

ПОЛИНОМ ЯМАДЫ ДЛЯ ГРАФОВ, ЗАУЗЛЕННО ВЛОЖЕННЫХ  
В ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО<sup>\*)</sup>

А.Ю.Веснин, А.А.Добрынин

В в е д е н и е

В последнее десятилетие появилось большое число математических работ, посвященных заузленным вложениям графов в трехмерное пространство. Основным стимулирующим моментом для развития этой теории послужили работы Дж.Конвэя, К.Гордона [1] и М.Ямамото [2], в которых было замечено, что вложения даже простых с комбинаторной точки зрения графов могут быть устроены достаточно сложно. Начало изучения инвариантов таких вложений, в частности, полиномов, сочетающих в себе свойства полиномов графов и полиномов узлов, было положено в работах Л.Кауффмана [3]. Основы алгоритмического подхода к изучению этой проблемы заложены в работе [4], в которой даны необходимые и достаточные условия незаузленности графа. Другое направление исследований связано с полиномами графов и узлов, обобщающих классический полином Татта [5]. В настоящее время такие полиномы широко используются в

\*)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01410, 96-03-33067).

комбинаторной теории узлов и тесно связаны с последними ее достижениями. Большую роль в этой теории сыграли работы Л.Кауффмана [6], К.Мурасуги [7] и Ф.Джагера [8], в которых построение полиномиальных инвариантов узлов сводится к задачам на плоских графах.

Наиболее интенсивно аппарат теории узлов и их полиномиальных инвариантов применяется в физике, в частности, в теории квантовых групп. Изложение идей применения теории узлов в физике содержится в [9].

В последнее время в значительной степени внимание к исследованию узлов, зацеплений и заузленных графов стимулируется приложениями в естественных науках. Так, в биологии и химии открываются все новые биополимеры и молекулы неклассического строения, свойства которых зависят от их топологии: заузленности и зацепленности их макромолекул. В органической химии такие классы соединений известны под названием катенаны и ротаксаны [10]. Синтезированы также химические соединения, имеющие топологию лестницы Мебиуса [11]. В биологии установлено, что ДНК могут иметь заузленную структуру. Например, на обложке журнала [12] приводится фотография молекулы ДНК, имеющая структуру торического узла с 13 двойными точками. Обзорные статьи по применению методов теории узлов в химии, биологии и в физике содержатся в [13].

Одним из интересных направлений в области приложений теории узлов является разработка математических методов идентификации топологии заузленных макромолекул биополимеров и молекул химических соединений. Основным объектом изучения являются проекции пространственной структуры заузленной макромолекулы на плоскость. Такие плоские диаграммы получаются, на-

пример, при фотографировании молекул ДНК. Проблема идентификации топологии состоит в том, чтобы по заданной диаграмме макромолекулы определить тип узла или зацепления, соответствующий этой макромолекуле. Традиционным подходом при идентификации узлов является использование полиномиальных инвариантов их диаграм. Настоящая работа посвящена исследованию свойств и вычислению полиномиального инварианта Ямады для графов, вложенных в трехмерное пространство (заузеленных графов).

## 1. Полином Ямады для абстрактного графа

Рассматриваются неориентированные графы  $G(V, E)$  с петлями и кратными ребрами с множеством вершин  $V=V(G)$  и множеством ребер  $E = E(G)$ . Используемые далее обозначения:  $p(G)$  – число вершин графа,  $q(G)$  – число ребер графа,  $\omega(G)$  – число компонент связности графа,  $\beta(G) = q(G) - p(G) + \omega(G)$  – первое число Бетти. *Перешейком* графа называется ребро, удаление которого приводит к увеличению компонент связности графа. Прежде чем определить инвариант пространственного графа, рассмотрим лежащий в его основе полиномиальный инвариант  $H(G)$  для абстрактного графа. Следуя [14], определим для графа вспомогательный полином  $h(G)(x, y)$  от двух переменных следующим образом:

$$h(G)(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (-x)^{|F|} x^{\omega(G-F)} y^{\beta(G-F)},$$

где  $F$  пробегает все подмножества ребер из  $E(G)$ ,  $|F|$  есть число элементов в множестве  $F$ , а  $G-F$  обозначает граф с множеством вершин  $V(G)$  и множеством ребер  $E(G) - F$ .

Полином  $h(G)$  будет инвариантом графа, так как он является частным случаем полиномиального инварианта Негами [5]. Действительно, полином Негами  $f(G; t, a, b)$  можно представить в виде

$$f(G; t, a, b) = \sum_{F \subseteq E} t^{w(G-F)} a^{|F|} b^{|F|}.$$

Сравнивая приведенные выше полиномы, получаем:

$$h(G)(x, y) = \frac{1}{p(G)} f(G; xy, y, -\frac{1}{x}).$$

Таким образом, полином  $h(G)(x, y)$  с точностью до множителя совпадает с многочленом, получаемым из полинома Негами  $f(G; t, a, b)$  после подстановки  $t = xy$ ,  $a = y$  и  $b = 1/x$ . Отсюда немедленно следуют следующие свойства полинома  $h(G)$ , вытекающие из соответствующих свойств полинома Негами [5].

1°. Пусть  $G/e$  есть граф, полученный из графа  $G$  стягиванием ребра  $e$ , а через  $G-e$  обозначим граф, полученный после удаления ребра  $e$  из  $G$ . Тогда

$$h(G)(x, y) = h(G/e)(x, y) - \frac{1}{x} h(G-e)(x, y).$$

2°. Если граф  $G \cup H$  есть объединение непересекающихся графов  $G$  и  $H$ , то

$$h(G \cup H) = h(G) \cdot h(H).$$

3°. Если граф  $G \cdot H$  есть объединение графов  $G$  и  $H$ , имеющих единственную общую вершину (произведение графов), то

$$h(G \cdot H) = \frac{1}{x} h(G) \cdot h(H).$$

4°. Если граф  $G$  имеет перешеек, то  $h(G) = 0$ .

5°. Если граф  $G$  гомеоморфен графу  $H$ , то  $h(G) = h(H)$ .

Полином Ямади для абстрактного графа  $G$  есть лорановский полином от одной переменной, определяемый через  $h(G)(x, y)$  подстановкой:

$$H(G)(A) = h(G)(-1 - A, -2 - A^{-1}).$$

Из свойств полинома  $h$  следуют аналогичные свойства для  $H(G)$ :

1°. Рекуррентная формула имеет вид:  $H(G) = h(G/e) - h(G-e)$ .

2°. Для объединения графов имеем  $H(G \cup H) = h(G) \cdot h(H)$ .

3°. Для произведения графов  $H(G \cdot H) = -h(G) \cdot h(H)$ .

4°. Если граф  $G$  имеет перешеек, то  $H(G) = 0$ .

5°. Если графы  $G$  и  $H$  гомеоморфны, то  $H(G) = h(H)$ .

Полином  $H(G)$  получается из полинома Негами подстановкой

$$H(G)(A) = \frac{1}{b^p} f(G; -b, b, 1). \quad (1)$$

где  $b = -A - 2 - A^{-1}$ .

Аналогично [5], укажем значения полинома  $H(G)$  для некоторых классов графов:

1) Если граф  $T_q$  есть дерево с  $q$  ребрами, то  $H(T_q) = 0$  для всех значений  $q$ .

2) Если граф  $C_q$  является циклом длины  $q$ , то  $H(C_q) = A + 1 + A^{-1}$  для всех  $q$ .

3) Если граф  $L_q$  содержит единственную вершину и  $q$  петель, то

$$H(L_q) = (-1)^{q+1} (A + 1 + A^{-1})^q.$$

4) Если граф  $D_q$  состоит из двух вершин, соединенных  $q$  ребрами (мультиребро кратности  $q$ ), то

$$H(D_q) = \frac{1}{b} [b+1-(b+1)^q],$$

где  $b = -A-2-A^{-1}$ .

Рассмотрим примеры вычисления полинома  $H(G)$  для графов, изображенных на рис. 1. Нетрудно видеть, что в результате применения к графу  $G_1$  операций стягива-



Рис. 1

ния и удаления ребра получим пару графов  $D_1$  и  $D_2 \cdot D_1$ . Следовательно, так как  $H(D_1) = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} H(G_1) &= H(D_3) + H(D_2 \cdot D_1) = H(D_3) - H(D_2) \cdot H(D_1) = \\ &= \frac{1}{b} [b+1-(b+1)^3] = -\frac{1}{A^2} (A^2+A+1)(A^2+1) = \\ &= -A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2}. \end{aligned}$$

Граф  $G_2$  можно представить как  $G_2 = G_1 \cdot L_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} H(G_2) &= H(G_1 \cdot L_1) = -H(G_1) \cdot H(L_1) = \\ &= -\frac{1}{b} (A + 1 + A^{-1}) [b+1 - (b+1)^3] - \\ &= -\frac{1}{A^3} (A^2 + A + 1)^2 (A^2 + 1) = \\ &= -A^3 - 2A^2 - 4A - 4 - 4A^{-1} - 2A^{-3} - A^{-3}. \end{aligned}$$

Стягивание ребра в графе  $G_3$  приводит к графу  $D_4$ , а его удаление порождает граф  $D_2 \cdot D_2$ , откуда

$$\begin{aligned} H(G_3) &= H(D_4) + H(D_2 \cdot D_2) = H(D_4) + (H(D_2))^2 = \\ &= -\frac{1}{b} [b + 1 - (b+1)^4] + (b+1)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{A^3} (A^2 + A + 1)^2 (A^4 + 2A^3 + 4A^2 + 2A + 1) = \\
&= A^3 + 3A^2 + 7A + 8 + 7A^{-1} + 3A^{-2} + A^{-3}.
\end{aligned}$$

Заметим далее, что стягиванием ребра в графе  $G_4$  можно получить граф  $G_3$ . Удаляя это ребро из  $G_4$ , получим граф, который этими же операциями может быть редуцирован к графу  $D_2 \cdot D_2$  и простому циклу  $G_4$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
H(G_4) &= H(G_3) + (H(D_2 \cdot D_2) + H(G_4)) = \\
&= H(D_4) + 2(H(D_2))^2 + (A+1+A^{-1}) = \\
&= \frac{1}{A^3} (A^2 + A + 1)^2 (A^4 + 3A^3 + 6A^2 + 3A + 1) = \\
&= A^3 + 4A^2 + 10A + 12 + 10A^{-1} + 4A^{-2} + A^{-3}.
\end{aligned}$$

Применяя операции стягивания и удаления к ребру кратности два в графе  $G_5$ , получим

$$\begin{aligned}
H(G_5) &= H(G_3 \cdot L_1) + H(G_4) = -(A+1+A^{-1})H(G_3) + H(G_4) = \\
&= -\frac{1}{A^4} (A^2 + A + 1)^2 (A^6 + 2A^5 + 4A^4 + 2A^3 + 4A^2 + 2A + 1) = \\
&= -A^4 - 3A^3 - 7A^2 - 8A - 10 - 8A^{-1} - 7A^{-2} - 3A^{-3} - A^{-4}.
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что так называемый *поток* - *ковий* полином  $F(t)$  можно представить через полином Негами в виде  $F(t) = \frac{1}{t^p} f(G; t, t, -1)$ , что с точностью до знаков переменных совпадает с выражением для  $H(G)$ . Описание потокового полинома приводится в [15].

