СТРУКТУРНЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ
СВОЙСТВА ВЫЧИСЛИМОСТИ

(Вычислительные системы)

1996 год Выпуск 156

УДК 519.68

НОВЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛИМОСТИ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М.В.Коровина, О.В.Кудинов

Введение

Классической структурой для которой хорошо определено и изучено понятие вычислимости является полукольцо натуральных чисел.

Несмотря на то, что исторически было предложено несколько определений вычислимости на N функций (Черч, Гедель, Клини, Пост, Тьюринг, Колмогоров, Марков), все они оказались эквивалентными, что само по себе явилось значительным достижением в области математической логики.

В случае, когда в качестве основной структуры рассматривается упорядоченное поле вещественных чисел ($\mathbb{R}$), ситуация существенно отличается от классической. Хотя бы в том плане, что были предложены несколько неэквивалентных понятий вычислимости (Московакис [7], Блюм [8], Ершов [3], Мясников, Беляев [9]).

Глубинной причиной явилось, по-видимому, то обстоятельство, что в изучаемом реальном явлении вычислимых вещественных процессов разным авторам наиболее существенными представлялись различные моменты.

Но в таком случае естественно ожидать, что должна существовать наиболее общая, точная формализация понятия вычислимости функции на R которая, с одной стороны, содержала бы в себе ранее рассматриваемые как частные случаи, с другой стороны, соответствующие функции действительно, хотя бы потенциально могли бы быть вычислены на подходящих ЭВМ (механических устройствах).

Именно такая формализация вычислимости предлагается в настоящей работе. Ее отличительным свойством является отказ от рассмотрения алгоритмов, т.е. процессов, заданных конечным числом инструкций и получающих результат за конечное число шагов. В предложенном подходе результат каждого из рассматриваемых процессов определяется всем его ходом вычисления, а не моментом остановки, которого может и не быть.

В принципе, такой подход уже предлагался в [6], однако вместо самого множества $\mathbb{R}$ в нем рассматривали двоичные (десятичные)записи вещественных чисел. Это представляется не совсем удобным, хотя бы в силу равенства $0.999999\ldots = 1.0000\ldots$

Предлагаемый в данной работе подход, во-первых, не зависит от способа задания вещественных чисел, во-вторых, получены структурные теоремы, связывающие график вычислимой функции либо прекрасно вычислимой функции (т.е. с дополнительными ограничениями на ход вычислений) с выполнимостью подходящей конечной формулы в $HW(\hat{\mathbb{R}})$, где $\hat{\mathbb{R}}$ — элементарной собственное расширение стандартных действительных чисел. О размерах соответствующего класса всюду опрделенных вычислимых функций можно судить по тому обстоятельству, что в него попадает подкласс вещественнозначных, всюду определенных функций, продолжение которых в C мероморфно. Этот класс содержит функции, являющиеся решением известных дифференциальных уравнений, в частности, все реально используемые в математике аналитические функции.

Разумеется, не все вопросы, связанные с предлагаемой формализацией, удалось решить. Часть из них поставлена в заключительной части статьи, на которые предполагается ответить в последующих работах.

Напомним ряд определений необходимых для изложения основного материала.

Пусть $\mathbf{R}$ — стандартная модель вещественных чисел языка $\sigma = < 0, 1, =, +, \cdot, \leq >$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Модель $\hat{\mathbf{R}}$ языка назовем простым расширением $\mathbf{R}$, если существует $t \in \hat{\mathbf{R}}, t \gg Z$ такой, что $\hat{\mathbf{R}}$ — вещественное замыкание поля $\mathbf{R}(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что простое расширение $\hat{\mathbf{R}}$ является элементарным собственным расширением $\mathbf{R}$ и единственным с точностью до изоморфизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\hat{\mathbf{R}} \succ \mathbf{R}$.

а) Введем функцию $sp: \hat{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ следующим образом:

$$sp(x) = \begin{cases} x^{\epsilon} \in \mathbf{R}, \text{ если } |x - x^*| \leq \varepsilon, \\ \qquad\qquad \text{где } 0 \ll \varepsilon \ll \mathbf{R}^+, \\ +\infty, \text{ если } x \gg \mathbf{R}, \\ -\infty, \text{ если } x \ll \mathbf{R}. \end{cases}$$

б) Через Fin обозначим множество "конечных" элементов $\hat{\mathbf{R}}$, т.е. $Fin = \{x \in \hat{\mathbf{R}} | -\infty \ll sp(x) \ll +\infty\}$.

Через $HW(\mathbf{M})$ обозначим наименьшее замыкание всех наследственно конечных слов (списков) с праэлементами из M.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу соотношения $(\alpha - sp(\alpha))^{-1} \notin Fin(\hat{\mathbf{R}})$, в любом собственном элементарном расширении $\mathbf{R}$ найдется нестандартный элемент $t \gg Z$.

Понятие Δ_0-, Σ_0-, Δ-, П-формул, Σ-определимости в модели $HW(\mathbf{M})$ стандартны [1]

1. Прекрасно вычислимые формулы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathbf{M}$ — произвольная модель. Функция $f: \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ прекрасно вычислима, если:

1) существуют две эффективные последовательности Σ-формул $\{\Phi_s(a,x,y)\}_{s\in\omega}$, $\{G_s(a,x,y)\}_{s\in\omega}$ с параметром a;

2) найдется элементарное собственное расширение стандартных действительных чисел $\tilde{\mathbf{R}} \succ \mathbf{R}$ и $t \in \tilde{\mathbf{R}}$ со свойствами:

2.1) $t \gg Z$;

2.2) для любого s формулы $\Phi_s(a,x,y)$ и $G_s(a,x,y)$ задают функции f_s, g_s соответственно:

$$f_s(x) \rightleftharpoons HW(HW(\mathbf{M}) \times \mathrm{HW}(\tilde{\mathbf{R}})) \models \Phi_s(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y}),$$

$$g_s(x) = y \rightleftharpoons HW(HW(\mathbf{M}) \times \mathrm{HW}(\mathbf{R}) \models \mathrm{G}_s(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y}),$$

со свойствами:

а) последовательности $\{f_s\}, \{g_s\}$ монотонны;

б) для любого $s \in \omega$ выполняются включения $\mathrm{dom} f_s \supseteq Fin, \mathrm{dom} g_s \supseteq Fin$;

в) для любых $s \in \omega$, $x \in \mathbf{R}$ выполняются неравенства $f_s(x) \le f(x) \le \le g_s(x)$;

г) $f(x) = y \Leftrightarrow \lim^{\hat{\mathbf{R}}}_{s\to\infty} f_s(x) = y$ и $\lim^{\hat{\mathbf{R}}}_{s\to\infty} g_s(x) = y$, где $\hat{\mathbf{R}}$ — пополнение $\tilde{\mathbf{R}}$ относительно его стандартного дискретного нормирования.

