

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
ДИЭДРАЛЬНЫХ $\theta(p/q)$ -ОРБИФОЛДОВ^{*)}

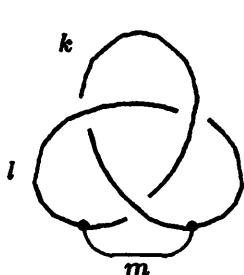
А.Веснин, М.Хагельберг

В в е д е н и е

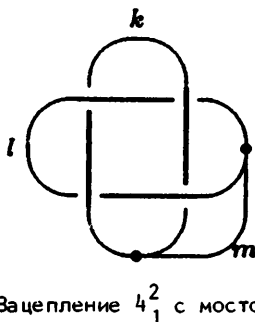
Настоящая работа посвящена изучению орбифолдов, носителем которых является трехмерная сфера, а сингулярное множество может быть представлено как узел или двухкомпонентное зацепление с мостом. Примером такого рода является, в частности, изученный в [10] орбифолд, сингулярным множеством которого является изображенный на рис.1 узел трилистник с мостом (дуга, имеющая индекс m). В [10] для всех целых положительных индексов k, l и m были описаны возникающие на соответствующем орбифолде геометрические структуры. Вторым примером, изображенным на рис.1, является двухкомпонентное зацепление, обозначаемое обычно 4_1^2 , компоненты которого также соединены мостом. Гиперболичность орбифолдов с таким сингулярным множеством изучалась в [9].

Следуя [19], под трехмерным гиперболическим орбифолдом мы понимаем фактор-пространство \mathbb{H}^3/Γ , где Γ - дискретная группа изометрий пространства Лобачев-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-01410).



Трилистник с мостом



Зацепление 4_1^2 с мостом

Рис. 1

ского \mathbb{H}^3 , называемого также гиперболическим пространством. Если при этом элементы группы Γ не имеют неподвижных точек в \mathbb{H}^3 , то \mathbb{H}^3/Γ является гиперболическим многообразием. В [10] и [9] при доказательстве гиперболичности рассматриваемых орбифолдов соответствующие фундаментальные группы орбифолдов были реализованы как группы изометрий пространства \mathbb{H}^3 и построены их фундаментальные многогранники.

Целью настоящей работы является обобщить эти примеры и построить бесконечное семейство гиперболических орбифолдов, сингулярными множествами которых являются узлы с мостом. При этом гиперболичность будет следовать из теоремы Терстона о гиперболической хирургии Дэна и теоремы жесткости.

Также будут приведены группы, униформизирующие рассматриваемые орбифолды и показано, что они являются обобщенно-треугольными группами в смысле [2].

1. Заузленные θ -графы

Напомним, что все конечные подгруппы группы $SO(3)$ исчерпываются циклическими, диэдральными и группами симметрий тетраэдра, октаэдра и икосаэдра [21].

Таким образом, если носителем орбифолда является трехмерная сфера, а сингулярное множество в качестве своей связной компоненты содержит некоторый (возможно, заузленный) граф (возможно с петлями и кратными ребрами), то степень каждой вершины такого графа равна трем. Графы (в том числе несвязные и мультиграфы), степень каждой вершины которых равна трем, мы будем называть *кубическими графами*. Отметим, что заузленные вложения кубических графов, даже простых с точки зрения теории графов, могут быть устроены достаточно сложно.

Очевидно, существуют лишь два кубических графа (которые приведены на рис.2), имеющих ровно две вершины.



θ -граф



"Пенсне"-граф

рис. 2

Эти графы мы будем далее называть θ -графом (*тэтта-графом*) и "пенсне"-графом (это название пред-

ставляется нам более привлекательным, чем название "наручники"-граф, используемое в [20]). Отметим, что сингулярные множества орбифолдов, изображенные на рис.1, как графы, изоморфны θ -графу и "пенсне"-графу соответственно.

Заузленные вложения θ -графа и "пенсне"-графа в трехмерную сферу, называемые в дальнейшем θ -кривая и "пенсне"-кривая соответственно изучались в [20]. Отметим, что каждая кривая состоит из трех дуг, удаление любой из которых приводит к заузленной окружности т.е. к узлу. Таким образом, с каждой θ -кривой естественным образом связаны три узла, которые будем называть

ассоциированными узлами θ -кривой. Очевидно, что две θ -кривые, имеющие разные наборы ассоциированных узлов, топологически различны. Однако, наборы ассоциированных узлов не описывают θ -кривую полностью. Это видно, в частности, из известного примера Киношита, построившего непланарную θ -кривую, все ассоциированные узлы которой, тем не менее, являются тривиальными узлами, а также из ряда других примеров, приведенных в [20].

По аналогии с узлами и зацеплениями, можно говорить о проекции заузленного графа на плоскость. В частности, θ -кривые, обладающие проекциями с малым числом точек самопересечения, табулированы в [18].