## 2. Полином Ямады для пространственных графов

Пусть граф  $G$  вложен в трехмерное пространство  $R^3$  и рассмотрим проекцию  $\pi: R^3 \rightarrow R^2$ . Проекцию  $\pi(G)$

графа  $G$  будем называть *регулярной*, если либо точке  $z \in p(G)$  соответствует единственный прообраз  $p^{-1}(z) \in G$ , либо точка  $z$  является двойной точкой, т.е.  $p^{-1}(z)$  состоит из двух точек, лежащих на двух трансверсально проходящих одно под другим ребер графа  $G$ . Проекцию  $p(G)$  графа  $G$  с указанными в ее двойных точках проходами "над" и "под" будем называть *диаграммой* графа  $G$  и обозначать  $g(G)$ .

Пусть  $g(G)$  есть диаграмма графа  $G$ . Для произвольной двойной точки  $z \in g(G)$  определим три операции ее *разводки*:  $s_+$ ,  $s_-$  и  $s_0$  как локальное изменение диаграммы  $g$  в окрестности точки  $z$  (см.рис.2).

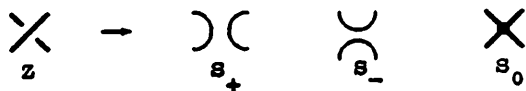


Рис. 2

Пусть граф  $S$  получен из  $g(G)$  применением к каждой двойной точке одной из операций разводки. Ясно, что  $S$  будет абстрактным плоским графом. Обозначим через  $U(g)$  множество всех графов, полученных из диаграммы  $g$  применением всех комбинаций операций разводки к двойным точкам  $g$ . Графу  $S$  поставим в соответствие моном  $c(g|S) = A^{m_1 - m_2}$ , где  $m_1$  и  $m_2$  есть число операций разводки  $s_+$  и  $s_-$ , примененных к  $g$  для получения  $S$  соответственно.

*Полиномом Ямади* диаграммы  $g(G)$  пространственного графа  $G$  называется лорановский полином от переменной  $A$ , задаваемый следующим выражением:

$$R(g) = R(g)(A) = \sum_{S \in U(g)} c(g|S) H(S), \quad (2)$$



где  $H(S) = h(S)(-1, -A-2-A^{-1})$ .

Для определенности положим  $R(\bigcirc) = 1$ . Если диаграмма  $g$  графа  $G$  не имеет двойных точек, то  $R(g) = H(G)$ . Если из контекста ясно, какая диаграмма графа  $G$  рассматривается, то будет употребляться также обозначение  $R(G)$ . Из свойств полиномов  $h(G)$  и  $H(G)$  немедленно следуют следующие свойства полинома Ямады:

$$1) R(\text{X}) = AR(\text{ )}) / + A^{-1}R(\text{ )}) + R(\text{X});$$

$$2) R(\text{X}) = R(\text{X}) + R(\text{X});$$

$$3) R(\bigcirc) = R(\bigcirc) = A + 1 + A^{-1};$$

4) если диаграмма  $g$  имеет перешеек, то  $R(g) = 0$ ;

5)  $R(L_n) = -(-\sigma)^n$ , где  $L_n$  есть незаузленный одно-вершинный граф с  $n$  петлями и  $\sigma = A + 1 + A^{-1}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Здесь и далее использование фрагментов диаграмм (как в вышеприведенных уравнениях) означает, что эти диаграммы отличаются только указанными фрагментами.

Если пространственный граф имеет перешеек, то для его диаграммы  $R(g) = 0$ . В этом случае граф можно характеризовать набором полиномов, соответствующих всем его двусвязным компонентам.

Полином Ямады диаграммы и ее зеркального образа связаны простым соотношением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [14]. Пусть  $g'$  есть зеркальный образ диаграммы  $g$ . Тогда  $R(g)(A) = R(g')(A^{-1})$ .

Так как абстрактный граф и его зеркальный образ совпадают, то для абстрактного графа полином Ямады всегда полностью симметричен относительно нулевой степени  $A$ .

Из свойств полинома следует, что если все вершины графа  $G$  имеют степень 2, то  $R(G)$  является инвариантом узла. В [14] указана явная связь полинома Ямады  $R(g)$  с полиномиальными инвариантами узлов и зацеплений, а именно, с полиномом Джоунса и полиномом Дубровника.

### 3. Инвариантность полинома $R(g)$

Основой для использования полинома Ямады являются его свойства инвариантности при изменениях диаграмм пространственных графов. Такие преобразования диаграмм состоят из последовательностей элементарных преобразований, называемых движениями Рейдемейстера [16], которые представлены на рис.3. Преобразования диаграммы, порождаемые наборами (I)-(VI); (I)-(V); (0), (II)-(IV) называются гибкими (pliable), плоскими (flat) регулярными (regular) преобразованиями соответственно. Под максимальной степенью вершин графа  $G$  будем понимать величину  $\max\{\deg(v) | v \in V(G)\}$ .

**ТЕОРЕМА [14].** Полином  $R(g)$  является инвариантом диаграммы  $g$  пространственного графа  $G$  при следующих преобразованиях  $g$ :

- (1) при регулярных преобразованиях;
- (2) при плоских преобразованиях с точностью до множителя  $(-A)^n$  для некоторого целого  $n$ ;
- (3) при гибких преобразованиях с точностью до множителя  $(-A)^n$  для некоторого целого  $n$  для диаграмм графов с максимальной степенью вершин меньше 4.

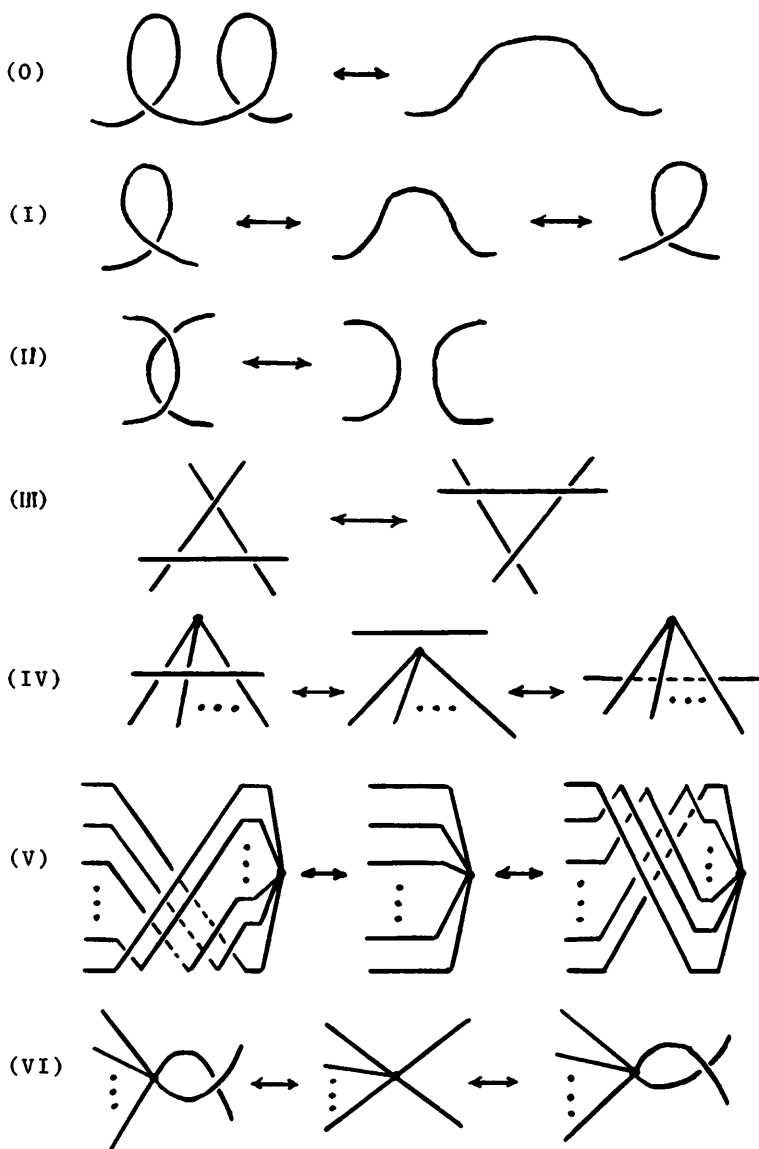


Рис.3.Инвариантные преобразования для полинома Ямады

4. Полином Ямады для одного семейства  
заузленных вложений кубических графов  
с двумя вершинами

Рассмотрим трехвалентные графы (возможно с петлями и кратными ребрами), имеющие ровно две вершины. Очевидно, найдется лишь два таких графа (рис.4), первый из которых в соответствии с принятой терминологией мы будем далее называть  $\theta$ -графом и "пенсне"-графом.



Рис. 4

Рассмотрим семейство  $\theta(n)$  пространственных вложений этих графов, диаграммы начальных представителей которого изображены на рис.5.

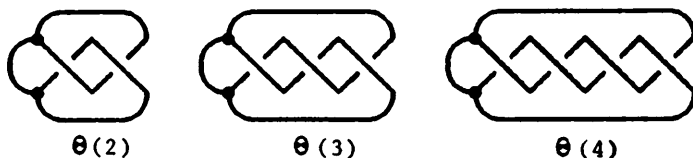


Рис. 5

Диаграмма пространственного графа  $\theta(n)$  получается из канонической диаграммы торического узла (если  $n$  нечетно) или торического двухкомпонентного зацепления (если  $n$  четно) добавлением дуги, лежащей во внешней грани. Как нетрудно видеть, граф  $\theta(n)$  как абстрактный граф изоморфен  $\theta$ -графу, если  $n$  нечетно, и "пенсне"-графу, если  $n$  четно.

В следующем утверждении дается формула для полинома Ямады пространственного графа  $\Theta(n)$ .