СОГЛАШЕНИЕ 1. В случае, когда $\mathbf{M} = \mathbf{R}$ в п. 2.2 истинность формул условимся проверять в модели $HW(\tilde{\mathbf{R}})$. (Не трудно понять, что при этом не происходит уменьшения общности.)

СОГЛАШЕНИЕ 2. В дальнейшем будет называть $\{f_s\}$ последовательностью аппроксимаций, сходящейся "снизу" к f, $\{g_s\}$ — последовательностью аппроксимаций, сходящейся "сверху" к f.

Докажем ряд теорем, устанавливающих связь между Σ-вычислимостью и прекрасной вычислимостью действительнозначных функций. Нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $p(x,y)$ — счетное множество совместных формул одной переменной с вещественным параметром y. Рассмотрим два элементарных, собственных расширения* *стандартных действительных чисел* $\mathbf{R}_1 \succ \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_2 \succ \mathbf{R}$. *Тогда* $p(x,y)$ *реализуется в* $\mathbf{R}_1$, *если и только если реализуется в* $\mathbf{R}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(x,y)$ удовлетворяет условию леммы. Обозначим $p(x,y) \rightleftharpoons \&_{i\in\omega}\psi_i(x,y)$; $\hat{\psi}_s(x,y) \rightleftharpoons \&_{i\leq s}\psi_i(x,y)$. Рассмотрим два случая.

<u>Случай 1.</u> Допустим $p(x,y)$ реализуется в $\mathbf{R}_1$ на $t_1 \gg Z$.

В силу 0-минимальности $\mathbf{R}$ [5] можно построить неубывающую последовательность $\{c_i\}_{i\in\omega}$ со свойствами:

а) $c_i \in \mathbf{R}$,

б) $\hat{\psi}_s(\mathbf{R}) \subseteq (c_i, +\infty)$.

Выберем $t_2 \in \mathbf{R}_2$ такое, что $t_2 \gg Z$. (Это можно сделать в силу замечания 2.)

Из свойств "а" и "б" автоматически следует: для любого $s \in \omega$ $\mathbf{R}_2 \models \hat{\psi}_s(t_2, y)$, следовательно $\mathbf{R}_2 \models p(t_2, y)$.

<u>Случай 2.</u> Формула $p(x,y)$, реализуется в $Fin(\mathbf{R}_1)$. Пусть $\mathbf{R}_1 \models p(b_1, y)$, $sp(b_1) = a \in \mathbf{R}$. Рассмотрим случай $b_1 \geq a$ (случай $b_1 \leq a$ рассматривается аналогично). Если $\mathbf{R}_1 \models p(a,y)$, то $\mathbf{R}_2 \models p(a,y)$ (так как $a \in \mathbf{R}$). Если $\mathbf{R}_1 \not\models p(a,y)$, то в силу 0-минимальности $\mathbf{R}$ для любого $i \in \omega$ найдется $\epsilon_i \in \mathbf{R}$ такое, что:

в) $b_1 \in (a, a+\epsilon_i)$,

г) $\psi_i(\mathbf{R}) \supseteq (a, a+\epsilon_i)$.

Если мы выберем в $\mathbf{R}_2$ элемент $b_2 \geq a$ и $sp(b_2) = a$, то в силу свойств "в", "г" для любого $s \in \omega$ $\mathbf{R}_2 \models \hat{\psi}_s(b_2, y)$, следовательно $\mathbf{R}_2 \models p(b_2, y)$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\hat{\mathbf{R}} \succ \mathbf{R}$. *Функция* f Σ-*определима в* $HW(\mathbf{R})$ *тогда и только тогда, когда найдется функция* $f^* : \hat{\mathbf{R}} \to \hat{\mathbf{R}}$ Σ-*определимая в* $HW(\hat{\mathbf{R}})$ *такая, что* $\mathrm{dom} f^* \subseteq Fin$, $f^*|_R = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\leftarrow$) Очевидно.

$\rightarrow$) Пусть $f(x) = y \rightleftharpoons HW(\mathbf{R}) \models \Phi(x,y)$, где Φ — Σ-формула.

Положим $\Phi^*(x,y) \rightleftharpoons \bigvee_{n\in\omega} (\Phi(x,y) \;\&\; -n \leq x \leq n)$. По теореме 9 [4] Φ^* эквивалентна Σ-формуле. Докажем что она задает функцию f^* в $HW(\bar{\mathbf{R}})$ с требуемыми свойствами. По следствию основной теоремы [3] для любой Σ-функции найдутся о.р.ф. h, ϕ и ч.р.ф. χ такие, что:

$$f(x) = y \Leftrightarrow HW(\bar{\mathbf{R}}) \models (\exists n \in N)((\nu(h(2n)) \leq x \leq$$

$$\leq \nu(h(2n+1)) \to y = g_{\psi(2n)}(x)) \vee (x = \nu(h(2n)) \to y =$$

$$= \nu(\chi(2n))) \vee (x = \nu(h(2n+1)) \to y = \nu(\chi(2n+1)))),$$

где ν — конструктивизация простой модели $Th(\mathbf{R})$, $g_{\psi(2n)}$ — алгебраическая функция с номером $\psi(2n)$. Пусть $HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \Phi^*(x,y)$, тогда найдется $n \in N$ такое, что $x \in \in < \nu(h(2n)), \nu(h(2n+1)) >$. На этом отрезке значение функции f совпадает со значением алгебраической функции $g_{\psi(2n)}$, на концах отрезка со значением композиции $\chi \circ \nu$.