Продолжая аналогии с теорией узлов, определим семейство θ -кривых, связанных с рациональным танглом. Следуя [4] и [13], каждому рациональному числу p/q можно поставить в соответствие рациональный p/q -тангл, строящийся по разложению числа p/q в цепную дробь. При этом на каждом шаге построения целому числу i соответствуют i полуоборотов в направлении, определяемом знаком числа i . Переходу к знаменателю дроби соответствует поворот диаграммы на угол 90° по часовой стрелке с последующей заменой в двойных точках проходов "под" на проходы "над" и наоборот. Сложению дроби с целым числом i соответствует добавление к соответствующему танглу i полуоборотов. В качестве примера на рис. 3 приведен процесс построения рационального p/q -тангла для случая $p/q = 17/7 = 2 + 1/(2 + 1/3)$.

Напомним [3], что *двухмостовой узел* $K(p/q)$ возникает при замыкании дуг p/q -тангла (рис. 4), т.е. при соединении концов дуг, помеченных a, c и b, d соответственно. В частности, как нетрудно убедиться непосред-

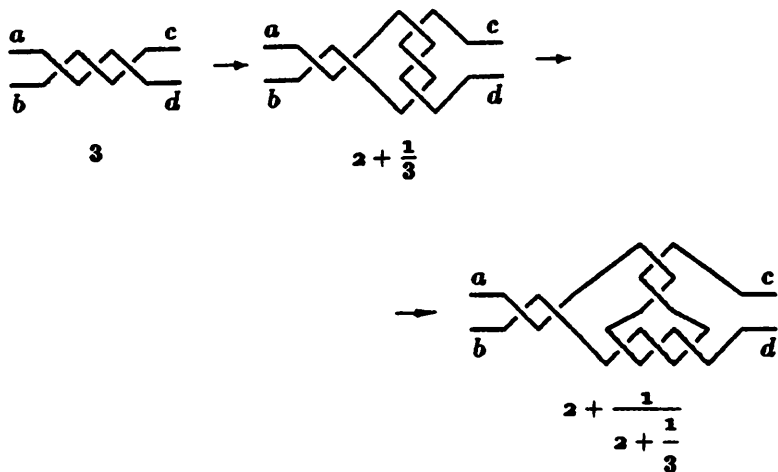
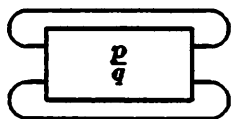


Рис. 3

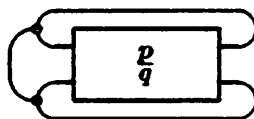
ственно, двухмостовой узел $K(17/7)$ совпадает с узлом 7_5 в обозначениях из [17].

По аналогии с двухмостовыми узлами определим *двухмостовую* $\theta(p/q)$ -кривую как результат замыкания p/q -тангла и соединения перешейком дуг в его внешности (рис. 4).

Заметим, что если на выходе из p/q -тангла дуга a перешла в c (и следовательно, b в d), то $\theta(p/q)$ -кри-



Узел $K(p/q)$



$\theta(p/q)$ -кривая

Рис. 4

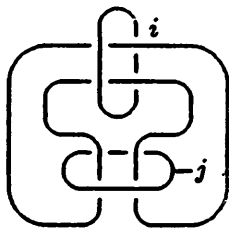
вая является "пенсне" кривой а если дуга а перешла в d (и следовательно, b в c) то получаем θ -кривую. В частности, приведенные на рис.1 трилистник с мостом и зацепление 4_1^2 с мостом являются $\theta(3/1)$ -кривой и $\theta(4/1)$ -кривой соответственно. Очевидно, ассоциированными узлами для $\theta(p/q)$ -кривой являются двухмостовой узел $K(p/q)$ и два тривиальных узла.

Далее орбифолды с носителем S^3 , сингулярным множеством которых служит $\theta(p/q)$ -кривая, мы будем называть $\theta(p/q)$ -орбифолдами.

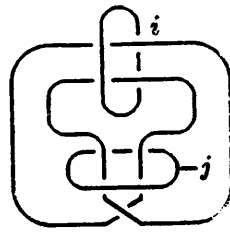
Перейдем к построению таких орбифолдов и изучению соответствующих геометрических структур.

2. Семейство двухмостовых гиперболических узлов

В этой части будет описано семейство двухмостовых узлов, почти все из которых являются гиперболическими, т.е. их дополнение в трехмерной сфере является гиперболическим многообразием.



Борромеевы кольца



Зацепление 8_9^3

Рис. 5

Рассмотрим два трехкомпонентных зацепления на рис.5. Первое из них (обозначим его B), носит название "борромееви кольца" и является одним из наиболее известных гиперболических зацеплений. В таблице узлов и зацеплений Рольфсена [17], обозначениям которой мы будем следовать и в дальнейшем, оно обозначается 6_2^3 . Второе зацепление на рис.5 - это зацепление 8_9^3 . Как отмечено в [1], зацепление 8_9^3 также является гиперболическим и, более того, объемы гиперболических многообразий $S^3 \setminus B$ и $S^3 \setminus 8_9^3$ совпадают.