**ТЕОРЕМА.** Для любого  $n \geq 0$  полином Ямады пространственного графа  $\Theta(n)$  имеет следующий вид:

$$R(\Theta(n))(A) = (A^2 + A + 1 + A^{-1} + A^{-2})A^n - (A + A^{-1})A^{-2n} - (A^2 + 1 + A^{-2})(-1)^n A^{-n}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для краткости воспользуемся далее обозначением  $R_n = R(\Theta(n))(A)$ . Тогда в силу свойств полинома Ямады имеем:

$$R_{n-2} - R_n = (A - A^{-1})[(A^{-2})^{n-1}Q - R_{n-1}],$$

где через  $Q$  обозначен полином Ямады для незаузленного  $\Theta$ -графа. Следовательно,

$$R_{n-2} - R_n + AR_{n-1} - A^{-1}R_{n-1} = (A - A^{-1})(A^{-2})^{n-1}Q,$$

откуда

$$R_n - AR_{n-1} + A^{-1}(R_{n-1} - AR_{n-2}) = -\frac{A - A^{-1}}{A^{2(n-1)}} \cdot Q.$$

Обозначая  $T_n = R_n - AR_{n-1}$ , имеем

$$\begin{aligned} T_n &= -\frac{1}{A} T_{n-1} - \frac{A - A^{-1}}{A^{2(n-1)}} Q = \\ &= -\frac{1}{A} \left[ -\frac{1}{A} T_{n-2} - \frac{A - A^{-1}}{A^{2(n-2)}} Q \right] - \\ &- \frac{A - A^{-1}}{A^{2(n-1)}} Q = \dots = \frac{(-1)^{n-1}}{A^{n-1}} T_1 - \\ &- \frac{A - A^{-1}}{A^{2(n-1)}} Q \frac{1 - (-1)^{n-1} A^{n-1}}{A + 1}. \end{aligned}$$

Вычисляя непосредственно  $R_1$  и  $R_0$  получим, что  $T_1 = R_1 - AR_0 = -AQ$ . Следовательно,

$$T_n = \left[ \frac{(-1)^n}{A^n} (A^2 - A + 1) - \frac{A^2 - A}{A^{2n}} \right] Q.$$

Вернемся к полиному  $R_n$ :

$$R_n = AR_{n-1} + T_n = A(AR_{n-2} + T_{n-1}) + T_n = \dots$$

$$\dots = A^n R_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i T_{n-i} = A^n R_0 + \sum_{k=1}^n A^{n-k} T_k.$$

Заметим, что граф  $\Theta(0)$  является незаузленным "пенс-не"-графом, и поскольку он имеет перешеек, то  $R_0 = 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n A^{n-k} T_k = \\ &= A^n Q \left[ (A^2 - A + 1) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{A^{2k}} - (A^2 - A) \sum_{k=1}^n \frac{1}{A^{3k}} \right] = \\ &= A^n Q \left[ \frac{A^2 - A + 1}{A^2 + 1} ((-1)^n A^{-2n} - 1) - \frac{A(1 - A^{-3n})}{A^2 + A + 1} \right]. \end{aligned}$$

Вспользуемся тем, что

$$Q = -A^2 - A - 2 \cdot -A^{-1} - A^{-2} = \frac{(A^2 + A + 1)(A^2 + 1)}{A^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_n &= -\frac{A^n}{A^2} [(A^2 - A + 1)(A^2 + A + 1)((-1)^n A^{-2n} - 1) - \\ &\quad - (A^2 + 1)A(1 - A^{-3n})] = \\ &= -A^n [(A^2 + 1 + A^{-2})((-1)^n A^{-2n} - 1) - \\ &\quad - (A + A^{-1})(1 - A^{-3n})] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A+A^{-1})(A^n - A^{-2n}) - (A^2 + 1 + A^{-2})((-1)^n A^{-n} - A^n) = \\
&= (A^2 + A + 1 + A^{-1} + A^{-2})A^n - (A + A^{-1})A^{-2n} - \\
&- (A^2 + 1 + A^{-2})(-1)^n A^{-n}.
\end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 1.** При малых значениях  $n$  получаем следующие полиномы:

$$R(\Theta(0))(A) = 0,$$

$$R(\Theta(1))(A) = A^3 + A^2 + 2A + 1 + A^{-1},$$

$$R(\Theta(2))(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A - A^{-2} - A^{-3} - A^{-4} - A^{-5},$$

$$R(\Theta(3))(A) = A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + A^{-1} + A^{-3} - A^{-7},$$

$$R(\Theta(4))(A) = A^6 + A^5 + A^4 + A^2 - A^{-2} - A^{-4} - A^{-6} - A^{-7} - A^{-9}.$$

## 5. Значения полинома $R(G)$ в точках $\pm 1$

Полином Ямады обладает интересным свойством, позволяющим узнать из какого абстрактного графа (или узкого семейства графов) получено данное заузленное вложение.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Пусть  $G$  и  $H$  есть произвольные заузленные вложения в трехмерное пространство одного и того же абстрактного графа. Тогда  $|R(G)(\pm 1)| = |R(H)(\pm 1)|$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Напомним, что для полинома Ямады имеет место следующее соотношение:

$$R(\text{X}) - R(\text{Y}) = (A - A^{-1})[R(\text{X}) - R(\text{Y})].$$

В частности, при  $A = \pm 1$  имеем  $R(\text{X})(\pm 1) = R(\text{Y})(\pm 1)$ .

Таким образом, если две диаграммы пространственных графов отличаются лишь изменением прохода в одной двойной точке, то значения соответствующих полиномов Ямады при  $A = \pm 1$  совпадают. Для завершения доказательства -

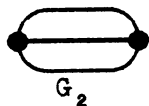
тельства осталось заметить (см. например, [17]), что для двух различных пространственных вложений одного и того же графа существуют такие их диаграммы, что от одной диаграммы можно перейти к другой диаграмме с помощью последовательности изменений проходов в некоторых двойных точках. □

Таким образом, значения  $|R(G)(\pm 1)|$  являются инвариантами абстрактного графа, т.е. не зависят от способа его вложения в трехмерное пространство и могут быть использованы для идентификации графа. Например, для рассмотренных в предыдущем пункте  $\Theta$ -графов справедливо

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Для значений полинома Ямади семейства графов  $\Theta(n)$  в точках  $A = \pm 1$  имеет место следующее свойство: если  $n$  нечетно, то  $|R(\Theta(n))(1)| = 6$  и  $|R(\Theta(n))(-1)| = 2$ , а если  $n$  четно, то  $R(\Theta(n))(\pm 1) = 0$ .

## 6. Полином $R(G)$ для абстрактных кубических мультиграфов малого порядка

Так как  $R(G)=0$  для графов с перешейками, будем далее рассматривать двусвязные кубические графы. На двух вершинах существует единственный граф  $G_2$  ( $\Theta$ -граф), изображенный на рис.6 вместе со своим полиномом  $R(G_2)$ .



$$R(G_2) = -A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2}$$

Рис. 6

В точках  $A = 1$  и  $A = -1$  имеем  $R(G_2)(+1) = -6$  и  $R(G_2)(-1) = -2$ . Диаграммы кубических мультиграфов без



мостов с числом вершин 4 и 6 изображены на рис.7

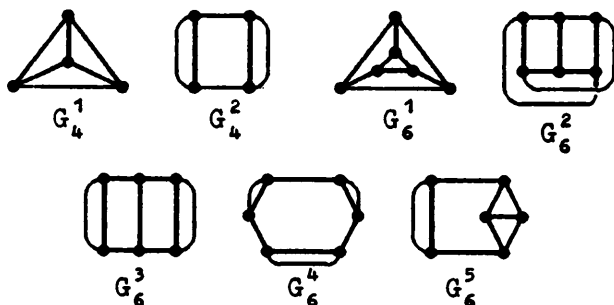


Рис. 7

Полиномы этих графов приводятся в табл. 1 а их значения в точках  $A = \pm 1$  даны в табл. 2. Заметим, что для графов  $G_6^3$  и  $G_6^4$  полиномы оказались одинаковыми.

Т а б л и ц а 1

Полиномы  $R(A)$  для кубических мультиграфов

	Полином $R(G)(A)$
$G_2$	$-A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2}$
$G_4^1$	$A^3 + 2A + 2A^{-1} + A^{-3}$
$G_4^2$	$A^3 + A^2 + 3A + 2 + 3A^{-1} + A^{-2} + A^{-3}$
$G_6^1$	$-A^4 + A^3 - 3A^2 + 2A - 4 + 2A^{-1} - 3A^{-2} + A^{-3} - A^{-4}$
$G_6^2$	$-A^4 + A^3 - 4A^2 + A - 6 + A^{-1} - 4A^{-2} + A^{-3} - A^{-4}$
$G_6^3$	$-A^4 - A^3 - 4A^2 - 3A - 6 - 3A^{-1} - 4A^{-2} + A^{-3} - A^{-4}$
$G_6^4$	$-A^4 - A^3 - 4A^2 - 3A - 6 - 3A^{-1} - 4A^{-2} + A^{-3} - A^{-4}$
$G_6^5$	$-A^4 - 3A^2 - 4 - 3A^{-2} - A^{-4}$

Т а б л и ц а 2

Значения полинома  $R(G)(A)$  в точках  $A = \pm 1$ 

A	$G_2$	$G_4^1$	$G_4^2$	$G_6^1$	$G_6^2$	$G_6^3$	$G_6^4$	$G_6^5$
1	-6	6	12	-6	-12	-24	-24	-12
-1	-2	-6	-4	-18	-20	-8	-8	-12

### 7. Каталоги полиномов для пространственных $\Theta$ - и $\Omega$ -графов

В данном пункте полином Ямады табулирован для двух классов пространственных графов:  $\Theta$ - и  $\Omega$ -графов. Пространственные  $\Theta$ -графы образованы вложением в пространство абстрактного  $\Theta$ -графа, состоящего из двух вершин, соединенных тремя ребрами.  $\Omega$ -графы составляют множество пространственных вложений абстрактного полного графа  $K_4$ . Диаграммы пространственных графов с числом двойных точек не более 5 взяты из [18], где утверждается, что представленными диаграммами исчерпываются все неэквивалентные диаграммы (см.рис.8,9). Ниже приводится полином Ямады для пространственных  $\Theta$ -графов малого порядка с числом двойных точек не более 5, приведенных на рис.8.

$$R(\Theta_1) = -A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2},$$

$$R(\Theta_2) = A^6 - A^2 - 1 - A^{-2} - A^{-3} - A^{-4} - A^{-5} - A^{-6},$$

$$R(\Theta_3) = -A^7 + A^4 + 2A^3 + A^2 + A - 1 - \\ - A^{-1} - 2A^{-2} - 2A^{-3} - 2A^{-4} - A^{-5} - A^{-6},$$

$$R(\Theta_4) = A^7 - A^5 - A^3 - A^2 - 1 - A^{-2} - A^{-5} - A^{-8},$$

$$R(\Theta_5) = -A^8 + A^4 - A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2} + A^{-4} - A^{-8},$$