По определению алгебраической функции найдется $a_i \in \mathbf{R}[x]$ такие, что для $x \in (\nu(h(2n)), \nu(h(2n+1)))$ выполняется: $f(x) = y \Leftrightarrow \sum\limits_{i \leq k} a(x)y^i = 0$; для $x = \nu(h(2n))$ выполняется $f(x) = \nu(\chi(2n))$; для $x = \nu(h(2n+1))$ выполняется $f(x) = \nu(\chi(2n+1))$.

Воспользуемся следствием из леммы 1: если формула $\sum\limits_{i \leq k} a(x)y^i = 0$ задает функцию на отрезке (x^1, x^2) в $\mathbf{R}$, то она задает функцию на отрезке (x^1, x^2) в $\bar{\mathbf{R}}$, где x^1, x^2 из простой модели. Следовательно, для $x \in Fin \cap \cap(\nu(h(2n), \nu(h(2n+1)))$ найдется единственное y, такое, что $\sum\limits_{i \leq k} a(x)y^i = 0$. Для $x \in Fin \cap \cap\{\nu(h(2n)), \nu(h(2n+ +1))\}$ единственность очевидна. Это означает, что $HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \Phi^*(x,y) \Longleftrightarrow HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \exists! y \Phi^*(x,y)$, т.е. формула Φ^* задает функцию.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ всюду определена. Функция f прекрасно вычислима тогда и только тогда, когда f — Σ-определима в $HW(\mathbf{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — Σ-определима в $HW(\mathbf{R})$, тогда по лемме 2 найдется $f^* : \bar{\mathbf{R}} \to \bar{\mathbf{R}}$ Σ-определимая функция в $HW(\bar{\mathbf{R}})$ такая, что $\mathrm{dom} f^* =$

$= Fin$, $f^*|_R = f$. Положим для любого $s \in \omega$ $f_s \equiv f^*$, $g_s \equiv f^*$, тогда f — прекрасно вычислима.

Пусть f — прекрасно вычислима, тогда найдется простое расширение $\hat{\mathbf{R}} \succ \mathbf{R}$, эффективные монотонный последовательности Σ-определимых в $HW(\hat{\mathbf{R}})$ с параметром функций $\{f_s\}, \{g_s\}$. Последовательность аппроксимаций $\{f_s\}$ сходится "снизу" к f, последовательность аппроксимаций $\{g_s\}$ сходится "сверху" к f.

Из свойств предела в простом расширении [10], начиная с $s_0 \in \omega$, для любых $s \geq s_0$, для $x \in \mathbf{R}$ выполняются равенства: $sp(f_s(x)) = sp(g_s(x)) = f(x)$. Обозначив для любого $s \in \omega$ функции $sp(f_s(x)) = \hat{f}_s(x), sp(g_s(x)) = \hat{g}_s(x)$, получим: $f(x) = y \Leftrightarrow HW(\hat{\mathbf{R}}) \models (\exists s \in N)\hat{f}_s(x) = \hat{g}_s(x)$. Докажем, что для любого $s \in \omega$ функции $\hat{f}_s, \hat{g}_s$ Σ-определимы в $HW(\mathbf{R})$. Пусть $f_s(x) = y \Leftrightarrow HW(\hat{\mathbf{R}}) \models \bigvee_{j\in\omega} \varphi_{sj}(x, y, \varepsilon)$, где φ_{sj} — бескванторная формула, $\varepsilon = \dfrac{1}{t}$.

Нетрудно показать с использованием 0-минимальности $\mathbf{R}$,что:

$$\hat{f}_s(x) = y \Leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models \bigvee_{m,j\in\omega} \{(\forall\varepsilon \gg 0)(\exists\varepsilon_1 \leq \varepsilon)(\varepsilon_1 \gg$$

$$\gg 0 \;\&\; \exists y_1)[\,|y - y_1| \leq \varepsilon^{\overline{m_1}} \;\&\; \varphi_{sj}(x, y, \varepsilon_1)]\}.$$

Отсюда следует Σ-определимость $\hat{f}_s$ и $\hat{g}_s$ в $HW(\mathbf{R})$ и, как следствие, функции f в $HW(\mathbf{R})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Всюду определенные вещественнозначные прекрасно вычислимые функции замкнуты относительно композиции.*

СОГЛАШЕНИЕ 3. В случае, когда соответствующие последовательности Σ-формул из определения прекрасно вычислимых функций $\{f_s\}_{s\in\omega}$ равномерно вычислимы по $s \in \omega$, а простое расширение $\hat{\mathbf{R}}$ едино, будем называть последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ эффективной.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. *Функция f прекрасно вычислима тогда и только тогда, когда найдутся эффективные последовательности $\{f_s\}, \{g_s\}$ со свойствами:*

1) для любого $s \in \omega$ функции $f_s: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g_s: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ всюду определены и прекрасно вычислимы;

2) последовательности $\{f_s\}, \{g_s\}$ монотонны;

3) для любых $s \in \omega$, $x \in \mathbf{R}$ выполняются неравенства $f_s(x) \le f(x) \le g_s(x)$;

4) $f(x) = y \Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} f_s(x) = y$ и $\lim_{s\to\infty} g_s(x) = y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: следствия леммы 2 и теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае не всюду определенных вещественнозначных функций утверждение теоремы 1 не верно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Существует не всюду определенная вещественнозначная прекрасно вычислимая функция которая не Σ-определима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\mathbf{N} \supset B \in \Pi_2^0 \setminus \Sigma_2^0$. В силу Δ-определимости натуральных чисел, множество B — Π_2-определимо в $HW(\mathbf{R})$. Пусть $x \in B \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models \Phi(x)$, где Φ — Π_2-формула.