Рассмотрим хирургии Дэна на компонентах зацеплений B и 8_9^3 . Согласно [17], после хирургий с параметрами $(1, i)$ и $(-1, j)$, где i и j - целые положительные, на двух из трех компонент зацепления B помеченных i и j соответственно, получим узел, который обозначим B_j^i (см. рис.6, где индексами $2i$ и $-2j$ обозначены соответствующие танглы).

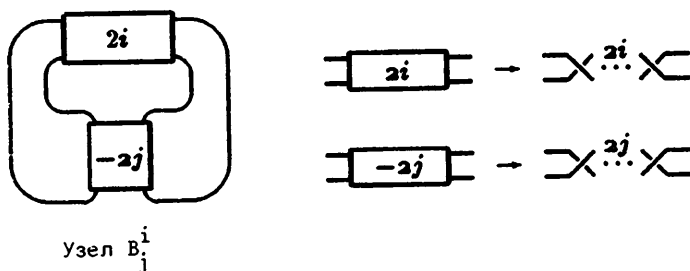


Рис. 6

Нетрудно видеть, что узлы B_j^i и B_i^j эквивалентны, являются альтернированными и имеют порядок $2i + 2j$. Представителями рассматриваемого семейства, имеющими порядок не более десяти, являются следующие узлы:

$V_1^1 = 4_1$, $V_2^1 = V_1^2 = 6_1$, $V_3^1 = V_1^3 = 8_1$, $V_4^1 = V_1^4 = 10_1$, $V_2^2 = 8_3$ и $V_2^3 = V_3^2 = 10_3$. В соответствии с операциями над танглами [4] и определением двухмостового узла, узлы V_j^i являются двухмостовыми и получены замыканием рационального $2i+1/(2j)$ -тангла. В принятых для двухмостовых узлов обозначениях это означает, что $V_j^i = K(p/q)$, где $p = 4ij+1$ и $q = 2j$.

Поскольку зацепление "борромеевы кольца" является гиперболическим [19], то полученные из него хирургией Дэна узлы семейства V_j^i также почти все являются гиперболическими. Более того, все они гиперболические при $i+j \leq 5$, где $i \geq 1$ и $j \geq 1$ [22]. Отметим, что хирургия Дэна с параметрами (1,1) на одной из компонент "борромеевых колец" приводит к известному двухкомпонентному зацеплению Уайтхеда (обозначаемому 5_2^2). Некомпактные многообразия, связанные с хирургиями Дэна на одной из компонент зацепления Уайтхеда изучались в [11]. В частности, таковыми являются дополнения к зацеплениям подсемейства V_1^i , являющиеся гиперболическими для $i \geq 1$ [16].

Все проведенные выше рассуждения можно повторить и для трехкомпонентного гиперболического зацепления 8_9^3 (рис.5).

Применяя хирургии Дэна с параметрами $(1, i)$ и $(-1, j)$, где $i \geq 1$, $j \geq 0$ - целые, на двух компонентах зацепления 8_9^3 , мы, как и выше, получим некоторое семейство узлов. Обозначим эти узлы U_j^i по аналогии с узлами V_j^i . Узлы U_j^i также являются альтернированными и имеют порядок $2i+2j+1$. Представителями этого семейства, имеющими порядок не более десяти, являются следующие узлы: $U_0^1 = 3_1$, $U_0^2 = 5_1$, $U_0^3 = 7_1$, $U_0^4 = 9_1$, $U_1^1 =$

$= 5_2, U_1^2 = 7_3, U_1^3 = 9_3, U_2^1 = 7_2, U_2^2 = 9_4, U_3^1 = 9_2$. Как нетрудно видеть, узел U_j^i совпадает с двухмостовым узлом $K(p/q)$, где $p = 2i(2j+1)+1$ и $q = 2j+1$.

Для дальнейших рассмотрений нам будет удобно объединить два построенных выше семейства узлов. А именно, положим

$$N_j^i = \begin{cases} V_{j/2}^i, & \text{если } j \text{ четно,} \\ U_{(j-1)/2}^i, & \text{если } j \text{ нечетно.} \end{cases}$$

По построению, каждый из узлов N_j^i является альтернированным узлом порядка $2i+j$ и совпадает с двухмостовым узлом $K(p/q)$, где $p = 2ij+1$ и $q = j$. Узлы семейства N_j^i , имеющие порядок не более десяти, приведены в следующей таблице:

$j \setminus i$	1	2	3	4
1	$K(3/1) = 3_1$	$K(5/1) = 5_1$	$K(7/1) = 7_1$	$K(9/1) = 9_1$
2	$K(5/2) = 4_1$	$K(9/2) = 6_1$	$K(13/2) = 8_1$	$K(17/2) = 10_1$
3	$K(7/3) = 5_2$	$K(13/3) = 7_3$	$K(19/3) = 9_3$	
4	$K(9/4) = 6_1$	$K(17/4) = 8_3$	$K(25/4) = 10_3$	
5	$K(11/5) = 7_2$	$K(21/5) = 9_4$		
6	$K(13/6) = 8_1$	$K(25/6) = 10_3$		
7	$K(15/7) = 9_2$			
8	$K(17/8) = 10_1$			

Нетрудно видеть, что узлы N_1^i являются торическими узлами, а все остальные узлы, приведенные в таблице, являются гиперболическими [1].