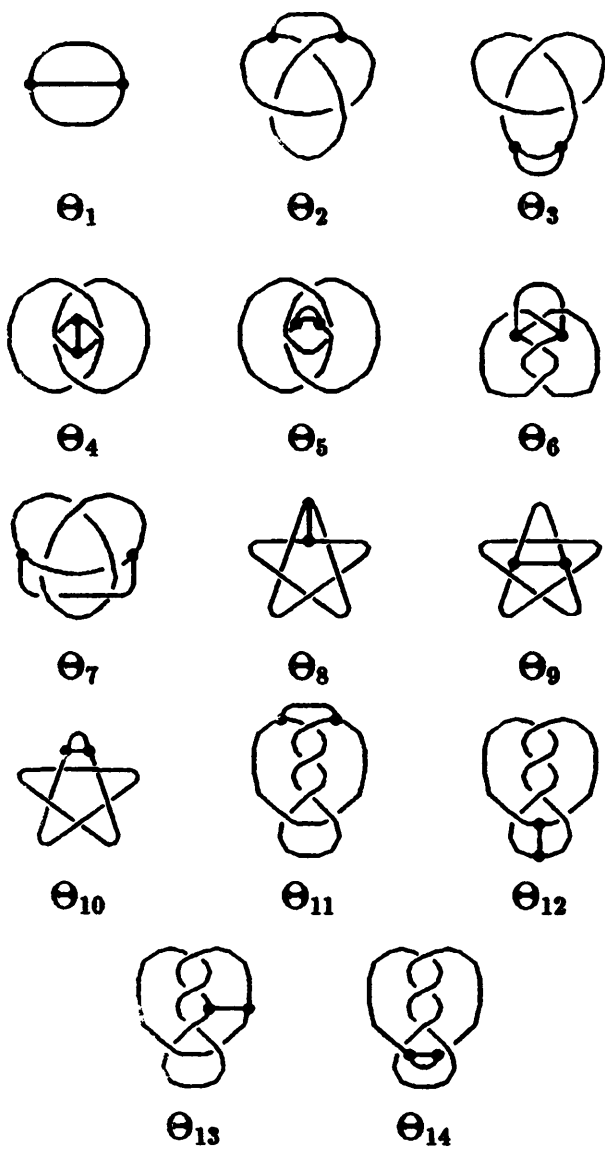
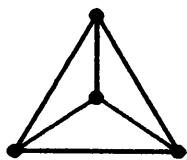
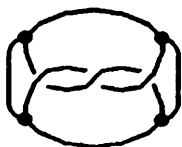
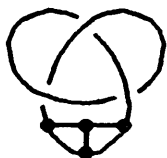
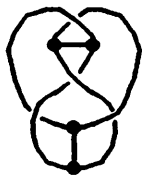


Рис.8.  $\Theta$ -графы с числом двойных точек не более 5.


 $\Omega_1$ 

 $\Omega_2$ 

 $\Omega_3$ 

 $\Omega_4$ 

 $\Omega_5$ 

 $\Omega_6$ 

 $\Omega_7$ 

 $\Omega_8$ 

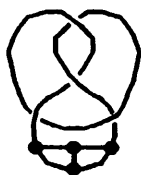
 $\Omega_9$ 

 $\Omega_{10}$ 

Рис.9.  $\Omega$ -графы с числом двойных точек не более 4.

$$R(\Theta_6) = A^8 + A^7 - A^6 + A^5 + A^4 - A^3 + A + \\ + 2A^{-1} + A^{-2} + 2A^{-3} - A^{-5} + A^{-6} - 2A^{-7} - A^{-8} + A^{-9},$$

$$R(\Theta_7) = A^8 + A^7 - 2A^3 - 2A^2 - A - 2 - \\ - A^{-2} + A^{-3} + A^{-6} - A^{-7} - A^{-8},$$

$$R(\Theta_8) = -A^{11} - A^9 + A^7 + A^5 + A^3 + \\ + A^{-3} + A^{-4} + A^{-5} + A^{-6} + A^{-7},$$

$$R(\Theta_9) = -A^9 + A^8 + A^5 + A^3 + A - \\ - A^{-1} - A^{-2} - A^{-3} - 2A^{-4} - A^{-5} - A^{-6} - A^{-7} - A^{-8},$$

$$R(\Theta_{10}) = -A^{11} - A^9 + A^7 + A^6 + 2A^5 + A^4 + A^3 - \\ - A^{-2} - A^{-3} - 2A^{-4} - 2A^{-5} - 2A^{-6} - A^{-7} - A^{-8},$$

$$R(\Theta_{11}) = A^8 - A^6 - A^3 + A^2 + A + \\ + A^{-1} - A^{-2} - 2A^{-4} - A^{-5} - 2A^{-7} - A^{-8} - A^{-10},$$

$$R(\Theta_{12}) = -A^9 - A^6 + A^4 + A^2 + 2A + \\ + A^{-1} - A^{-2} + A^{-3} + 2A^{-6} + A^{-9},$$

$$R(\Theta_{13}) = -A^9 + A^7 + 2A^4 + A - 1 - 2A^{-2} - A^{-4} - 2A^{-5} - A^{-7} - 2A^{-8},$$

$$R(\Theta_{14}) = -A^9 + A^5 + A^4 + A^2 + A + \\ + A^{-1} - A^{-2} - 2A^{-4} - 2A^{-5} - A^{-6} - 2A^{-7} - A^{-8} - A^{-10}.$$

Далее приводится полином Ямады для пространственных  $K_4$ -графов малого порядка с числом двойных точек не более 4, приведенных на рис. 9.

$$R(\Omega_1) = A^3 + 2A + 2A^{-1} + A^{-3},$$

$$R(\Omega_2) = A^8 + A^6 + A^5 - A^4 + A^3 - 2A^2 + A - 1 + A^{-1} + A^{-2} + A^{-3} + \\ + A^{-4} + A^{-5},$$

$$R(\Omega_3) = 2A^6 + A^4 + A^3 - 2A^2 - 4 - A^{-1} - 3A^{-2} - A^{-3} + A^{-7},$$

$$R(\Omega_4) = A^8 - A^7 + A^6 - A^4 + A^3 - 2A^2 + A - 2 - A^{-2} - A^{-3} - A^{-4} - A^{-6},$$

$$\begin{aligned}
R(\Omega_5) &= A^8 - A^7 + A^6 - A^5 - A^4 - 2A^2 + A - 1 + \\
&\quad + 2A^{-1} + A^{-2} + 2A^{-3} + A^{-4} + 2A^{-5} + A^{-7}, \\
R(\Omega_6) &= A^7 - A^6 + A^4 + A^2 + 3A + \\
&\quad + 3A^{-1} - A^{-2} + A^{-3} - A^{-4} - 2A^{-5} + A^{-6} - A^{-7} + A^{-9}, \\
R(\Omega_7) &= -A^8 - A^5 + A^4 + A^3 + 3A + \\
&\quad + 3A^{-1} + A^{-3} + A^{-4} - A^{-5} - A^{-8}, \\
R(\Omega_8) &= A^9 - A^8 + 2A^6 - A^5 + A^4 + 2A^3 - A^2 + 2A - 2 + \\
&\quad + A^{-1} - A^{-2} - A^{-3} + 2A^{-4} + 2A^{-7}, \\
R(\Omega_9) &= -A^8 + A^7 - A^5 + 2A^4 + 2A - 1 + \\
&\quad + 2A^{-1} - A^{-2} + A^{-3} + A^{-4} - A^{-5} + A^{-6} + A^{-7} - A^{-8} + A^{-9}, \\
R(\Omega_{10}) &= A^9 - A^8 + A^7 - A^5 + A^4 + 2A + \\
&\quad + 2A^{-1} + A^{-4} - A^{-5} + A^{-7} - A^{-8} + A^{-9}.
\end{aligned}$$

Полиномы  $\Omega_7$  и  $\Omega_{10}$ , согласно утверждению 1, являются симметричными, так как соответствующие вложения графа  $K_4$  являются ахиральными (зеркально эквивалентны — ми).

## 8. Ширина полинома Ямады

Понятие ширины полинома было введено и изучалось для полиномов узлов и зацеплений. Например, показано, что ширина полинома Джоунса не превосходит  $4d$ , где  $d$  есть число двойных точек диаграммы узла [6]. В этом пункте мы получим аналогичную оценку ширины полинома Ямады для диаграмм заузленных графов.

$$\text{Шириной полинома } f(G) = \sum_{i=c_{\min}}^{c_{\max}} \lambda_i A^i \text{ на графе } G$$

назовем число  $\text{span} f(G) = |c_{\max} - c_{\min}|$ , где  $c_{\max}$  и

$s_{\min}$  есть наибольший и наименьший показатели степени при переменной  $A$  в полиноме  $f$ .

Из предыдущих пунктов следует, что  $\text{span } R(G)(A)$  также является инвариантом вложенных в пространство графов. Для определения ширины полинома  $R(A)$  будет использована формула (1), связывающая его с полиномом Негами. Нам понадобится следующее вспомогательное

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** *Максимальная сумма степеней при  $t$  и  $x$  в полиноме Негами для графа с  $q$  ребрами и  $\omega$  связными компонентами равна  $\omega + q$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как следует из свойств полинома Негами, он может быть представлен в виде  $f(G) = \sum t^k x^{q-i} y^i$ , где сумма берется по всем наборам из  $q - i$  стягиваний и  $i$  удалений ребер;  $k$  равно числу компонент графа, т.е. числу получившихся в результате изолированных вершин. Стягивание ребра не изменяет числа компонент связности графа, а при удалении одного ребра число компонент графа увеличивается не более, чем на 1. Следовательно,  $k \leq \omega + i$ . Тогда сумма степеней при  $t$  и  $x$  не превосходит  $(q-i) + (\omega+i) = \omega + q$ . Если все ребра были стянуты, то получаем эту величину при  $t^\omega x^q$ .  $\square$

Ширина полинома Ямады ограничена линейной функцией от числа вершин графа и количества его двойных точек.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.** *Пусть  $G$  есть вложенный в трехмерное пространство связный регулярный граф степени  $r$  с числом вершин  $p$  и  $d$  двойными точками в диаграмме. Тогда для ширины полинома Ямады  $R(G)$  справедливо неравенство:  $\text{span } R(G) \leq p(r-2) + 4d + 2$ . При этом равенство достигается на графах без двойных точек, т.е. при  $d=0$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим вначале значение  $c_{\max}$ . Пусть оно было достигнуто при вычислении полинома Негами на некотором графе  $G_1$  с числом вершин  $p_1$  и числом ребер  $q_1$ , полученном из  $G$  разводкой  $n$  двойных точек операциями типа  $s_+$  и  $s_-$  в количестве  $m_1$  и  $m_2$  штук соответственно. По утверждению 3, наибольшую степень при  $A$  даст член  $\frac{1}{b^{p_1}} A^{m_1-m_2} t x^{q_1}$  из формулы (2).