В качестве искомой функции возьмем:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } \Phi(x) \\ \text{неопределено, если } \neg\Phi(x). \end{cases}$$

По построению f — не-Σ-определима в $HW(\mathbf{R})$. Покажем, что f прекрасно вычислима. Обозначим $\bar{B} = N \setminus B$. Это Σ_2^0-множество в $\mathbf{N}$ и Σ_2-определимо в $HW(\mathbf{R})$. По лемме о пределе [6] найдется равномерная последовательность Δ_1^0-множеств $\{c_s\}$, сходящаяся к $\bar{B}$. Для любого $s \in \omega$ множество C_s — Δ-определимо в $HW(\mathbf{R})$. Пусть $x \in C_s \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models \chi_s(x)$, где χ_s — Δ-формула. Приближающуюся последовательность для f определим следующим образом:

1) $r_o(x) = 0$,

$$r_{s+1}(x) = \begin{cases} r_1(x) + 1, \text{ если } \chi_s(x), \\ r_s(x), \text{ если } \neg\chi_s(x); \end{cases}$$

2) $f_s(x) = -\varepsilon^{r_s(x)}$, $g_s(x) = \varepsilon^{r_s(x)}$, где $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

По построению выполняются свойства "а"-"г" из определения 3 (прекрасной вычислимости). Докажем, что для $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{s\to\infty} f_s(x) = \lim_{s\to\infty} g_s(x).$$

Действительно, пусть $x \in B$, тогда для любого $s_0 \in N$ найдется $s \geq s_0$ такой, что $HW(\mathbf{R}) \models \neg\chi_s(x)$. Значит последовательность $\{r_s(x)\}$ бесконечно возрастает. Следовательно $\lim_{s\to\infty} f_s(x) = \lim_{s\to\infty} g_s(x) = f(x)$. Если $x \in \mathbf{R}$ и $x \notin B$, тогда, начиная с $s_0 \in N$, для любого $s \leq s_0$ выполняется $HW(\mathbf{R}) \models \chi_s(x)$. В этом случае последовательность $\{r_s(x)\}$ стабилизируется и $\lim_{s\to\infty} f_s(x) \neq \lim_{s\to\infty} g_s(x) \neq f(x)$. Доказали, что последовательности $\{f_s\}, \{g_s\}$ удовлетворяют всем требованиям определения прекрасной вычислимости. Следовательно f прекрасно вычислима.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — частичная функция. Функция f — прекрасно вычислима тогда и только тогда, когда найдутся Σ-определимая в $HW(\mathbf{R})$ функция f^*, множество B — Π_2-определимое в $HW(\hat{\mathbf{R}})$ формулой вида $(\forall z \in \hat{\mathbf{R}})\Phi(z,x)$, где Φ — Π_2-формула такие, что для $x \in \mathbf{R} f(x) = y \leftrightarrow HW(\hat{\mathbf{R}}) \models B(x)$ & $f^*(x) = y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — прекрасно вычислима и $\{f_s\}, \{g_s\}$ приближающие последовательности из определения 3.

Функция, определенная ниже, будет искомой: $f^*(x) = y \leftrightarrow HW(\hat{\mathbf{R}}) \models (\exists s \in N) sp(f_s(x)) = sp(g_s(x)) = y$.

Не трудно показать, что f^* — Σ-определимая в $HW(\hat{\mathbf{R}})$ функция. В качестве множества B возьмем следующие: $x \in B \leftrightarrow HW(\hat{\mathbf{R}}) \models (\forall s \in \mathbf{N})|f_s(x) - g_s(x)| \leq \varepsilon$.

В силу Σ-определимости в $HW(\hat{\mathbf{R}})$ натуральных чисел, множество B Π_2-определимо в $HW(\hat{\mathbf{R}})$. По построению $f = f^*|_{B\cap R}$.

Допустим нашлась Σ-функция и множество B такие, что $f = f^*|_{B\cap R}$. Пусть $x \in B \leftrightarrow HW(\hat{\mathbf{R}} \models (\forall z \in \hat{\mathbf{R}})\Phi(x,y)$, где Φ — Σ-формула. По свойству Σ-формул в $HW(\hat{\mathbf{R}})$ и элиминации кванторов в $Th(\mathbf{R})$ выполняется: $x \in B \leftrightarrow HW(\hat{\mathbf{R}}) \models (\forall z \in \hat{\mathbf{R}}) \bigvee_{i\in\omega} \varphi_i(x,y)$ где φ_i — бескванторная. Положим $x \in B_s \leftrightarrow HW(\bar{\mathbf{R}}) \models (\forall z \in \bar{\mathbf{R}}) \bigvee_{i \leq s} \varphi_i(x, y)$.

Докажем, что $\bigcup_{s \leq \omega} B_s \cap \mathbf{R} = B \cap \mathbf{R}$.

$\subseteq$) Очевидно, так как для любого $s \in \omega$ $B_s \subseteq B$.

$\supseteq$) Пусть $x \in B \cap \mathbf{R}$ и $x \notin \bigcup_{s \in \omega} B_s$. Тогда в $\bar{\mathbf{R}}$ опускается 1-тип $p(z, x) = \{\neg\varphi_j(z, x) | j \in \omega\}$ с вещественным параметром x. При этом он локально реализуется (так как для любого $s \in \omega$ $HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \neg(\forall z \in \bar{\mathbf{R}}) \bigvee_{i \leq s} \varphi_i(x, y)$. Получаем противоречие.

Пусть $E_s = \bar{\mathbf{R}} \setminus B_s$. Это Δ-определимые в $HW(\bar{\mathbf{R}})$ множества (в силу Δ-определимости праэлементов и элиминации кванторов в $Th(\mathbf{R})$). Положим $(x \in E_s \leftrightarrow$ $\leftrightarrow HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \psi_s(x))$, где ψ_s — Δ-фрмула. По свойству Σ-определимых вещественных функций [3] область определения F^* — эффективное счетное множество непересекающихся отрезков с алгебраическими концами. Т.е. найдется о.р.ф. h такое, что

$$\mathrm{dom} f^* = \bigcup_{n \in \omega} < \nu(h(2n)), \nu(h(2n+1)) >,$$

где ν — нумерация простой модели $Th(\mathbf{R})$.

Обозначим $[\mathrm{dom} f^*]_s = \bigcup_{n \leq s} < \nu(h(2n)), \nu(h(2n+ +1)) >$.

Тогда $(x \in [\mathrm{dom} f^*]_s)$ — Δ-определимое отношение. Приближающуюся последовательность для f определим следующим образом:

1) $r_o(x) = 0$,

$$r_{s+1}(x) = \begin{cases} r_s + 1(x), \text{ если } \chi_s(x), \\ r_s(x), \text{ если } \neg\chi_s(x); \end{cases}$$

2)

$$f_s(x) = \begin{cases} f^*(x) - \varepsilon^{r_s(x)}, \text{ если } x \in [\mathrm{dom} f^*]_s, \\ -t, \text{ если } x \notin [\mathrm{dom} f^*]_s; \end{cases}$$

3)

$$g_s(x) = \begin{cases} f^*(x) + \varepsilon^{r_s(x)}, \text{ если } x \in [\mathrm{dom} f^*]_s, \\ t, \text{ если } x \in [\mathrm{dom} f^*]_s, \end{cases}$$

где $t \gg Z$, $\varepsilon = \frac{1}{t}$.