3. Диэдральные $\theta(p/q)$ -орбифорды

Напомним [13], что узел K в трехмерной сфере S^3 называется *строго обратимым*, если существует сохраняющая ориентацию инволюция h сферы S^3 такая, что $h(K) = K$ и ее ось $\text{Fix}(h)$ пересекает узел K в двух точках. При этом h будем называть *обращающей инволюцией*.

Орбифорд O , носителем которого является трехмерная сфера, а сингулярным множеством является строго обратимый узел K , также будем называть *строго обратимым*, а соответствующую инволюцию h орбифорда O *обращающей инволюцией орбифорда*.

Итак, пусть $O^n(K)$ - строго обратимый компактный орбифорд, сингулярное множество которого узел K имеет индекс ветвления n . Рассмотрим обращающую инволюцию h . Факторпространство $O^n(K)/h$ есть орбифорд, носителем которого является трехмерная сфера. Его сингулярное множество будет состоять из образа сингулярного множества $h(K)$ и образа оси инволюции $h(\text{Fix}(h))$. Так как ось инволюции h пересекла узел K в двух точках, сингулярное множество орбифорда $O^n(K)/h$ представляет собой вложение в трехмерную сферу графа, имеющего две вершины, соединенные тремя ребрами, т.е. θ -графа. Таким образом, сингулярное множество орбифорда $O^n(K)/h$ представляет собой θ -кривую. В соответствии с введенной выше терминологией, полученный таким образом орбифорд $O^n(K)/h$ является θ -орбифордом.

Отметим, что три дуги, образующие сингулярное множество орбифорда $O^n(K)/h$, будут иметь индексы ветвления 2, 2 и n . Следовательно, вершины сингулярного множества имеют диэдральный тип, т.е. соответствующий

щие им точечные группы являются группами диэдра порядка $2q$. Орбифолд, все вершины сингулярного множества которого имеют диэдральный тип, будем называть *диэдральным орбифолдом*.

Обратимся к построенному в предыдущей части семейству узлов. Хорошо известно, что двухмостовой узел $K(p/q)$, отличный от торического узла, обладает в точности двумя обращающимися инволюциями. Для интересующих нас узлов N_j^i рассмотрим обращающую инволюцию τ в соответствии с рис. 7.

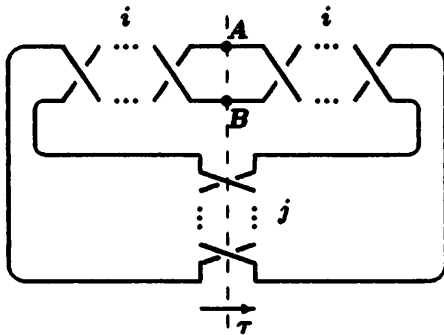


Рис. 7

Как было отмечено выше, почти все узлы N_j^i являются гиперболическими, т.е. на многообразии $S^3 \setminus N_j^i$ можно ввести гиперболическую структуру. В этом случае, по теореме же-

сткости, инволюция τ является изометрией гиперболического многообразия $S^3 \setminus N_j^i$.

В свою очередь, орбифолд $O^n(N_j^i)$ с носителем S^3 и сингулярным множеством - узлом N_j^i с индексом ветвления n , может быть описан как результат обобщенной $(n,0)$ -хирургии Дэна на узле N_j^i . В случае, когда исходный узел N_j^i является гиперболическим, по теореме Терстона о гиперболической хирургии Дэна, для почти

всех n орбифолд $O^n(N_j^i)$ является гиперболическим. Для малых значений параметров i, j и k в этом можно убедиться непосредственно, используя пакет программ SnapPea [22]. Например, орбифолды $O^n(N_1^1)$ являются гиперболическими для $n \geq 4$, а орбифолды $O^n(N_j^i)$, где $j \geq 2$, соответствующие узлам порядка не более десяти из приведенной выше таблицы, являются гиперболическими для $n \geq 3$.

Согласно изложенной выше схеме построения диэдральных θ -орбифолдов, обращающая инволюция τ узла N_j^i индуцирует обращающую инволюцию орбифолда $O^n(N_j^i)$, которую также будем обозначать τ . Тогда фактор-пространство $O^n(N_j^i)/\tau$ является диэдральным θ -орбифолдом и его сингулярное множество изображено на рис.8.

