СТРУКТУРНЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ
СВОЙСТВА ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1996 год Выпуск 156

УДК 519.68

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ РЕКУРСИВНОЙ ФУНКЦИИ И АБСТРАКТНЫХ МАШИНАХ НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ СО СПИСОЧНОЙ НАДСТРОЙКОЙ

М.В.Коровина

Введение

В основу данной статьи легло рассмотрение нескольких вопросов. Первый из них — существование универсальной рекурсивной функции для Σ-определимых действительнозначных функций. Истоки рассматриваемого вопроса восходят к теории допустимых множеств (допустимое множество есть модель слабой аксиоматической теории Крипке-Платека (KPU)). На KPU можно смотреть как на интересное расширение теории рекурсии. При этом обобщение, с одной стороны, рекурсивные функции и рекурсивно-перечислимые предикаты имеют естественные определения, с другой стороны, классическая теория является частным случаем [3].

На любом допустимом множестве рекурсивные структуры обладают привычными свойствами: существует универсальный р.п. предикат, выполняется вторая теорема о рекурсии. Однако, когда речь заходит об универсальной рекурсивной функции, аналогия нарушается. В [5] приведены примеры допустимых множеств без универсальной рекурсивной функции.

В статье рассматривается "конструктивный вариант" ($HW(\mathbf{R})$) наименьшего допустимого множества над действительными числами.

Получен результат о существовании универсальной рекурсивной функции для Σ-определимых вещественнозначных функций.

Рассмотрена проблема униформизации для Σ-определимых предикатов на $HW(\mathbf{R})$.

Следующий ряд вопросов возникает в связи с исследованием свойств концепции "вычислимость=Σ-определимость" применительно к нечетным структурам, в частности, к вещественным числам. Это означает, что класс всех вычислимых предикатов допускает эффективное представление в виде Σ-формул [3]. Гончаровым С. С. был поставлен вопрос о характеризации Σ-определимых действительнозначных функций на языке ч.р.ф. и алгебраических функций. Данное представление означает, что всякая такая функция есть рекурсивное объединение некоторых алгебраических функций, заданных на непересекающихся отрезках с алгебраическими концами. На основе предложенного описания построены абстрактные машины, вычисляющие действительнозначные функции.

Напомним ряд определений необходимых для изложения основного материала.

Пусть $\mathbf{R}$ — стандартная модель вещественных чисел языка $\sigma_0 =< 0, 1, =, +, \cdot, \leq >$. Через $HW(\mathbf{R})$ обозначим наименьшее замыкание всех наследственно конечных слов (списков) с проэлементами из $\mathbf{R}$.

Понятия Δ_0-, $\Sigma-$, Π-формул и Σ-определимости в модели $HW(\mathbf{R})$ — стандартны [3].

1. Характеризация Σ-определимых вещественнозначных функций. Существование рекурсивной универсальной функции

Рассмотрим частичные вещественные функции. Для описания Σ-определимых частичных вещественнозначных функций в качестве базисных возьмем ч.р.ф., алгебраические функции. Данный выбор продиктован тем, что данные классы функций достаточно богаты, эффективно описываются и имеют рекурсивные универсальные функции.

СОГЛАШЕНИЕ 1. *Обозначим:*

$$< a,b >= \{x | a \leq x \leq b\}; \ (a,b) = \{x | a \ll x \ll b\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Частичная вещественная функция f называется алгебраической, если:

а) $\mathrm{dom} f =< a,b >$;

б) $\mathrm{im} f =< c,d >$;

в) $\Gamma = \{< x,y > \in < a,b > \times < c,d > \mid \ p(x,y) = 0\}$, где $p \in \mathbf{R}_o[t_1,t_2]$, $a,b,c,d \in \mathbf{R}_o$ (под $\mathbf{R}_o$ подразумевается вещественное замыкание рациональных чисел).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Σ-определимая функция F называется рекурсивной униврсальной для некоторого класса функций, если для любой функции f из этого класса найдется $z \in HW(\mathbf{R})$ такое, что: $F(z,x) = f(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для множества алгебраических функций существует Σ-определимая универсальная функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства заметим, что вещественное замыкание рациональных чисел $\mathbf{R}_o$ это простая модель $Th(\mathbf{R})$ и поэтому сильно конструктивнс. Пусть алгебраическая функция f имеет следующее опрделение:

а) $\mathrm{dom} f =< a,b >$;

б) $\mathrm{im} f =< c,d >$;

в) $\Gamma = \{< x,y > \in < a,b > \times < c,d > \mid \ p(x,y) = 0\}$, где $p \in \mathbf{R}_o[t_1,t_2]$, $a,b,c,d \in \mathbf{R}_o$.