По построению выполняются свойства "а"-"г" из определения 3 (прекрасной вычислимости).

Докажем, что для $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{s\to\infty} f_s(x) = \lim_{s\to\infty} g_s(x) = f(x).$$

Действительно, пусть $x \in B$, тогда для любого $s_0 \in N$ найдется $s \geq s_0$ такое, что $HW(\mathbf{R}) \models \chi_s(x)$. Значит последовательность $\{r_s,(x)\}$ бесконечно возрастает. Следовательно, $\lim_{s\to\infty} f_s(x) = \lim_{s\to\infty} g_s(x) = f(x)$. Если $x \in \mathbf{R}$ и $x \in B$, тогда начиная с $s_0 \in N$, для любого $s \leq s_0$ выполняется $HW(\mathbf{R}) \models \chi_s(x)$. В этом случае последовательность $\{r_s(x)\}$ стабилизируется и $\lim_{s\to\infty} f_s(x) \neq f(x)$. Доказали что последовательности $\{f_s\}, \{g_s\}$ удовлетворяют всем требованиям определения прекрасной вычислимости. Следовательно, f — прекрасно вычислима.

2. Вычислимые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f: M \to \mathbf{R}$ вычислима, если:

1) существуют две эффективные последовательности Σ-формул $\{\Phi_s(a, x, y)\}, \{G_s(a, x, y)\}$, с параметром a;

2) найдется элементарное собственное расширение стандартных действительных чисел $\mathbf{R} \succ \mathbf{R}$ и $t \in \bar{\mathbf{R}}$ со свойствами:

2.1) $t \gg Z$,

2.2) для любого s формулы $\Phi_s(a, x, y)$, $G_s(a, x, y)$ задают функции f_s, g_s соответственно:

$$f_s(x) = y \rightleftharpoons HW(HW(\mathbf{M}) \times HW(\bar{\mathbf{R}})) \models \Phi_s(t, x, y),$$

$$g_s(x) = y \rightleftharpoons HW(HW(\mathbf{M}) \times HW(\bar{\mathbf{R}})) \models G_s(t, x, y),$$

со свойствами:

а) последовательности $\{f_s\}, \{g_s\}$ — монотонны;

б) для любого $s \in \omega$ выполняются включения $\mathrm{dom} f_s \supseteq$ $\supseteq Fin$, $\mathrm{dom} g_s \supseteq Fin$;

в) для любых $s \in \omega, x \in \mathbf{R}$ выполнятися неравенства $f_s(x) \leq f(x) \leq g_s(x)$;

г) $f(x) = y \Leftrightarrow \lim_{s \to \infty} sp f_s(x) = y$ и $\lim_{s \to \infty} sp g_s(x) = y$.

СОГЛАШЕНИЕ 4. В случае, когда в п.2.2 $\mathbf{M} =$ $= \mathbf{R}$ истинность формул условимся проверять в модели $HW(\hat{\mathbf{R}})$. (Не трудно понять, что при этом не происходит уменьшения общности.)

СОГЛАШЕНИЕ 5. В случае, когда в п.2.2 функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ истинность формул на модели проверяется в модели $HW(\hat{\mathbf{R}})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Формула Φ определяет функцию $f: \mathbf{M} \to \hat{\mathbf{R}}$ в модели $HW(HW(\mathbf{M}) \times HW(\mathbf{R})$, если $f(x) =$ $= y \leftrightarrow (HW(HW(\mathbf{M}) \times HW(\mathbf{R})) \models \Phi(x, y)$ и $\{sp(z) | \Phi(x, z)\} =$ $= \{y\})$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) существует элементарное простое расширение стандартных действительных чисел $\hat{\mathbf{R}} \succ \mathbf{R}$, П-формула, определяющая функцию F в модели $HW(\hat{\mathbf{R}})$, со свойством $F|_{\mathbf{R}} = f$;

2) найдется П-формула, которая в любом собственном элементарном расширении $\hat{\mathbf{R}} \succ \mathbf{R}$ определяет функцию F со свойством $F|_{\mathbf{R}} = f$;

3) функция f — вычислима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$3 \to 1)$ Пусть f — вычислима.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $\hat{\mathbf{R}} \succ \mathbf{R}_1 \succ \mathbf{R}$, причем $\mathbf{R}_1$ — элементарное простое расширение, заданное элементом $t \gg Z$, тогда для $\bar{x}, y \in \mathbf{R}$ имеем

$$\lim^{\mathbf{R}} f_s(\bar{x}) = y \to \lim^{\mathbf{R}_1} f_s(\bar{x}) = y,$$

где $f_s(x) \in \mathbf{R}_1$, $g_s(x) \in \mathbf{R}_1$.

Поэтому можно считать, что элементарное простое расширение $\hat{\mathbf{R}}$, последовательности $\{f_s\}_{s \in \omega}, \{g_s\}_{s \in \omega}$ удовлетворяют условиям определения. По последовательностям $\{f_s\}_{s\in\omega}, \{g_s\}_{s\in\omega}$, построим новые $\{f_s^*\}_{s\in\omega}, \{g_s^*\}_{s\in\omega}$, обладающие свойствами "а"-"г" из определения 3 (прекрасной вычислимости) и принимающие значения только из множества:

$$B = Q \cup \{\pm t^{\frac{1}{n}} | n \in Q, t \gg Z\}.$$

(Это возможно сделать в силу конфинальности B в $\bar{\mathbf{R}}$). Рассмотрим Σ-соответствия: $D_1(x) = \{z \in B | \exists s f_s(x) \geq z\}$, $D_2(x) = \{z \in B | \exists s g_s(x) \leq z\}$. (Данные множества будут областями значения вновь построенных функций f_s^*, g_s^*.) Пусть Σ-функция $h_1(n,x)$ перечисляет $D_1(x)$, Σ-функция $h_2(n,x)$ перечисляет $D_2(x)$, т.е. $\mathrm{im}(\lambda n.h_1(n,x)) = D_1(x), \mathrm{im}(\lambda n.h_2(n,x)) = D_2(x)$.