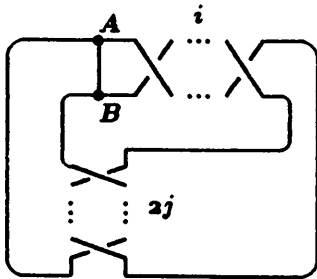


Рис. 8

Как нетрудно видеть из рис.8, сингулярное множество орбифолда $O^n(N_j^i)/\tau$ может быть представлено как двухместовая $\theta(p/q)$ -кривая, где $p/q = i+1/(2j)$. Кроме того, полученный орбифолд $O^n(N_j^i)/\tau$ является диэдральным. В

соответствии с принятой выше терминологией, мы получили двухместовой θ -орбифолд, вершинам которого соответствуют группы диэдра порядка $2n$. Следовательно, $O^n(N_j^i)/\tau = \theta^n(i+1/(2j))$. Таким образом, имеет место двойственность в приведенной выше таблице узлов N_j^i . А именно, после факторизации орбифолда с сингулярностью N_j^i по инволюции τ , получаем орбифолд, сингу-

лярным множеством которого является узел N_i^j (т.е. симметричный исходному относительно диагонали таблицы) с мостом.

Напомним, что по построению, $N_j^i = K(p/q)$ - двухмостовой узел, где $p/q = 2i+1/j$. В этом случае имеем: $O^n(K(p/q))/\tau = \theta^n(p/(2q))$.

Так как все рассматривавшиеся нами узлы и орбиолды строятся на основе гиперболических зацеплений 6_2^3 и 8_9^3 , в силу теоремы жесткости и теоремы Терстона о гиперболической хирургии Дэна [7], получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для почти всех $i \geq 1$, $j \geq 2$, $n \geq 3$ двухмостовые диэдральные орбиолды $\theta^n(i+1/(2j))$ являются гиперболическими.*

Отметим, что как следует, например, из рассмотрений фундаментальных групп, которые будут проведены ниже, орбиолды $\theta^n(i+1/(2j))$ при $n = 2$ гиперболическими быть не могут.

Также интересно отметить, что хотя при $j = 1$ узлы $K(m)$, где $m = 2i+1$, являются торическими и следовательно дополнения к ним в S^3 не могут быть снабжены гиперболической структурой, тем не менее, двухмостовые диэдральные орбиолды $\theta^n(m)$ при $m = 2i+1$, $i \geq 2$, являются гиперболическими для почти всех n .

4. Обобщенно-треугольные группы

Перейдем к группам, униформизирующим построенные выше θ -орбиолды. В частности, покажем, что эти группы являются обобщенно-треугольными группами в смысле [2], т.е. имеют представление

$$G = \langle a, b \mid a^k = b^l = (w(a, b))^m = 1 \rangle,$$

где $w(a, b)$ - некоторое слово в свободной группе, порожденной a и b , k, l и m - положительные целые числа. Обычные треугольные группы возникают здесь в случае, когда $w(a, b) = ab$.

Для нахождения фундаментальной группы орбигольда воспользуемся алгоритмом Виртингера [5]:

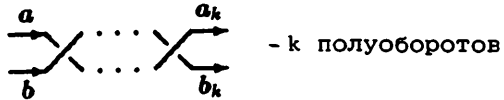


Рис. 9

Нетрудно видеть, что если a и b - элементы группы орбигольда, соответствующие петлям "до" $(-k, l)$ -тангла ($k > 0$), а a_k и b_k - элементы группы, соответствующие петлям "после" прохождения $(-k, l)$ -тангла (см. рис.9), то, согласно алгоритму Виртингера, имеют место рекуррентные формулы: $a_{i+1} = b_i$ и $b_{i+1} = b_i^{-1} a_i b_i$, $0 \leq i \leq k-1$, где $a_0 = a$, $b_0 = b$.

ЛЕММА 1. Для $(\pm k, l)$ -тангла, $k > 0$, петли a_k и b_k могут быть выражены через петли a и b . При этом

(i) в случае $(-k, l)$ -тангла $b_k = g_k(a, b)$, $a_k = g_{k-1}(a, b)$, где $g_k(a, b) = x_1^{-1} x_2^{-1} \dots x_k^{-1} x_{k+1} x_k \dots x_1$, и

$$x_i = \begin{cases} b, & i = 1 \pmod{2}, \\ a, & i = 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

(ii) в случае (k, l) -тангла $a_k = f_k(a, b)$, $b_k = f_{k-1}(a, b)$, где $f_k(a, b) = y_1 y_2 \dots y_k y_{k+1} y_k^{-1} \dots y_1^{-1}$, и

$$y_i = \begin{cases} a, & i = 1 \pmod{2}, \\ b, & i = 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство по индукции.

(i) Случай $k = 1$ очевиден. Покажем, что случай $k-1$ влечет случай k . В самом деле:

$$\begin{aligned} b_k &= b_{k-1}^{-1} a_{k-1} b_{k-1} = b_{k-1}^{-1} b_{k-2} b_{k-1} = \\ &= x_1^{-1} \dots x_k^{-1} x_{k-1} x_k \dots x_1 = x_1^{-1} \dots x_k^{-1} x_{k+1} x_k \dots x_1 = \\ &= g_k(a, b), \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы воспользовались тем, что $x_{k+1} = x_{k-1}$.

Случай (ii) доказывается аналогично. \square

Отметим следующие простые свойства введенных функций $f_k(a, b)$ и $g_k(a, b)$.