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(-A-2-A^{-1})^{p_1}} A^{m_1-m_2} (A+2+A^{-1}) (-A-2-A^{-1})^{q_1} \leq \\ & \leq (-1)^{p_1} \frac{A^{p_1}}{(A+1)^{2p_1}} A^d (-1)^{q_1} \frac{(A+1)^{2(q_1+1)}}{A^{q_1+1}}. \end{aligned}$$

Так как  $p_1 = p + d - n$ ,  $a = (pr + 4(d-n))/2$ ,  $d > 0$  и  $n \geq 1$ , то

$$A^{c_{\max}} \leq A^{p(r-2)/2+2d+1-n} \leq A^{p(r-2)/2+2d+1}.$$

Полином для зеркального образа  $G$  есть  $R(G)(A^{-1})$ , откуда немедленно получаем

$$|c_{\min}| \geq p(r-2)/2+2d+1.$$

Вышеприведенные выражения зависели только от оценки значения  $m_1-m_2$ . Так как для  $G$  как абстрактного графа эта разность всегда нулевая, то на  $G$  достигается точное равенство.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для пространственного связного кубического графа  $\text{span } R(G) \leq p + 4d + 2$ .



В табл.3 приводятся численные значения ширины полинома для  $\Theta$ - и  $\Omega$ -графов (рис. 8, 9) и значения полученной оценки.

Т а б л и ц а    3  
Ширина полинома  $R(A)$

	$\Theta$ -графы				$\Omega$ -графы		
d	0	3	4	5	0	3	4
span	4	13	16	19	6	15	18
оценка	4	16	20	24	6	18	22

### 9. Редуцированный полином Ямады

Пусть  $G^*$  есть произвольное заузленное вложение абстрактного графа  $G$ . Лорановский полином  $Y(G^*)(A) = R(G^*)/H(G)$  назовем *редуцированным полиномом Ямады* пространственного графа  $G^*$ . Ясно, что  $Y(G^*)$  является полиномиальным инвариантом в классе пространственных вложений абстрактного графа  $G$ . Ширина редуцированного полинома  $Y$  меньше ширины полинома Ямады пространственного графа  $G^*$  на величину  $\text{span}H(G)$ , т.е.  $\text{span}Y(G) = \text{span}R(G) - \text{span}H(G)$ . Для произвольного пространственного графа  $G$  в точках  $A = \pm 1$  будет выполняться равенство  $|Y(G)(\pm 1)| = 1$ . Ниже табулирован редуцированный полином Ямады для  $\Theta$ -графов (см. диаграммы на рис. 8).

$$Y(\Theta_1) = 1,$$

$$Y(\Theta_2) = -A^4 + A^3 + A^2 - 2A + 1 + A^{-1} - A^{-2} + A^{-4},$$

$$Y(\Theta_3) = A^5 - A^4 - A^3 + A^2 - A + A^{-1} + A^{-4},$$

$$Y(\Theta_4) = -A^5 + A^4 + 2A^3 - 3A^2 + 4 - 3A^{-1} - A^{-2} + 3A^{-3} + A^{-4} - A^{-5} + A^{-6},$$

$$Y(\Theta_5) = A^6 - A^5 - A^4 + 2A^3 - A^2 - A + 3 -$$

$$\begin{aligned}
& -A^{-1} - A^{-2} + 2A^{-3} - A^{-4} - A^{-5} + A^{-6}, \\
Y(\Theta_6) = & -A^6 + 3A^4 - 3A^3 - 3A^2 + 7A - 1 - \\
& - 8A^{-1} + 6A^{-2} + 2A^{-3} - 6A^{-4} + 2A^{-5} + 2A^{-6} - A^{-7}, \\
Y(\Theta_7) = & -A^6 + 2A^4 - A^3 - 2A^2 + 4A + 1 - \\
& - 5A^{-1} + 3A^{-2} + 2A^{-3} - 3A^{-4} + A^{-6}, \\
Y(\Theta_8) = & A^9 - A^8 + A^6 - 2A^5 + A^4 + A^3 - 2A^2 + 2 - \\
& - A^{-1} - A^{-2} + A^{-3} - A^{-5}, \\
Y(\Theta_9) = & A^7 - 2A^6 + 3A^4 - 3A^3 - A^2 + 3A - 1 - \\
& - 2A^{-1} + 2A^{-2} + A^{-3} - A^{-4} + A^{-6}, \\
Y(\Theta_{10}) = & A^9 - A^8 + A^6 - 2A^5 + A^3 - A^2 + 1 - A^{-1} + A^{-3} + A^{-6}, \\
Y(\Theta_{11}) = & -A^6 + A^5 + 2A^4 - 3A^3 - A^2 + 5A - 3 - \\
& - 4A^{-1} + 6A^{-2} - A^{-3} - 3A^{-4} + 3A^{-5} - A^{-7} + A^{-8}, \\
Y(\Theta_{12}) = & A^7 - A^6 - A^5 + 3A^4 - A^3 - 4A^2 + 4A + 1 - \\
& - 6A^{-1} + 4A^{-2} + 2A^{-3} - 4A^{-4} + A^{-5} + A^{-6} - A^{-7}, \\
Y(\Theta_{13}) = & A^7 - A^6 - 2A^5 + 3A^4 + A^3 - 6A^2 + 3A + 5 - \\
& - 7A^{-1} + A^{-2} + 5A^{-3} - 3A^{-4} - A^{-5} + 2A^{-6}, \\
Y(\Theta_{14}) = & A^7 - A^6 - A^5 + 2A^4 - A^3 - 2A^2 + 3A - 1 - \\
& - 3A^{-1} + 4A^{-2} - A^{-3} - 2A^{-4} + 3A^{-5} - A^{-7} + A^{-8}.
\end{aligned}$$

Далее приводится полином  $Y(G)$  для  $\Omega$ -графов малого порядка (см. диаграммы на рис. 9)

$$\begin{aligned}
Y(\Omega_1) &= 1, \\
Y(\Omega_2) &= A^5 - A^3 + A^2 - A - 1 + A^{-1} + A^{-2}, \\
Y(\Omega_3) &= 2A^3 - 3A + 1 - 2A^{-2} + A^{-4}, \\
Y(\Omega_4) &= A^5 - A^4 - A^3 + 2A^2 - A - 1 + A^{-1} - A^{-3},
\end{aligned}$$

$$Y(\Omega_5) = A^5 - A^4 - A^3 + A^2 - A + A^{-1} + A^{-4},$$

$$Y(\Omega_6) = A^6 - 3A^4 + A^3 + 2A^2 - 3A + 2 + 3A^{-1} - 2A^{-2} - A^{-3} + A^{-4},$$

$$Y(\Omega_7) = -A^5 + 2A^3 - A^2 - A + 3 - A^{-1} - A^{-2} + 2A^{-3} - A^{-5},$$

$$Y(\Omega_8) = A^6 - A^5 - 2A^4 + 4A^3 + A^2 - 5A + 3 + 2A^{-1} - 4A^{-2} + 2A^{-4},$$

$$Y(\Omega_9) = -A^5 + A^4 + 2A^3 - 3A^2 + 4 - 3A^{-1} - A^{-2} + 3A^{-3} - A^{-4} - A^{-5} + A^{-6},$$

$$Y(\Omega_{10}) = A^6 - A^5 - A^4 + 2A^3 - A^2 - A + 3 - A^{-1} - A^{-2} + 2A^{-3} - A^{-4} - A^{-5} + A^{-6}.$$

Заметим, что для зеркальных диаграмм  $g$  и  $g'$  также выполняется равенство  $Y(g)(A) = Y(g')(A^{-1})$  аналогично утверждению 1.

## 10. Вычисление полинома Ямады

Вычисление полинома Ямады основано на формуле (1), сводящей его вычисление к вычислению полинома Негами. Получение полинома Негами было подробно описано в [19]. Процесс вычисления полинома  $R(G)(A)$  включает следующие этапы.

1. Компьютерное представление пространственного графа и его ввод.

2. Применение к диаграмме пространственного графа операций  $s_+$ ,  $s_-$  и  $s_0$  для  $d$  двойных точек. В результате по диаграмме строятся  $3^d$  мультиграфов без двойных точек.

3. Аналитическое вычисление полинома Негами  $f(t, x, y)$  для всех полученных мультиграфов. Результатом является список полиномов в символьном виде.

4. Подстановка в полиномы Негами вместо переменных  $t, x$  и  $y$  значений  $t \rightarrow (A+2+A^{-1})$ ,  $x \rightarrow -(A+2+A^{-1})$

и  $u \rightarrow 1$ , и умножение полинома на нужные коэффициенты, согласно формуле (2).

5. Сложение и упрощение всех полученных полиномов средствами пакета аналитических вычислений DERIVE. В результате формируется полином Ямады  $R(G)(A)$  исходного пространственного графа

Далее мы кратко опишем каждый из этих этапов. Более подробно будет обсуждаться лишь реализация этапа 2.

1. Представление графов, вложимых в пространство. Для компьютерного представления диаграмм графов, вложенных в трехмерное пространство, было использовано их изображение на плоскости в виде обыкновенных графов с кратными ребрами и метками на вершинах. Рассмотрим диаграмму графа  $G$  с тремя двойными точками на рис.10 и построим для него представление  $H$ . Двойная точка  $G$  заменяется в  $H$  на новые вершины степени 4 и четыре вспомогательные вершины степени 2 (см. рис.10). Двойные ребра в  $H$  соответствуют ребру  $G$ , проходящему сверху в данной двойной точке. При этом должно выполняться следующее требование: если в вершину степени 4 поместить начало прямоугольных координат, то все четыре вершины степени 2 должны находиться в разных квадрантах. Вершины графа  $G$  помечаются в  $H$  символом ' $v$ '. На кратные ребра в  $G$ , не обрабатывающие двойных точек, ставятся вспомогательные вершины степени 2 (см.рис.10). Поэтому в  $H$  кратные ребра будут появляться только при замене двойных точек  $G$ . Нетрудно показать, что по такому представлению однозначно восстанавливается соответствующая диаграмма вложенного в пространство графа.