Определим функции:

$$f_s^*(x) = \max_{n\leq s} h_1(n,x); \; g_s^* = \min_{n\leq s} h_2(n,x).$$

Последовательности $\{f_s^*\}_{s\in\omega}$, $\{g_s^*\}_{s\in\omega}$ будут искомыми в силу построения.

Пусть $f_s^*(x) = y \rightleftharpoons HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \Phi_s^*(t,x,y)$, $g_s^*(x) = y \rightleftharpoons HW(\bar{\mathbf{R}}) \models G_s^*(t,x,y)$, где Φ_s^*, G_s^* — Σ-формулы. Обозначим $D_s = \{x | x \in \mathrm{dom} f_s \cap \mathrm{dom} g_s \cap Fin\}$ (заметим, что D_s — Δ-определимое множество в $Th(\mathbf{R})$ для любой Σ-формулы $\chi(z,x)$ найдется Σ-формула такая, что для любых $x \in \mathbf{R}$, $t \gg Z$ выполняется эквивалентность: $HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \chi(t,x) \leftrightarrow \chi^*(x)$.

Поэтому найдутся Σ-формулы Φ_s^{**}, G_s^{**} такие, что для $x \in \mathbf{R}$ выполняются эквивалентности:

для $x \in D_s$

$$HW(\bar{\mathbf{R}}) \models G_s^*(t,x,y) \leftrightarrow G^* *_s (x,y), HW(\bar{\mathbf{R}}) \models$$

$$\models \Phi_s^*(t,x,y) \leftrightarrow \Phi_s^{**}(x,y),$$

для $x \notin D_s$

$$HW(\bar{\mathbf{R}}) \models G_s^*(t,x,y) \leftrightarrow x \notin Q, \; HW(\bar{\mathbf{R}}) \models$$

$$\models \Phi_s^*(t,x,y) \leftrightarrow x \notin Q.$$

Заметим, что $D_s \to_{s\to\infty} \mathrm{dom} f$. Рассмотрим формулу:

$$\Phi(x,y) \rightleftharpoons \forall s\ \forall y_1\ \forall y_2 (x \in D_s \to [(\Phi_s^{**}(x,y)\ \&$$

$$\&\ G_s^{**}(x,y_2)) \to (y_1 \le y \le y_2)]).$$

Докажем, что П-формула Φ определяет функцию F такую, что $F|_{\mathbf{R}} = f$. Действительно, по определению, Φ определяет в $HW(\bar{\mathbf{R}})$ функцию F, если выполняется: $F(x) = y \leftrightarrow HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \Phi(x,y)\ \&\ \{\mathrm{sp}(z)|\Phi(x,z)\} = \{y\}$.

Допустим $f(x) = y$, тогда в силу определения вычислимости и построения последовательностей $\{f_s^*\}_{s\in\omega}$, $\{g_s^*\}_{s\in\omega}$, имеем: $\lim_{s\to\infty} f_s^*(x) = \lim_{s\to\infty} g_s^*(x) = y$ (в топологии $\mathbf{R}$).

Из единственности предела следует: $HW(\mathbf{R}) \models$ $\models \Phi(x,y)$; $HW(\mathbf{R}) \models \{\mathrm{sp}(z)|\ \Phi(x,y)\} = \{y\}$. Это влечет $F(x) = y$.

Если предположить, что для $x \in \mathbf{R}$ функция f не определена, то в силу построения $\{f_s^*\}_{s\in\omega}$, $\{g_s^*\}_{s\in\omega}$, это означает, что $|\ \{\mathrm{sp}(z)|\ \&_{s\in\omega}(f_s(x) \le z \le g_s(x)\}| \gg 1$. Отсюда $F(x)$ не определена.Следовательно,доказано,что $F|_{\mathbf{R}} = f$.

$1 \to 2$) Очевидно как следствие леммы 2.

$2 \to 3$) Пусть П-формула $\Phi(x,y)$ определяет функцию F, удовлетворяющую условиям теоремы. Возьмем простое расширение $\bar{\mathbf{R}} \succ \mathbf{R}$. По свойству П-формул и элиминации кванторов в $Th(\mathbf{R})$, формула Φ эквивалентна эффективной конъюнкции бескванторных формул: $HW(\bar{\mathbf{R}}) \models \Phi(x,y) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \&_{j\in\omega}\varphi_j(x,y)$. Обозначим $\Phi_s(x,y) \&_{i\le s}\varphi_i(x,y)$.

Определим аппроксимирующие последовательности следующим образом:

$$f_s(x) = \begin{cases} \inf\Phi_i(x) \leftarrow \{y|\Phi_s(x,y)\}, \text{ если существует} \\ \qquad \inf\Phi_i(x) \leftarrow \{y|\Phi_s(x,y)\}, \\ -t, \text{ в противном случае ;} \end{cases}$$

$$g_s(x) = \begin{cases} \sup\Phi_i(x) \leftarrow \{y|\Phi_s(x,y)\}, \text{ если существует} \\ \qquad \sup\Phi_i(x) \leftarrow \{y|\Phi_s(x,y)\}, \\ t, \text{ в противном случае ,} \end{cases}$$

где $t \gg Z$.

где $t \gg Z$.

В силу 0-минимальности простого расширения, функции f_s, g_s Σ-определимы в $HW(\bar{\mathbf{R}})$. В силу построения последовательности $\{f_s\}_{s\in\omega}$, $\{g_s\}_{s\in\omega}$ удовлетворяют всем условиям определения вычислимости. Следовательно, f — вычислимая функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При условии всюду определенности функции f, последовательности $\{f_s\}_{s\in\omega}$, $\{g_s\}_{s\in\omega}$, построенные в доказательстве теоремы 3, сходятся равномерно на $\mathbf{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Функция f вычислима тогда и только тогда, когда найдутся эффективные последовательности $\{f_s\}$, $\{g_s\}$ со свойствами:*

1) для любого $s \in \omega$ функции $f_s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g_s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ всюду определены и вычислимы;

2) последовательности $\{f_s\}$, $\{g_s\}$ монотонны;

3) для любых $s \in \omega$, $x \in \mathbf{R}$ выполняются неравенства $f_s(x) \le f(x) \le g_s(x)$;

4) $f(x) = y \Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} f_s(x) = y$ и $\lim_{s\to\infty} g_s(x) = y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\to$) Очевидно.