ЛЕММА 2. Для $k \geq 1$ при любых α и β имеют место следующие тождества:

$$\begin{aligned} (i) \quad & f_{k+1}(\alpha, \beta) f_k(\alpha, \beta) = \alpha \beta, \\ (ii) \quad & g_k(\alpha, \beta) g_{k+1}(\alpha, \beta) = \alpha \beta. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождества с очевидностью следуют из определения функций $f_k(\alpha, \beta)$ и $g_k(\alpha, \beta)$, учитывая, что $y_{i+2} = y_i$ и $x_{i+2} = x_i$. \square

ТЕОРЕМА 2. Фундаментальная группа $\Theta(i+1/j)$ -орбифолда с индексами сингулярности k , l и m имеет следующее представление:

$$\pi(\Theta(i+1/j)) = \langle a, b \mid a^k = b^l = (w_j^i(a, b))^m = 1 \rangle,$$

где $w_j^i(a, b) = a^{-1} f_{i-1}(g_j(a, b), b^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму $\Theta(i+1/j)$ -орбифолда на рис.10 и обозначим через a, b, c, d, e, f, g, h элементы группы орбифолда, соответствующие одноименным дугам диаграммы.

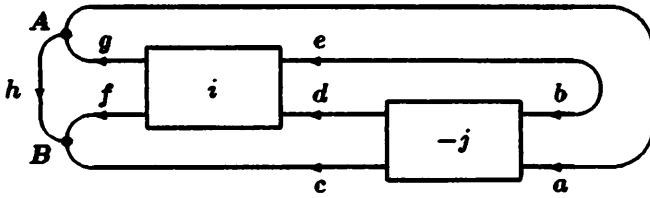


Рис. 10.

В соответствии с леммой 1, начиная с элементов a и b , выразим остальные. Тогда $c = g_{j-1}(a, b)$, $d = g_j(a, b)$, $e = b^{-1}$, $f = f_i(d, e) = f_i(g_j(a, b), b^{-1})$, $g = f_{i-1}(d, e) = f_{i-1}(g_j(a, b), b^{-1})$. При обходе вершины A получаем соотношение $ga^{-1}h^{-1} = 1$. При обходе вершины B получаем соотношение $fhc = 1$. Откуда $f_{i-1}(g_j(a, b), b^{-1})a^{-1}h^{-1} = 1$, и аналогично

$$f_i(g_j(a, b), b^{-1})hg_{j-1}(a, b) = 1.$$

Выражая из обоих равенств h и сравнивая результаты, получим:

$$f_{i-1}(g_j(a, b), b^{-1})a^{-1} = f_i^{-1}(g_j(a, b), b^{-1})g_{j-1}^{-1}(a, b) = 1,$$

откуда

$$f_i(g_j(a, b), b^{-1})f_{i-1}(g_j(a, b), b^{-1}) = g_{j-1}^{-1}(a, b)a.$$

Воспользовавшись равенством (i) из леммы 2, получим $g_j(a, b)b^{-1} = g_{j-1}^{-1}(a, b)a$, что дает равенство

$$g_{j-1}(a, b)g_j(a, b) = ab,$$

которое является верным в силу (ii) леммы 2.

Таким образом, группа $\pi(\Theta(i+1/j))$ двупорождена. Полагая для определенности, что дуги, соответствующие элементам a , b и c как составляющие сингулярного множества орбифолда, имеют индексы ветвления k ,

1 и m соответственно, получаем следующее представление:

$$\pi(\theta(i+1/j)) = \langle a, b \mid a^k = b^l = (w_j^i(a, b))^m = 1 \rangle,$$

где $w_j^i(a, b) = a^{-1} f_{i-1}(g_j(a, b), b^{-1})$. Теорема доказана. \square

Из полученного представления нетрудно видеть, что при $k = l = 2$, рассматриваемые группы будут конечными, более того, группами диэдра.

Полученное представление группы орбифолда позволяет определить туннельное число для узлов рассматриваемого семейства.

Пусть K — узел в трехмерной сфере S^3 и τ — незамкнутая дуга в S^3 с концами τ_0 и τ_1 , такие, что $K \cup \tau = \{\tau_0, \tau_1\}$. Следуя [14] будем говорить, что τ является *туннелем* узла K , если дополнение в S^3 к трубчатой окрестности множества $K \cup \tau$ является телом с ручками. Другими словами, это означает, что группа $\pi_1(S^3 \setminus (K \cup \tau))$ — свободная группа. Туннели и туннельные числа широкого класса узлов, в том числе и двухмостовых, изучались в работах [14, 15]. Отметим, что полученное в теореме 2 представление фундаментальной группы $\theta(i+1/j)$ -орбифолда делает очевидным следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Дуга AB является туннелем двухмостового узла $K(i+1/j)$.

Из теорем 1 и 2 получаем также

СЛЕДСТВИЕ 2. Для почти всех $i \geq 1$, $j \geq 2$ и $n \geq 3$ группа

$$\langle a, b \mid a^n = b^2 = (w_{2j}^i(a, b))^2 = 1 \rangle,$$

где $w_{2j}^i(a, b) = a^{-1} f_{i-1}(g_{2j}(a, b), b^{-1})$, имеет точное представление в $PSL_2(\mathbb{C})$.