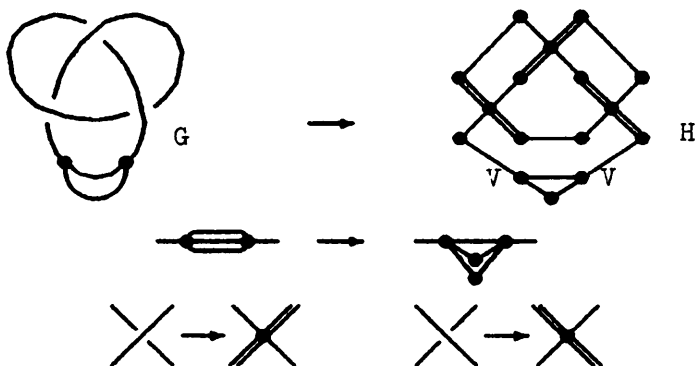


Рис. 10

Так как на гомеоморфных графах значения полинома Ямады совпадают, то для удобства ввода на ребра можно добавлять столько вершин степени 2, сколько позволяют ограничения реализации программы. После второго этапа все вершины степени 2 гомеоморфно стягиваются (кроме вершин в изолированных петлях).

Для правильного определения по  $H$  типа двойных точек необходимо также знать двумерные координаты всех вершин графа  $H$ . Для ввода описанных представлений заузленных графов использовался графический редактор, дающий на выходе запись о структуре графа в виде линейного кода смежности графа на языке OGRA [20] и двумерные координаты вершин. Текст программы вычисления полинома Ямады в приложении 2 содержит простую процедуру интерактивного ввода информации о графе и координатах его вершин.

2. Разводка двойных точек диаграммы. Нами будет описан алгоритм применения операций  $s_+$ ,  $s_-$  и  $s_0$  к двойным точкам диаграммы пространственного графа.

Пусть диаграмма заузленного графа  $G_0$  имеет  $d$  двойных точек. Так как к каждой двойной точке применяются три операции независимо друг от друга, то в результате будут порождены  $3^d$  незаузленных (абстрактных) графов. Занумеруем все двойные точки  $G_0$  последовательно от 1 до  $d$  и определим двоичный вектор  $r$ ,  $i$ -й элемент которого  $r_i = 0$ , если к  $i$ -й двойной точке будет применяться операция  $s_0$ , и  $r_i = 1$  в противном случае (т.е. при операциях  $s_+$  или  $s_-$ ).

В приведенном ниже алгоритме в соответствии с вектором  $r$  процедура ОПЕРАЦИЯ\_СО\_ДЛЯ\_ГРАФА заменяет двойные точки на новые вершины. Обозначим через  $U(r)$  функцию, значение которой равно числу компонент  $r$  равных 1. Тогда результирующий граф  $G_r$  будет иметь  $U(r)$  двойных точек. Заметим, что в используемом представлении диаграмм пространственных графов двойные точки уже заменены на вершины. Поэтому при реализации алгоритма достаточно заменить двойные ребра на простые для соответствующих вершин представления графа  $G_0$ .

Процедура ОПЕРАЦИИ\_РАЗВОДКИ\_ГРАФА в двойных точках графа  $G_r$  осуществляет переключение ребер в соответствии с операциями  $s_+$  и  $s_-$ . Полученные графы накапливаются в наборе  $G$ . Для каждого графа из  $G$  в векторе  $A$  запоминается величина  $s_+ - s_-$ , являющаяся показателем степени при  $A$  в множителе формулы (2) вычисления полинома.

АЛГОРИТМ 1. Порождение по диаграмме пространственного графа  $G_0$  всех незаузленных графов операциями разводки двойных точек.

Вход: Пространственный граф  $G_0$  с  $d$  двойными точками;

Выход:

1. Набор  $\mathcal{G}$  незаузенных графов, полученных из  $G_0$ ;
2. Вектор  $\mathcal{A}$  величин  $s_+ - s_-$  для множителя из  $(*)$ ;

Метод:

1.  $\mathcal{G} := \mathcal{A} := \emptyset$ ;
2. Для  $r := 0$  до  $2^d - 1$  цикл
  - 2.1. ОПЕРАЦИЯ\_СО\_ДЛЯ\_ГРАФА ( $G_0, r; G_r$ );
  - 2.2.  $m := U(r)$ ;
  - 2.3. ОПЕРАЦИИ\_РАЗВОДКИ\_ГРАФА ( $G_r, m; \mathcal{G}_r, \mathcal{A}_r$ );
  - 2.4.  $\mathcal{G} := \mathcal{G} + \mathcal{G}_r$ ;
  - 2.5.  $\mathcal{A} := \mathcal{A} + \mathcal{A}_r$ ;

Конец;

Набор  $\mathcal{G}_r$  состоит из  $2^{U(r)}$  графов, а в наборе  $\mathcal{G}$  в результате окажется  $\sum_{r=0}^{2^d} 2^{U(r)} = \sum_{i=0}^d C_d^i 2^i = 3^d$  графов.

Пусть все двойные точки заузенного графа  $G_r$  занумерованы последовательно от 1 до  $m$ . Определим двоичный вектор  $t$ ,  $i$ -й элемент которого  $t_i = 1$ , если к  $i$ -й двойной точке будет применяться операция  $s_+$ , и  $t_i = 0$  в противном случае (т.е. при операции  $s_-$ ).

Процедура-функция ТИП\_ДВОЙНОЙ\_ТОЧКИ определяет какое ребро в двойной точке диаграммы графа проходит сверху.

Процедура ОПЕРАЦИИ\_РАЗВОДКИ\_ТОЧКИ в  $i$ -й двойной точке графа  $G_r$  осуществляет переключение ребер в соответствии с операцией  $s_+$  или  $s_-$ . Полученные графы накапливаются в наборе  $\mathcal{G}_r$ . Для каждого графа из  $\mathcal{G}_r$  в векторе  $\mathcal{A}_r$  запоминается величина  $s_+ - s_-$ .

Процедура. ОПЕРАЦИИ\_РАЗВОДКИ\_ГРАФА ( $G_r, m; \mathcal{G}_r, \mathcal{A}_r$ );

Вход: Заузенный граф  $G_r$  с  $m$  двойными точками;

Выход:

1. Набор  $G_r$  незаузленных графов, полученных из  $G_r$ ;
2. Вектор  $A_r$  величин  $s_+$  -  $s_-$  для множителя из (2);

Метод:

1.  $G_r := A_r := \emptyset$ ;
2. Для  $t := 0$  до  $2^m - 1$  цикл
  - 2.1.  $s_+ := s_- := 0$ ;
  - 2.2.  $G_t := G_r$ ;
  - 2.3. Для  $i := 1$  до  $m$  цикл
    - 2.3.1.  $Type\_Ver := \text{ТИП\_ДВОЙНОЙ\_ТОЧКИ}(i)$
    - 2.3.2. Если  $t_i = 1$  то  $s_+ := s_+ + 1$  иначе  $s_- := s_- + 1$ ;
    - 2.3.3. ОПЕРАЦИЯ\_РАЗВОДКИ\_ТОЧКИ( $i, t_i, Type\_Ver, G_t$ );
  - 2.4.  $G_r := G_r + G_t$ ;
  - 2.5.  $A_r[t] := s_+ - s_-$ ;

Конец;

Напомним, что по построению представления заузленного графа двойная точка заменяется на вершину  $V$  так, что все четыре вспомогательные вершины находятся в разных квадрантах, если начало прямоугольных координат находится в  $V$ . В зависимости от типа операции ( $s_+$  или  $s_-$ ) ее координаты задают ось по  $X$  или  $Y$  таким образом, что вспомогательные вершины, лежащие по одну сторону от оси, соединяются ребром при соответствующей операции. Вершина  $V$  при этом удаляется из графа. Тип двойной точки кодируется символами '/' или '\', показывающими какое ребро проходит сверху.

Процедура. ОПЕРАЦИЯ\_РАЗВОДКИ\_ТОЧКИ( $k, t_k, Type\_Ver, G_t$ );

Вход:

1. Заузленный граф  $G_t$ ;
2. Двойная точка  $Ver$  с порядковым номером  $k$  графа  $G_t$ ;
3. Тип применяемой операции  $t_k$ ;
4. Тип двойной точки  $Type\_Ver$ ;



Выход: Незаузленный граф  $G_t$ ;

Метод:

1. Если (Type\_Ver='/' и  $t_k=1$ ) или (Type\_Ver='\ ' и  $t_k=0$ )  
то
    - 1.2. Axis:= {Координата X двойной точки};
    - 1.3. Для i:=1 до 4 цикл  
C[i]:={Координата X для i-го соседа вершины Ver};  
иначе
    - 1.5. Axis:={Координата Y двойной точки};
    - 1.6. Для i:=1 до 4 цикл  
C[i]:={Координата Y для i-го соседа вершины Ver};
  2. comment Разделяем вершины по разные стороны от оси;
    - 2.1. U1:=U2:=0;
    - 2.2. Для i:=1 до 4 цикл  
если C[i] < Axis то
      - 2.2.1. U1:=U1 + 1;
      - 2.2.2. Side1[U1]:={i-й сосед вершины Ver};иначе
      - 2.2.3. U2:=U2 + 1;
      - 2.2.4. Side2[U2]:={i-й сосед вершины Ver};
  3. Удалить вершину Ver из графа;
  4. Соединить вершины Side1[1],Side1[2],Side2[1],Side2[2];
- Конец;

3. Вычисление полинома Негами. Свойства полинома Негами даны в основополагающей работе [5]. Алгоритм и текст программы вычисления этого полинома для графов без петель и кратных ребер приводятся в [19]. В приложении 3 указаны необходимые изменения программы для правильного вычисления полинома Негами для графов с кратными ребрами и петлями. Вычисленные

полиномы раскладываются по степеням  $x$  и  $y$  и записываются в текстовый файл как символьные строки.

4. Замена переменных в полиноме. На этом этапе производится подстановка в полином Негами символьных значений для переменных  $t, x$  и  $y$  согласно формуле (1). Именно, переменная  $t$  заменяется на полином  $(A+2+A^{-1})$ , вместо  $x$  подставляется полином  $-(A+2+A^{-1})$  и  $y$  заменяется на 1. Каждый полином умножается на соответствующий множитель  $A^k$ , зависящий от числа  $s_+ - s_-$  при разводке двойных точек диаграммы данного графа. Эти множители определяются на этапе 2 и находятся в текстовом файле. Полученные в результате полиномы записываются в текстовый файл (без приведения подобных членов).

Выделение этой процедуры в отдельный этап объясняется тем, что через полином Негами выражаются многие известные полиномы типа  $v$ -функций Татта, среди которых потоковый полином, полином Татта, хроматический полином [5]. Таким образом, производя различные подстановки в полиноме Негами, можно получать другие полиномы и изучать их свойства.