$\leftarrow$) Пусть последовательности $\{f_s\}_{s\in\omega}$, $\{g_s\}_{s\in\omega}$ удовлетворяют условию следствия. По замечанию можно построить последовательность F_s^n, равномерно на $\mathbf{R}$ сходящуюся к f_s "снизу", и последовательность G_s^n, сходящуюся равномерно на $\mathbf{R}$ к g_s "сверху". Эффективные последовательности Σ-определимых в $HW(\bar{\mathbf{R}})$ функций, сходящихся к f строим следующим образом:

$$\hat{f}_s(x) = \max_{j \le s} F_j^j(x),$$

$$\hat{g}_s(x) = \min_{j \le s} G_j^j(x).$$

По построению $\hat{g}_s(x)$, $\hat{f}_s(x)$ удовлетворяют всем требованиям определения вычислмости. Следовательно f — вычислимая функция.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *всюду определена. Функция вычислима тогда и только тогда, когда надграфик и подграфик Σ-определимые в $HW(\bar{\mathbf{R}})$ множества.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Всюду определенные вещественнозначные, непрерывные, вычислимые функции замкнуты относительно композиции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ всюду определены, непрерывны и вычислимы. Для функции f возьмем аппроксимации f^1_s, f^2_s, удовлетворяющие требованиям определения вычислимости и сходящиеся к f равномерно на $\mathbf{R}$ и $pf^j_s \subseteq \mathbf{R}$. Для функции h возьмем аппроксимации h^1_s, h^2_s, удовлетворяющие требованиям определения вычислимости и сходящиеся к h равномерно на $\mathbf{R}$ и $ph^j_s \subseteq \mathbf{R}$. Это можно сделать в силу замечания 5. Построим аппроксимации g^1_s, g^2_s для композиции $g = h \circ f$ следующим образом. Сначала определим для $j = 1, 2$ функции $t_j : \mathbf{R} \times N \to N$ правилом:

$$t_j(x,s) = \mu z\left(\bigvee_{i \leq \omega}([h^1_z(x), h^2_z(x)] \subseteq [\alpha^j_i, \beta^j_i])\right),$$

где $[\alpha^j_i, \beta^j_i]$ — пересчет отрезков, на которых значение функции f^j_i совпадает со значением соотвтствующей алгебраической функции [4]:

$$g^1_s(x) = \inf_{y \in [h^1_{t_1(x,s)}(x), h^2_{t_1(x,s)}(x)]} f^1_s(y);$$

$$g^2_s(x) = \sup_{y \in [h^1_{t_2(x,s)}(x), h^2_{t_2(x,s)}(x)]} f^2_s(y).$$

В силу равномерности сходимости $f^i_s \rightrightarrows f$ и непрерывности функций f, h последовательности g^1_s, g^2_s — искомые. Поэтому h — вычислимая функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Весь класс вычислимых вещественнозначных функций, не замкнут относительно композиции.

Рассмотрим пример. Возьмем $A \subset \mathbf{R}$ — П-определимое, но не Δ-определимое в $HW(\mathbf{R})$. Обозначим $\bar{A} =$

$= \mathbb{R} \setminus A$. Это Σ-определимое множество в $HW(\mathbf{R})$. По свойству Σ-определимых множеств: $x \in \bar{A} \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models$ $\models \bigvee\limits_{i \in \omega} (x)$, где φ_s — бескванторная формула. Обозначим $B_s \rightleftharpoons \bigvee\limits_{i \leq s} \varphi(x)$. Очевидно, что $\bar{A} = \bigcup\limits_{s \in \omega} B_s$. В качестве первой функции возьмем:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in A, \\ \frac{1}{2 s_0}, \text{ если } x \in B_{s_0}, \text{ где } s_0 = \mu t[x \in B_t]. \end{cases}$$

Аппроксимации, сходящиеся в f "снизу", определены следующим образом:

$$f_s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{s}, \text{ если } x \notin B_s, \\ \frac{1}{2 s_0}, \text{ если } x \in B_{s_0}, \text{ где } s_0 = \mu t[x \in B_t]. \end{cases}$$

Аппроксимации, сходящиеся к f "сверху", определены следующим образом:

$$g_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{s}, \text{ если } x \notin B_s, \\ \frac{1}{2 s_0}, \text{ если } x \in B_{s_0}, \text{ где } s_0 = \mu t[x \in B_t]. \end{cases}$$

В качестве второй функции возьмем:

$$h(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq 0, \\ 1, \text{ если } x \gg 0. \end{cases}$$

Тогда $h(f(x)) = (1 - \chi_A(x))$ -- композиция вычислимых функций f и h очевидным образом не вычислима.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пусть* $\Phi = \{f \mid f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f$ *вычислима* $\}$. *Найдется вычислимая функция* $F:\ \mathbf{N} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ -- *универсальная для класса* Φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 для построения универсальной функции достаточно уметь перечислять П-формулы языка σ^*. Пусть γ — геделевская нумерация формул языка σ^*. Из свойств геделевской нумерации множеств $F\Pi$ (номеров П-формул) — Δ-определимое множество. Тогда формула $\Phi(n, x, y) \rightleftharpoons n \in F\Pi \ \&\ \gamma^{-1}(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1) формула Φ является П-формулой,

2) формула Φ определяет функцию: $F^*(n,x) = y \leftrightarrow \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models \Phi(n,x,y)$ и $\{sp(z) \mid \Phi(n,x,y)\} = \{y\}$ такую, что $F = F^* |_R \times R$.

Не трудно показать, что F — искомая.