5. Тэтта-орбиболды, униформизируемые конечными обобщенно-треугольными группами

Как следует из теоремы 2, фундаментальные группы орбиболдов с носителем трехмерной сферой и сингулярным множеством θ $(i+1/j)$ -кривой, являются обобщенно-треугольными группами в смысле [2]. Естественно возникающим вопросом об обобщенно-треугольных группах является вопрос об их конечности либо бесконечности. Будем далее считать, что хотя бы одна из порождающих обобщенно-треугольной группы является элементом не второго порядка. Почти полная классификация конечных обобщенно-треугольных групп с указанием их порядков дана в [12]. А именно, с точностью до эквивалентности, все конечные обобщенно-треугольные группы исчерпываются приведенными в [12] двенадцатью конечными группами.

В этой части мы покажем, что восемь групп из [12] связаны с θ -кривыми малого порядка, а именно, являются фундаментальными группами орбиболдов рассматриваемого нами семейства.

Пусть $n \geq 2$ - целое число. Рассмотрим орбиболд с носителем S^3 , сингулярным множеством которого является $\theta(n)$ -кривая. Применяя теорему 2 к случаю $i=n-1$, $j=1$ получим копредставление фундаментальной группы нашего орбиболда. При этом в копредставлении группы появится следующее слово:

$$\begin{aligned} w_1^{n-1}(a, b) &= a^{-1} f_{n-2}(q_1(a, b), b^{-1}) = \\ &= a^{-1} f_{n-2}(b^{-1} a b, b^{-1}) = \\ &= a^{-1} f_{n-1}(b^{-1}, a). \end{aligned}$$

В частности, при малых значениях n имеем:

$$w_1^1(a,b) = a^{-1} f_1(b^{-1}, a) = a^{-1} b^{-1} ab,$$

$$w_1^2(a,b) = a^{-1} f_2(b^{-1}, a) = a^{-1} b^{-1} ab^{-1} a^{-1} b,$$

$$w_1^3(a,b) = a^{-1} f_3(b^{-1}, a) = a^{-1} b^{-1} ab^{-1} aba^{-1} b.$$

Эти выражения возникают в копредставлениях групп орбифолдов, сингулярные множества которых $\Theta(2)$, $\Theta(3)$ и $\Theta(4)$ приведены на рис.11 и являются зацеплением Хопфа с мостом, трилистником с мостом и зацеплением 4_1^2 с мостом.

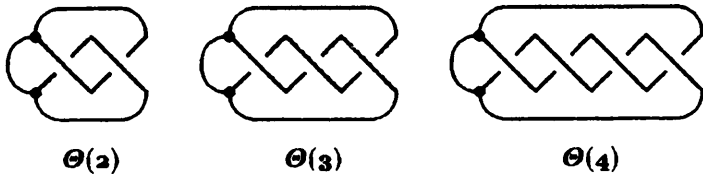


Рис. 11

Геометрические структуры на орбифолдах с носителем S^3 и изображенными на рис.11 сингулярными множествами рассматривались в [6,10]. Так, орбифолды с сингулярным множеством $\Theta(2)$ и индексами ветвления $(k,1,m)$ равными $(2,3,2)$ и $(3,3,2)$ являются сферическими [6]. Отсюда следует, что их фундаментальные группы – обобщенно-треугольные группы

$$1: \langle a,b \mid a^2 = b^3 = (a^{-1}b^{-1}ab)^2 = 1 \rangle,$$

$$2: \langle a,b \mid a^3 = b^3 = (a^{-1}b^{-1}ab)^2 = 1 \rangle$$

конечны.

Геометрические структуры на орбифолдах с сингулярным множеством $\Theta(3)$, т.е. трилистником с мостом (рис.1), описаны в [10]. В частности, показано, что фундаментальные группы Θ -орбифолдов с сингуляр-

ным множеством трилистник с мостом конечны в следующих случаях:

$$3: \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)^2 = 1 \rangle,$$

$$4: \langle a, b \mid a^2 = b^4 = (a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)^2 = 1 \rangle,$$

$$5: \langle a, b \mid a^2 = b^5 = (a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)^2 = 1 \rangle,$$

$$6: \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}b)^3 = 1 \rangle.$$

Используя методы [10], в [9] показано, что орби-фолды с сингулярным множеством $\theta(4)$, т.е. зацеп-лением 4_1^2 с мостом (рис.1), гиперболичны во всех случаях за исключением $k = 1 = 2$ и $(k, 1, m) = (2, 3, 2)$. При этом фундаментальная группа

$$7: \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (a^{-1}b^{-1}ab^{-1}aba^{-1}b)^2 = 1 \rangle$$

соответствующего орбифолда конечна.

Еще одна, восьмая, конечная обобщенно-треуголь-ная группа из [12] связана со следующим орбифолдом. В списке [6] среди сферических орбифолдов с носителем S^3 указан орбифолд, сингулярным множеством которого является торический узел пятого порядка 5_1 с индек-сом ветвления равным трем (рис.12).