Пусть $p(x,y) = \sum\limits_{i \leq n} \sum\limits_{j \leq n} a_{i,j} x^i y^j$. Возьмем ν — взаимнооднозначную нумерацию простой модели $Th(\mathbf{R})$; t — функцию, кодирующую стандартным образом списки, проэлементы которых — натуральные числа. В этом случае, в качестве кода алгебраической функции следует взять значение функции t на списке, содержащем информацию об области определения, области значения и коэффициентах определяющего полинома:

$e_f =$

$$= t((<\nu^{-1}(a), \nu^{-1}(b)>, <\nu^{-1}(c), \nu^{-1}(d)>,$$

$$<\nu^{-1}(a_{11}), \dots, \nu^{-1}(a_{nn})>)).$$

Дальнейший результат утверждает существование описания Σ-определимых вещественнозначных функций в терминах алгебраических и ч.р.ф.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть ν — взаимно-однозначная конструктивизация простой модели $Th(\mathbf{R})$, A — универсальная функция для алгебраических функций. Тогда для любой действительнозначной Σ-определимой функции f найдутся ч.р.ф. h, g, χ со свойствами:*

а) $\nu h(2n) \leq \nu h(2n+1)$,

б) $x \in (\nu h(2n),\ \nu h(2n+1)) \to f(x) = A_{g(2n)}(x)$,

в) $x = \nu(h(2n)) \to f(x) = \nu(\chi(2n))$,

г) $x = \nu(h(2n+1)) \to f(x) = \nu(\chi(2n+1))$, *причем* $(\nu h(2n), \nu h(2n+1)) \subseteq \mathrm{dom} A_{g(2n)}$, $(\nu h(2n), \nu h(2n+1)) \subseteq \mathrm{dom} f$,

$$\bigcup_{n \in \omega} (\nu h(2n),\ \nu h(2n+1)) = \mathrm{dom} f,$$

$$(\nu h(2l),\ \nu h(2l+1)) \cap (\nu h(2n),\ \nu h(2n+1)) = \emptyset$$

для любых $l \neq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 [6] Σ-определение для Σ-определимой вещественнозначной функции эквивалентно эффективной дизъюнкции бескванторных формул, т.е.:

$$f(x) = y \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models \bigvee_{i \in \omega} \Phi_i(x, y).$$

Для любого i формула $\Phi_i(x, y)$ задает частичную функцию f_i. В силу 0-минимальности $\mathbf{R}$ [4] область определения f_i — полуалгебраическое множество. Наша задача показать, что существует разбиение области определения функции f_i на отрезки с границами из простой модели, обладающее следующими свойствами:

1) $\mathrm{dom} f = \bigcup\limits_{j\leq n} \langle a_i^j,\ a_i^{j+1}\rangle$;

2) для каждого отрезка $\langle a_i^j,\ a_i^{j+1}\rangle$ эффективно находится полином $p(x,y)$ такой, что $x \in \langle a_i^j,\ a_i^{j+1}\rangle \to$ $\to (f_i(x) = y \leftrightarrow p(x,y) = 0)$.

По теореме Ван-дер Дриса [4] каждое полуалгебраическое множество есть конечное объединение отрезков, границы которых попадают в $\mathbf{R_0}$. Поэтому область определения f_i можно представить следующим образом:

$$\mathrm{dom} f_i = \bigcup_{j\leq l} \langle a_i^j,\ a_i^{j+1}\rangle.$$

На каждом таком отрезке функция f кусочно непрерывна. Более того, для каждого j отрезок $\langle a_i^j,\ a_i^{j+1}\rangle$ можно разбить конечным числом точек $a_i^{j,o} \leq \ldots \leq a_i^{j,m}$, $a_i^{j,o} = a_i^j$, $a_i^{j,m} = a_i^{j+1}$ так, что для любого $k \leq m$ функция f либо константа на $(a_i^{j,k},\ a_i^{j,k+1})$, либо непрерывна и строго монотонна (при этом $a_i^{j,k}$ — элемент простой модели для любого k). Не сложно показать, что каждое полуалгебраическое множество задается булевой комбинацией отношений вида $p(x,\ldots,x) \geq 0$, где p — полином с коэффициентом из простой модели. С одной стороны, на каждом отрезке $(a_i^{j,k},\ a_i^{j,k+1})$ функция f_i строго монотонная, либо константа. С другой стороны, она — результат пересечений подграфиков и надграфиков полиномов. Из результатов гл.4 [7] следует возможность конечного разбиения отрезка $(a_i^{j,k},\ a_i^{j,k+1})$ такое, что $a_i^{j,k} = a_i^{j,k,1} \leq \ldots \leq a_i^{j,k,m} = a_i^{j,k+1}$ и для любого $l \leq m$ на отрезке $(a_i^{j,k,l},\ a_i^{j,k,l+1})$ функция f_i задается полиномиальным отношением $p(x,y) = 0$, где p — один из полиномов, определяющих эту функцию. Учитывая вышеизложенное и заменив индексацию более простой, мы можем построить разбиение области определения $\mathrm{dom} f = \bigcup\limits_{j\leq n} \langle a_i^j,\ a_i^{j+1}\rangle$ обладающее искомыми свойствами. Естественным образом возникает ч.р.ф. h такая, что $h(0) = \nu^{-1}(a_o^o)$; $h(1) = \nu^{-1}(a_o^1)$; ...

Заметим, что области определения частичных функций f_i могут пересекаться, т.е. может возникнуть ситуация пересечения отрезков $\langle a_i^j, a_i^{j+1}\rangle$ и $\langle a_k^l, a_k^{l+1}\rangle$ из разбиения областей определения функций f_i и f_k соответственно. Наша задача перестроить h в $\bar{h}$, сохранив нужные свойства, и добиться дополнительно следующего:

1) $\bar{h}(2x) \leq \bar{h}(2x+1)$,

2) $\langle \nu\bar{h}(2l), \nu\bar{h}(2l+1)\rangle \cap \langle \nu\bar{h}(2k), \nu\bar{h}(2k+1)\rangle = 0$, для любых $l \neq k$.

Строим по индукции $\bar{h}, g, \chi$ (они и будут искомыми).

<u>Шаг 0.</u>

$\bar{h}(0) = h(0)$,

$\bar{h}(1) = h(1)$,

$g(0) = i$, где $A_i(x) = y \leftrightarrow \Phi_o(x,y), x \in \langle \nu(h(0)), (\nu(h(1))\rangle$ (существование такого i следует из утверждения 1 и предыдущих рассуждений);

$$\chi(0) = \begin{cases} \nu^{-1}(y), \text{ если } \Phi(\nu(h(0)), y), \\ \text{неопределено, если } \neg\Phi(\nu(h(0)), y), \end{cases}$$

$$\chi(1) = \begin{cases} \nu^{-1}(y), \text{ если } \Phi(\nu(h(1)), y), \\ \text{неопределено, если } \neg\Phi(\nu(h(1)), y). \end{cases}$$

<u>Шаг $n-1 \to n$.</u> Допустим, на шаге $n-1$ для построения функции h использовались все отрезки до $\langle a_k^l,\ a_k^{l+1}\rangle$. Проверяем все пересечения вида: $\langle a_k^l,\ a_k^{l+1}\rangle \cap \langle \nu\bar{h}(2p), \nu\bar{h}(2p+1)\rangle$, где $0 \leq p \leq n-1$.

Если пересечение не пусто, то выкидываем из отрезка $\langle a_k^l, a_k^{l+1}\rangle$ пересечение и находим эффективно границы остатков:

$$\langle a_k^l, a_k^{l+1}\rangle \backslash (\langle a_k^l, a_k^{l+1}\rangle \cap (\bigcap_{p \leq n-1} \langle \nu\bar{h}(2p), \nu\bar{h}(2p+1)\rangle)) =$$

$$= \bigcap_{i \leq m} \langle \beta_i, \beta_{i+1}\rangle.$$

Тогда достраиваем формулы следующим образом:
$\bar{h}(2n) = \nu^{-1}(\beta_o)$,
$\bar{h}(2n+1) = \nu^{-1}(\beta_1)$,
...
$\bar{h}(2n+m) = \nu^{-1}(\beta_m)$,
$\bar{h}(2n+m+1) = \nu^{-1}(\beta_{m+1})$,
$g(2n) = p$,
$g(2n+m) = p$,
где $A_p(x) = y \leftrightarrow \Phi_k(x,y)$ при $x \in (\nu(h(2n+m)),\ \nu(h(2n+ +m+1)))$ (существование такого p следует из утверждения 1 и предыдущих рассуждений);