4. Примеры

В качестве примера вычислимых функций рассмотрим подкласс вещественнозначных всюду определенных функций, допускающих мероморфное продолжение в C, содержащий функции являющиеся решением известных дифференциальных уравнений. Для доказательства теоремы нам понадобится следующий факт из теории функций, касающийся вещественнозначных, мероморфных в C функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ всюду определенная функция, допускающая продолжение f^*, мероморфно в C, тогда найдутся аналитические функции $a(z)$, $b(z)$ такие, что:*

1) $f(z) = \dfrac{a(z)}{b(z)}$,

2) функции $a(z), b(z)$ разлагаются в ряд Тейлора с коэффициентами из $\mathbf{R}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть всюду определенная функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ допускает продолжение f^* мероморфное в C, функция f^* представима в виде $f^*(z) = \dfrac{a(z)}{b(z)}$, где функции $a(z), b(z)$ — аналитичны в $C, a^{(i)}(0)$, $b^{(i)}(0) \in \mathbf{R}$ для $i \in \omega$. Тогда функция f вычислима при следующих условиях:*

1) $\max_{|z| \le \omega} |a(z)| \le A(\omega)$, $\max_{|z| \le \omega} |b(z)| \le B(\omega)$, *где функции A, B — вещественнозначные, и Σ-определимы в $HW(\mathbf{R})$;*

2) коэффициенты рядов Тейлора для $a(x)$, $b(x)$ — вычислимые функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f удовлетворяет условиям теоремы. По следствию 3 достаточно доказать, что *подграфик* и *надграфик* функции Σ-определимы в $HW(\mathbf{R})$.

Обозначим ряды Тейлора для $a(z), b(z)$ в точке O следующим образом:

$$a(z) = \sum_{k \in \omega} a_k z^k, \tag{1}$$

$$b(z) = \sum_{k \in \omega} b_k z^k. \tag{2}$$

Докажем, что функции $a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \to b: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — вычислимые функции. Тогда легко строятся Σ-определения для подграфика и надграфика функции f. Достаточно рассмотреть функцию a. Из неравенства Коши следуют оценки для коэффициентов ряда Тейлора:

$$|a_k| \leq \frac{m}{R^k}, \text{ где } M = \max_{|z| \leq R^s} (z).$$

В этом случае остаточный член ряда Тейлора в точке z оценивается следующим образом:

$$|\sum_{k \leq s+1} a_k z^k| \leq \sum_{k \leq s+1} |a_k||z^k| \leq \sum_{k \leq s+1} \frac{M|z^k|}{R^k}.$$

Обозначим $a_s(z) = \sum_{k \leq s} \mu_k z^k$. Положив $R = 2|z|$ в оценке (это можно сделать в виду того, что $a(z)$ — целая) получим формулу регулятора сходимости последовательности $\{a_s(z)\}_{s \in \omega}$ к $a(z)$. Она имеет вид

$$a(z) - a_s(z)| \leq \sum_{k \leq s+1} \frac{a(2|z|)|)z^k|}{(2|z|)^k} \leq A(2|z|)\frac{1}{2^s}.$$

Функция $a_s(x)$ всюду определены на $\mathbf{R}$ и из условия теоремы вычислимы. Последовательность $\{a_s(x)\}_{s \in \omega}$ сходится к $a(x)$ с Σ-определимым регулятором сходимости. Легко построить последовательность вычислимых функций сходящихся к монотонно "сверху" и "снизу":

$$a_s^*(x) = \max_{j \leq s}(a_j(x) + \frac{A(2|x|)}{2^j},$$

$$a_s^{**}(x) = \max_{j \leq s}(a_j(x) - \frac{A(2|x|)}{2^j}.$$

Отсюда, по следствию, легко заключить, что функция $a(x)$ вычислима. Аналогично доказывается вычислимость функции $b(x)$. Пусть последовательности f_s^1, g_s^1 для $b(x)$. Тогда подграфик функции определяется следующей Σ-формулой:

$$y \leq \frac{a(x)}{b(x)} \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models (\exists s \in N)\exists n \exists k((y \leq \frac{n}{k} \ \&$$

$$\& \ ((n \leq g_s^1(x) \ \& \ k \geq g_s^2(x) \geq 0) \vee (n \leq g_s^1(x) \ \& \ k \leq g_s^2(x) \leq 0))).$$

Аналогично определяется надграфик. по следствию отсюда следует вычислимость функции f.

Стоит заметить, что большинство всюду определенных функций, используемых в вещественном анализе, принадлежат этому классу.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Функция* sin *вычислима, но не прекрасно вычислима* (см. [4]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для вещественнозначных функций справедливы следующие включения: класс Σ-определимых функций $\subset$ класс прекрасно вычислимых функций $\subset$ класс вычислимых функций.*

В заключение, хотелось бы отметить основные направления в которых продолжаются работы авторов. Это исследование свойств представленной формализации вычислимости на других структурах и попытка дать удачное определение вычислимости функционалов и операторов.

Авторы благодарны Ю.Л.Ершову и С.С.Гончарову за ценные замечания входе обсуждения статьи.

Л и т е р а т у р а

1. BARWIZE J. Admissible sets and structure. — Berlin, 1975.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Динамические логики над допустимыми множествами //ДАН СССР. — 1993, — Т. 273, N 5. — С. 1045-1048.

3. КОРОВИНА М.В. Об универсальной рекурсивной функции и абстрактных машинах на вещественных числах со списочной надстройкой. Алгебра и логика //Настоящий сборник. — С.24 -43.

4. KOROVINA M.V. Generalized computability of real functions //SibAM, 1992. — Vol. 2, N 4. — P. 1-18.

5. Van den DRIES L. Remars on Tarski's problem concerning (R, +, *, exp), Logic Colloquim'82.

6. БУРГИН М.С. Универсальные предельные машины Тьюринга //ДАН. — 1992. — Т. 325, N 4. — С. 625-658.

7. ШЕНФИЛД Дж. Степени неразрешимости. — М.: Наука, 1977.

8. MOSCHOVAKIS Y.N. Elementary induction on abstract structures, Noth-Holland, Amsterdam, 1974.

9. BLUM L., SHUN M., SMALE S. On a theory of computation and comlexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universial machines /Bulletion of the AMS. — 1989. — Vol. 21, N 1. — P.

1O. ROBINSON A., Non-standart Analysis.-Amsterdam: Noth-Holland, 1966. — (Studies in Logis and the Foundations of Mathematics.)

11. АШАЕВ И.В., БЕЛЯЕВ В.Я., МЯСНИКОВ А.Г. Подходы к теории обобщенной вычислимости //Алгебра и логика. — 1993. — N 4.

Поступила в редакцию
2 июля 1996 года