: поле f известно в каждой из 7 вершин параллелепипеда (2,3,4,5,6,7,8) (см.рис.3) и неизвестно в 8-й вершине "1". Требуется найти значение f_1.

Вершина "1" лежит в точке пересечения трех смежных граней: (1234), (1256) и (1357). Для каждой из этих граней мы можем найти свой вариант прогнозного значения величины f_1:

$$f_{11} = f_2 + f_3 - f_4,$$
$$f_{12} = f_2 + f_5 - f_6, \tag{8}$$
$$f_{13} = f_3 + f_5 - f_7.$$

Каждый вариант отражает влияние характера изменения поля вдоль той или иной координаты. Естественно предположить, что эти изменения в равной степени влияют на величину поля в точке "1" и общий прогноз f_1 будет представлять собой среднеарифметическую величину трех частных прогнозов:

$$f_1 = \frac{(f_{11} + f_{12} + f_{13})}{3}. \tag{9}$$

Если просуммировать левые и правые части уравнений (8), то получим: $f_{11} + f_{12} + f_{13} = 2f_2 + 2f_3 + 2f_5 - f_4 - f_6 - f_7$ или, имея в виду равенство (9),

$$f(a) = \frac{[2\{f(c)+f(b)+f(e)\} - \{f(d)+f(k)+f(n)\}]}{3}, \tag{10}$$

что соответствует следующему правилу: поле в любой вершине параллелепипеда равно одной трети от разности между удвоенной суммой полей в смежных вершинах и суммой полей в противоположных вершинах смежных граней.

В той конкретной прикладной задаче, для которой был разработан описанный выше алгоритм WANGA-CUB, рассматривается 8 объектов, описываемых семью характеристиками. Три из этих характеристик X_1, X_2 и X_3 являются первичными и их минимальные и максимальные значения формируют 8 вершин параллелепипеда а остальные характеристики (X_4, X_5, X_6 и X_7) являются вторичными и определяются по значениям первичных с помощью некоторого алгоритма А, отличающегося очень высокой сложностью.

В конкретном примере значения вторичных характеристик для всех вершин были вычислены по алгоритму А. Требовалось проверить, с какой точностью алгоритм WANGA-CUB по известным значениям одной из вторичных характеристик в семи вершинах может определять значение этой характеристики в восьмой вершине. В экспериментах вершины с неизвестными характеристиками поочередно меняли свои места, так что здесь требовалось сделать 32 предсказания. Кроме того, с помощью алгоритма А были определены значения вторичных характеристик в 8 точках, расположенных на гранях и внутри параллелепипеда, и требовалось предсказать эти значения с помощью алгоритма WANGA-CUB. Следовательно, всего требовалось предсказать 4 характеристики в 16 точках т.е. 64 значения вторичных функций.

Эксперимент показал, что модули средних значений ошибок предсказания оказались равными: $\Delta(X_4) = 7{,}45\%$, $\Delta(X_5) = 7{,}43\%$, $\Delta(X_6) = 7{,}00\%$, $\Delta(X_7) = 6{,}88\%$ и $\Delta_{ср} = 7{,}19\%$.

Если такая ошибка, полученная на обучающем материале, оказывается приемлемой (как это было в рассматриваемом случае), то для дальнейшего определения значений вторичных характеристик в любой точке параллелепипеда можно вместо сложного алгоритма А пользоваться описанным выше простым и быстрым алгоритмом WANGA-CUB.

Литература

1. ЗАГОРУЙКО Н.Г. Эмпирическое предсказание. - Новосибирск: Наука, 1979. - 180 с.

Поступила в редакцию
9 февраля 1995 г.