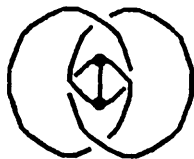
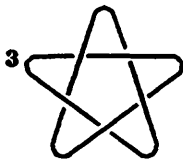


Рис.12

Как не-трудно видеть, этот узел со-держится в рассмотренном нами выше се-мействе уз-лов, а именно,

$H_1^2 = 5_1$. После факторизации этого орбифолда по обра-щающей инволюции τ , получим θ -орбифолд с сингуляр-ным множеством $\theta(2+1/2)$ -кривая. Нетрудно видеть, что

это узел H_2^1 с мостом, т.е. узел "восьмерка" с мостом. В силу теоремы 2, фундаментальная группа полученного θ -орбифолда имеет следующее представление:

$$8: \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (a^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab)^2 = 1 \rangle.$$

Как видим, восемь конечных обобщенно-треугольных групп из [12] возникают как фундаментальные группы двухмостовых θ -орбифолдов.

Л и т е р а т у р а

1. ADAMS C., HILDEBRAND M., WEEKS J. Hyperbolic invariants of knots and links // Trans.AMS - 1991.- Vol.326.- P.1-56.
2. BAUMSLAG G., MORGAN J., SHALEN P. Generalized triangle groups // Math.Proc.Camb.Phil.Soc.-1987.-Vol.102.- P.25-31.
3. BURDE G., ZIESCHANG H. Knots.-Berlin a.o.: de Gruyter Studies in Mathematics, 1985.
4. CONWAY J.H. An enumeration of knots and links // Computational problems in abstract algebra (Ed. Leech).- Pergamon Press, 1969.- P.329-358.
5. CROWELL R.H., FOX R.H. Introduction to knot theory. - Springer, 1963.
6. DUNBAR W.D. Geometric orbifolds // Revista Math. - 1988. - Vol.1.- P.67-99.
7. DUNBAR W.D., MEYERHOFF G.R. Volumes of Hyperbolic 3-Orbifolds // Indiana Univ.Math.J.- 1994.- Vol.43.- P.611-637.
8. HAEFLIEGER A., QUACH N.D. Une presentation du groupe fondamental d'une orbifold // Asterisque - 1984.- Vol.116.-P.98-107.
9. HAGELBERG M. Generalized triangle groups and 3-dimensional orbifolds // Contemporary Math.- 1995.- Vol.184.-P.185-192.
10. HELLING H., MENNICKE J., VINBERG E.B. On some generalized triangle groups and 3-dimensional orbifolds. SFB 343 Bielefeld, Diskrete Strukturen in der Mathematik, 1991. Preprint 91-057.
11. HODGSON C., MEYERHOFF R., WEEKS J. Surgeruries on the Whitehead link yield geometrically similar manifolds // Topology'90 (Columbus, Ohio, 1990; B.Apanasov et al., eds.) -

Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Pub. - 1992. - Vol.1 - de Gruyter, Berlin - P.195-206.

12. HOWIE J., METAFTSIS V., THOMAS R.M. Finite generalized triangle groups //Trans. AMS - 1995. - Vol.347. - P.3613-3623.

13. MONTESINOS J.M., WHITTEN W. Constructions of two-fold branched covering spaces //Pacific J. Math. - 1986. - Vol.125. - P. 415-446.

14. MORIMOTO K., SAKUMA M. On unknotting tunnels for knots //Math. Ann. - 1991. - Vol. 289. - P. 143-167.

15. MORIMOTO K., SAKUMA M., YOKOTA Y. Identifying tunnel number one knots. - Osaka, 1994. - Preprint.

16. NEUMANN W.D., REID A.W. Arithmetic of Hyperbolic Manifolds //Topology'90 (Columbus, Ohio, 1990; B.Apanasov et al., eds.). Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Pub. - 1992. - Vol. 1. - de Gruyter, Berlin.

17. ROLFSEN D. Knots and links. - Berkeley, CA: Publish or Perish, Inc., 1976.

18. SIMON J. A topological approach to the stereochemistry on nonrigid molecules //Graph theory and topology in chemistry (Studies in Physical and Theoretical Chemistry, 51) - 1987. - P. 43-75.

19. THURSTON W.P. The Geometry and topology of 3-manifolds. - Mimeographed Lecture Notes. - 1980. - Princeton Univ., Princeton, NJ, Chaps 1-9, 1978/79, Chaps. 11, 13.

20. WOLCOTT K. The knotting of theta curves and other graphs in S^3 //Geometry and Topology - 1987. - Vol. 105. - P.325-346.

21. ВОЛЬФ Дж. Пространства постоянной кривизны. - М., 1982.

22. WEEKS J. Snappea Program, Version 2.0d4. A program for the Macintosh to compute hyperbolic structures on 3-manifolds. Available upon request from J.Weeks.

23. YAMAMOTO M. Knots in spatial embeddings of the complete graph on four vertices //Topology and its Appl. - 1990. - Vol.36. - P. 291-298.

Поступила в редакцию

16 февраля 1996 года