5. Получение окончательного вида полинома. На этом этапе был использован пакет аналитических вычислений DERIVE. Так как полиномы во всех текстовых файлах представлены в формате этого пакета, производилась непосредственная загрузка файлов с полиномами, их автоматическое упрощение и суммирование (режим Demo). В силу большого количества полиномов (для графа с 5-ю двойными точками - 243 полинома длиной до 1000 символов) и ограничений пакета данные размещались в нескольких файлах, которые обрабатывались последовательно.

## З а к л ю ч е н и е

В работе исследованы свойства полиномиального инварианта Ямады для графов, вложенных в трехмерное пространство.

Получены явные формулы для одного семейства пространственных графов. Дана оценка ширины инвариантного полинома для вложений регулярных графов через порядок графа и число двойных точек в проекции.

Разработаны алгоритмы и программные средства для вычисления полиномиальных инвариантов пространственных графов. Полином Ямады табулирован для пространственных графов малого порядка, изоморфных  $\Theta$ -графу и полному графу  $K_4$ . Результаты работы могут найти применение при создании экспертных, информационно-поисковых и регистрационных систем в биологии и химии.

## Л и т е р а т у р а

1. CONWAY J.H., GORDON C.McA. Knots and links in spatial graphs //J.Graph. Theory.-1983. - Vol. 7. -P. 445-453.
2. YAMAMOTO M. Knots in spatial embeddings of the complete graph on four vertices //Topology Appl. 1990.- Vol. 36, N 3.- P. 291-298.
3. KAUFFMAN L.H. Invariants of graphs in three-space //Trans.Amer.Math.Soc. - 1989. - Vol. 311, N 2. -P. 697-710.
4. SCHARLEMANN M., THOMPSON A. Detecting unknotted graphs in 3-space //J.Diff.Geom. - 1991. - Vol.34. -P. 539-560.
5. NEGAMI S. Polynomial invariants of graph // Trans. Amer. Math. Soc. -1987.- Vol.299.- P.601-622.
6. KAUFFMAN L.H. New invariants in the theory of knots //Amer. Math. Monthly.- 1988.-Vol.95, N 3. -P. 137-242.

7. MURASUGI K. On invariants of graphs with applications to knot theory //Trans. Amer. Math. Soc. - 1989. - Vol. 414, N 1. - P. 1-49.

8. JAEGER F. On Tutte polynomials and link polynomials //Proc. Amer. Math. Soc.-1988.- Vol. 103. - P. 647-654.

9. АТИЯН М.Ф. The Geometry and Physics of Knots. - Cambridge Univ. Press., 1990.

10. SCHILL G. Catenanes, Rotaxanes, and Knots. - Academic. Press, 1971.

11. WALBA D.M.et. al. Total synthesis of the first molecular Mobius strip //J.Amer. Chem. Soc. - 1984. - Vol. 104. - P. 3219-3221.

12. Notices of the Amer. Math. Soc. - 1995.-Vol. 42, N 5.

13. New Scientific Applications of Geometry and Topology //Proc. Sympos. Appl. Math. (D.W.Sumners, Ed.) - Vol. 45, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1994.

14. YAMADA S. An invariant of spatial graphs // J.Graph Theory 1989. - Vol. 13. - P. 537-551.

15. ТАТТ У. Теория графов. - М.: Мир, 1988.

16. REIDEMEISTER K. Knotentheorie. - Chelsea Publishing Co.: New York., 1948.

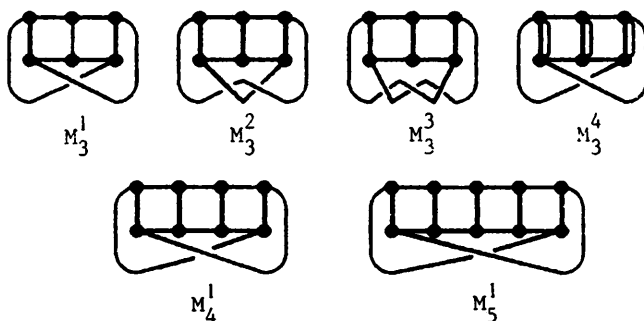
17. SHIMABARA M. Knots in certain spatial graphs //Tokyo J.Math. - 1988. - Vol.11, N 2.- P.405-414.

18. SIMON J. A topological approach to the stereochemistry on nonrigid molecules //Graph theory and topology in chemistry (Studies in Physical and Theoretical Chemistry. 51). - 1987. - P. 43-75.

19. ВЕСНИН А.Ю., ДОБРЫНИН А.А. Полином негами графов, составленных из многоугольников //Теория графов и ее приложения. - Новосибирск, 1994.- Вып. 151: Вычислительные системы. - С. 3-36.

20. КОЧЕТОВА А.А., СКОРОБОГАТОВ В.А., ХВОРОСТОВ П.В. Язык описания структурной информации ОГРА 3.0 //Машинные методы обнаружения закономерностей, анализа структур и проектирования. - Новосибирск, 1982. - Вып. 92: Вычислительные системы. - С. 70-79.

Полином Ямады для пространственных вложений  
лестниц Мебиуса



$$R(M_3^1) = 2A^3 - A^2 + 4A - 3 + 3A^{-1} - 4A^{-2} + A^{-3} - 2A^{-4},$$

$$R(M_3^2) = A^4 + A^3 + 3A - 3 + 3A^{-1} - 5A^{-2} + A^{-3} - 4A^{-4} - A^{-5} - A^{-6} - A^{-7},$$

$$R(M_3^3) = -A^7 + A^6 - 8A^5 + 7A^4 - 16A^3 + 25A^2 + 3A + 58 + 47A^{-1} + 79A^{-2} + 66A^{-3} + 59A^{-4} + 40A^{-5} + 23A^{-6} + 9A^{-7} + 4A^{-8},$$

$$R(M_3^4) = -A^6 - A^5 - 9A^4 - 5A^3 - 26A^2 - 7A - 29 + 10A^{-1} - 6A^{-2} + 24A^{-3} + 6A^{-4} + 13A^{-5} + 2A^{-6} + 2A^{-7},$$

$$R(M_4^1) = -A^4 + 4A^3 - 5A^2 + 11A - 8 + 14A^{-1} - 7A^{-2} + 10A^{-3} - 3A^{-4} + 3A^{-5},$$

$$R(M_5^1) = A^5 - 4A^4 + 11A^3 - 19A^2 + 26A - 35 + 30A^{-1} - 36A^{-2} + 20A^{-3} - 20A^{-4} + 6A^{-5} - 4A^{-6}.$$

Программа разводки двойных точек заузленного графа  $G$   
и получения всех слагаемых для вычисления  
полинома Ямады  $R(G)$  по формуле (2)  
(без приведения подобных членов)

```

PROGRAM YamaMain;
uses YamaType, YamaProc;
var d, r, I : integer;
begin
  InputGraph;
  assign(FileGraph, 'graph3d.dat');
  rewrite(FileGraph);
  assign(FilePower, 'power3d.dat');
  rewrite(FilePower);
  NumbG := 0;
  NumberingDoubleVer(G0, d);
  writeln(FileGraph, Power(3, d):5);
  writeln(FileGraph);
  writeln(FilePower, Power(3, d):5);
  writeln(FilePower);
  for r := 0 to Power(2, d) - 1 do
    begin
      ApplyS0toAllVer(G0, Gr, r, d, NonS0);
      ApplySpSmToAllVer(Gr, NonS0);
    end;
  close(FileGraph);
  close(FilePower);
end. { YamaMain }

```

```

UNIT YamaType;
interface
const
  MaxOrderGraph = 30;
  MaxValence     = 4;
  MaxValence1    = MaxValence+1;
  DownToUp       = '/';
  UpToDown       = '\';

```

```

type
  TypeOrder = 1..MaxOrderGraph;
  TypeNeib = array [1..MaxValence1] of integer;
  XYZ      = record X,Y,Z : integer; end;
  TypeSpis = array [TypeOrder] of TypeNeib;
  TypeLabel = array [TypeOrder] of char;
  TypeWgt   = array [TypeOrder, 1..MaxValence1] of real;
  TypeArray = array [TypeOrder] of integer;
  TypeCoord = array [TypeOrder] of XYZ;
  TypeGraph = record
    Order : integer;
    Spis  : TypeSpis;
    Spiw  : TypeWgt;
    Lab   : TypeLabel;
    Coord : TypeCoord;
  end;

var
  FileGraph : text;
  FilePower : text;
  Numbering : TypeArray;
  NonS0      : integer;
  NumbG      : integer;
  G0, Gr     : TypeGraph;
  Bits       : array[1..15] of integer;

implementation
var I : integer;
begin
  Bits[1] := 1;
  for I := 2 to 15 do Bits[I] := Bits[I-1] * 2;
end. { YamaType }

UNIT YamaProc;
interface
uses YamaType;
procedure ApplyS0toAllVer (var G0,Gr: TypeGraph;
                          var r,d,NonS0: integer);
procedure ApplySpSmToAllVer (var Gr: TypeGraph;
                             var NonS0: integer);

```

## Продолжение приложения 2

```

procedure NumberingDoubleVer (var G: TypeGraph;
                               var d: integer );

procedure InputGraph;
function Power ( C, N: integer ): integer;
implementation
procedure InputGraph;
label 1, 2;
var I, J, N, Neig : integer;
begin
  with G0 do
    begin
1:  write('Input number of graph vertices ->');
      readln(Order);
      if Order > MaxOrderGraph then
        begin
          writeln('Invalid number of graph vertices.');
          goto 1;
        end;
      writeln('Input vertex adjacency.');
      for I := 1 to Order do
        begin
2:    writeln('Vertex ',I:3);
          write('Input number of its neighbors ->');
          readln(N);
          if N > MaxValence then
            begin
              writeln('Invalid number of vertex neighbors.');
              goto 2;
            end;
          write('Input numbering of all neighbors ->');
          Spis[I,1] := 1;
          for J := 1 to N do
            begin
              Spis[I,1] := Spis[I,1] + 1;
              read(Neig);
              Spis[I,Spis[I,1]] := Neig
            end;
          write('Input weights of neighbor edges ->');

```



```

    for J := 2 to Spis[I,1] do
        begin
            read(Weig);
            Spiw[I,J] := Weig;
        end;
        writeln('-----');
    end;
    writeln;
    writeln('Input vertex coordinates. ');
    for I := 1 to Order do
        begin
            writeln('Vertex ',I:3);
            write('Coordinates X Y --> ');
            readln(Coord[I].X,Coord[I].Y);
            writeln('-----');
        end;
        writeln; writeln('Input double points. ');
        write('Input number of nondouble points ->');
        readln(N);
        write('Input its numbering ->');
        for I := 1 to N do
            begin
                read(J);
                Lab[J] := 'V';
            end;
            writeln('-----');
        end; { with }
    end; { InputGraph }

function Power ( C, N: integer ): integer;
var X, I : longint;
begin
    X := C;
    if N > 0 then
        for I := 1 to N - 1 do X := X * C
        else X := 1;
    Power := X;
end; { Power }

```

```

procedure DeleteVertex ( var G: TypeGraph;
                           var Vertex: integer );

label 1;
var Ver, I, J, K : integer;
begin
with G do
  begin
    for I := 2 to Spis[Vertex,1] do
      begin
        Ver := Spis[Vertex,I];
        for J := 2 to Spis[Ver,1] do
          if Vertex = Spis[Ver,J] then
            begin
              for K := J+1 to Spis[Ver,1] do
                begin
                  Spis[Ver,K-1] := Spis[Ver,K];
                  Spiw[Ver,K-1] := Spiw[Ver,K];
                end;
              Spis[Ver,1] := Spis[Ver,1] - 1;
              goto 1;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
  for I := Vertex + 1 to Order do
    begin
      for J := 2 to Spis[I,1] do
        begin
          Spis[I-1,J] := Spis[I,J];
          Spiw[I-1,J] := Spiw[I,J];
        end;
      Spis[I-1,1] := Spis[I,1];
    end;
  end;
  for I := 1 to Order - 1 do
    for J := 2 to Spis[I,1] do
      if Spis[I,J] > Vertex then Spis[I,J] := Spis[I,J] - 1;
    end;
  end;

```

```

for I := Vertex + 1 to Order do
  begin
    Lab[I-1] := Lab[I];
    Coord[I-1].X := Coord[I].X;
    Coord[I-1].Y := Coord[I].Y;
  end;
Lab[Order] := '';
dec(Order);
end; { with }
end; { DeleteVertex }

function TypeDoublePoint ( var G: TypeGraph;
                           var Ver: integer): char;
var V: array[1..2] of integer;
    V1, V2, N, J : integer;
begin
  with G do
    begin
      N := 0;
      for J := 2 to 5 do
        if Spiw[Ver,J] = 2. then
          begin
            inc(N);
            V[N] := Spis[Ver,J];
          end;
        V1 := V[1];
        V2 := V[2];
        if Coord[V[2]].X < Coord[V[1]].X then
          begin
            V1 := V[2];
            V2 := V[1];
          end;
        if Coord[V1].Y < Coord[V2].Y then
          TypeDoublePoint := DownToUp { / }
        else TypeDoublePoint := UpToDown; { \ }
      end; { with }
    end; { TypeDoublePoint }
  end;
end;

```

## Продолжение приложения 2

```

procedure ApplySpSmToOneVer (var Ver,Ti: integer; var Gt:
                             TypeGraph;var TypeVer:char);
var C : array[1..4] of real;
    Side1, Side2 : array[1..2] of integer;
    Os, I, J, U1, U2, V1, V2 : integer;
begin
  with Gt do
    begin
      if ((TypeVer = DownToUp) and (Ti <> 0)) or
          ((TypeVer = UpToDown) and (Ti = 0))
      then
        begin
          Os := Coord[Ver].X;
          for I:=2 to 5 do C[I-1]:=Coord[Spis[Ver,I]].X;
        end
      else
        begin
          Os := Coord[Ver].Y;
          for I:=2 to 5 do C[I-1]:=Coord[Spis[Ver,I]].Y;
        end;
      U1 := 0;
      U2 := 0;
      for I := 1 to 4 do
        if C[I] < Os then
          begin
            inc(U1);
            Side1[U1] := Spis[Ver,I+1];
          end
        else
          begin
            inc(U2);
            Side2[U2] := Spis[Ver,I+1];
          end;
      DeleteVertex(Gt,Ver);
      V1 := Side1[1];
      V2 := Side1[2];
      if V1 > Ver then dec(V1);
      if V2 > Ver then dec(V2);
    end
  end
end

```

## Продолжение приложения 2

```

for J := 1 to NonS0 do
  if Numbering[J] > Ver then dec(Numbering[J]);
  inc(Spis[V1,1]);
  Spis[V1,Spis[V1,1]] := V2;
  Spiw[V1,Spis[V1,1]] := 1.;
  inc(Spis[V2,1]);
  Spis[V2,Spis[V2,1]] := V1;
  Spiw[V2,Spis[V2,1]] := 1.;
  V1 := Side2[1];
  V2 := Side2[2];
  if V1 > Ver then dec(V1);
  if V2 > Ver then dec(V2);
  inc(Spis[V1,1]);
  Spis[V1,Spis[V1,1]] := V2;
  Spiw[V1,Spis[V1,1]] := 1.;
  inc(Spis[V2,1]);
  Spis[V2,Spis[V2,1]] := V1;
  Spiw[V2,Spis[V2,1]] := 1.;
end; { with }
end; { ApplySpSmToOneVer }

procedure DeleteGomeoVertices ( var G : TypeGraph );
label 1;
var V1, V2, Ver : integer;
begin
  with G do
    begin
      1: for Ver := 1 to Order do
        if Lab[Ver] <> 'V' then
          if (Spis[Ver,1] = 3) then
            begin
              V1 := Spis[Ver,2];
              V2 := Spis[Ver,3];
              if (V1<>Ver) and (V2<>Ver) and (V1<>V2) then
                begin
                  DeleteVertex(G,Ver);
                  if V1 > Ver then dec(V1);
                  if V2 > Ver then dec(V2);
                end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

```

## Продолжение приложения 2

```

        inc(Spis[V1,1]);
        Spis[V1,Spis[V1,1]] := V2;
        Spiw[V1,Spis[V1,1]] := 1.;
        inc(Spis[V2,1]);
        Spis[V2,Spis[V2,1]] := V1;
        Spiw[V2,Spis[V2,1]] := 1.;
        goto 1;
    end;
    if (V1<>Ver) and (V2<>Ver) and (V1=V2) then
    begin
        DeleteVertex(G,Ver);
        if V1 > Ver then dec(V1);
        inc(Spis[V1,1]);
        Spis[V1,Spis[V1,1]] := V1;
        Spiw[V1,Spis[V1,1]] := 1.;
        goto 1;
    end;
end; { with }
end; { DeleteGomeoVertices }

procedure OutputGraphToFile ( var Gt: TypeGraph;
                               var NumbG: integer );
var I, J, K : integer;
begin
    with Gt do
        begin
            writeln(FileGraph,Order,' (graph ',NumbG:4,')');
            for I := 1 to Order do
                begin
                    write(FileGraph,I:3,' ',(Spis[I,1]-1):3,' ');
                    for J := 2 to Spis[I,1] do
                        write(FileGraph,Spis[I,J]:3);
                        if (Lab[I] = 'V') or (Lab[I] = 'F') then
                            write(FileGraph,' ' + Lab[I]);
                        writeln(FileGraph);
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;

```

```

        writeln(FileGraph);
    end; { with }
end; { OutputGraphToFile }

procedure ApplySpSmToAllVer ( var Gr: TypeGraph;
                             var NonS0: integer );

label 2;
var Gt : TypeGraph;
    Ver, BitT, Sm, Sp, T, I, J, NumbLoop: integer;
    Temp : TypeArray;
    TypeVer: char;
begin
    Temp := Numbering;
    for T := 0 to Power(2, NonS0) - 1 do
        begin
            Sp := 0;
            Sm := 0;
            Gt := Gr;
            Numbering := Temp;
            for I := 1 to NonS0 do
                begin
                    Ver := Numbering[I];
                    TypeVer := TypeDoublePoint(Gt, Ver);
                    BitT := (Bits[I] and T);
                    if BitT <> 0 then inc(Sp) else inc(Sm);
                    ApplySpSmToOneVer(Ver, BitT, Gt, TypeVer);
                end;
            inc(NumbG);
            DeleteGomeoVertices(Gt);
            NumbLoop := 0;
        2:   with Gt do
            for I := 1 to Order do
                if (Spis[I,1] = 2) and (I = Spis[I,2]) then
                    begin
                        inc(NumbLoop);
                        DeleteVertex(Gt, I);
                        if I < Order then goto 2;
                    end;
            end;

```

## Продолжение приложения 2

```

    OutputGraphToFile(Gt,NumbG);
    writeln(FilePower,Gt.Order:3,NumbLoop:3,
      (Sp-Sm):5,' (Sp = ',Sp:3,' Sm = ',Sm:3,')')
  end; { T }
end; { ApplySpSmToAllVer }

procedure NumberingDoubleVer ( var G: TypeGraph;
                               var d: integer );
var I : integer;
begin
  d := 0;
  for I := 1 to G.Order do
    if (G.Lab[I] <> 'V') and (G.Spis[I,1] = 5 ) then
      begin
        inc(d);
        Numbering[d] := I;
      end;
  end;
end; { NumberingDoubleVer }

procedure ApplyS0toAllVer ( var G0, Gr: TypeGraph;
                            var r, d, NonS0: integer);
var Temp : TArray;
    Ver, I, J, K : integer;
begin
  Gr := G0;
  NumberingDoubleVer(G0,K);
  NonS0 := 0;
  with Gr do
    for I := 1 to d do
      if (Bits[I] and r) = 0 then
        begin
          Ver := Numbering[I];
          for J := 2 to Spis[Ver,1] do
            Spiw[Ver,J] := 1.;
          for J := 2 to Spis[Ver,1] do
            for K := 2 to Spis[Spis[Ver,J],1] do
              if Ver = Spis[Spis[Ver,J],K] then
                Spiw[Spis[Ver,J],K] := 1.;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```



Конец приложения 2

```
        Lab[Ver] := 'F';
    end
else
    begin
        inc(NonS0);
        Temp[NonS0] := Numbering[I];
    end;
    Numbering := Temp;
end; { ApplyS0toAllVer }
begin
end. { YamaProc }
```

Изменения в программе вычисления  
полинома Негами из [19] для обработки графов  
с кратными ребрами и петлями

В процедуре Init\_Data нужно ввести новый массив

```
NotCount: array[1..MaxP, 1..MaxP+1] of boolean;
```

а в теле процедуры вставить его инициализацию первым  
оператором в главном цикле по переменной i:

```
for J:= 1 to MaxP do
  for K:= 1 to MaxP + 1 do
    NotCount[J,K]:= true;
```

Далее нужно заменить строку

```
NEdge[List[I,J],I,J]:= Q;
```

на фрагмент

```
for N:= 2 to List[List[I,J],1] do
  if(List[List[I,J],N]= I) and
    NotCount[List[I,J],N]
  then
    begin
      NotCount[List[I,J],N]:= false;
      NEdge[List[I,J],I,N]:= Q;
      break;
    end;
```

Все другие процедуры программы вычисления полинома Негами из [19] остаются без изменений.

Поступила в редакцию  
7 марта 1996 года