$$\chi(2n) = \begin{cases} \nu^{-1}(y), \text{ если } \Phi(\nu(h(2n)), y), \\ \text{неопределено, если } \neg\Phi(\nu(h(2n)), y); \end{cases}$$

$$\chi(1) = \begin{cases} \nu^{-1}(y), \text{ если } \Phi(\nu(h(2n+1)), y), \\ \text{неопределено, если } \neg\Phi(\nu(h(2n+1)), y). \end{cases}$$

Не составляет труда проверить, что требуемые свойства "а" - "в" для функций h, g, χ выполняются. Соответственно они искомые.

ТЕОРЕМА 2. *Для класса Σ-определимых вещественнозначных функций существует Σ-определимая универсальная функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ — геделеввская нумерация троек натуральных числе; κ — клиневская нумерация ч.р.ф. Не трудно показать, что это Σ-определимые функции в $HW(\mathbb{R})$. Из предыдущей теоремы следует, что для любой Σ-определимой вещественнозначной функции f найдется тройка ч.р.ф. h, g, χ, полностью определяющая функцию f. Поэтому в качестве кода для функции f можно взять геделев номер тройки $< l, k, m >$, где $h(x) = \kappa_l(x)$, $g(x) = \kappa_k(x)$, $\chi(x) = \kappa_m(x)$. Докажем, что по любой тройке ч.р.ф. $< h, g, \chi >$ можно эффективно и однозначно построить тройку ч.р.ф. $< \bar{h}, g, \chi >$ такую, что она будет кодом для какой-то Σ-функции. Для этого $\bar{h}$ должно удовлетворять условиям:

1. $\nu\bar{h}(2n) \le \nu\bar{h}(2n+1)$,

2. $\langle\nu\bar{h}(2l),\ \nu\bar{h}(2l+1)\rangle \cap \langle\nu\bar{h}(2k), \nu\bar{h}(2k+1)\rangle = 0$ для любых k, l.

Пусть $< g, h, c >$ — тройка каких-то ч.р.ф. и $h(x) = \kappa_l(x)$, $g(x) = \kappa_k(x)$, $\chi(x) = \kappa_m(x)$. Перестроим функцию h в $\tilde{h}$, чтобы удовлетворить условие 1:

$$\tilde{h}(x) = \kappa_k(l, x) =$$

$$= \begin{cases} \kappa_l(x), \text{ если } \kappa_l([\frac{x}{2}]\,2) \leq \kappa_l([\frac{x}{2}]\,2+1), \\ \text{расходится, если расходится } \kappa_l([\frac{x}{2}]\,2), \\ \text{расходится, если расходится } \kappa_l([\frac{x}{2}]\,2+1), \\ \text{расходится, если } \kappa_l([\frac{x}{2}]\,2) \geq \kappa_l([\frac{x}{2}]\,2+1). \end{cases}$$

По свойствам клиниевской нумерации найдется ч.р.ф. ξ такая, что $\tilde{h}(x) = \kappa_k(l, x) = \kappa_{\xi(k,l)}(x)$, т.е. существует алгоритм нахождения номера функции $\tilde{h}$. Аналогичным образом "подправляем" $\tilde{h}$ до $\bar{h}$ так, чтобы удовлетворить условие 2: $\bar{h}(x) = \kappa_p(\xi(k, l), x)) = \kappa_{\eta(p,\xi(k,l))}(x)$. Легко проверить, что тройка $< \bar{h}, g, \chi >$ задает функцию f, имеющую следующее Σ-определение:

$$f(x) = y \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models$$

$$\models \bigvee_{n\in\omega} ((x \in < \nu\bar{h}(2n),\ \nu\bar{h}(2n+1) > \to y =$$

$$= A_{g(2n)}(x)) \vee (x = \nu\bar{h}(2n) \to y = \nu\chi(2n)) \vee$$

$$\vee (x = \nu\bar{h}(2n+1) \to y = \nu\chi(2n+1))).$$

Для построения универсальной функции введем вспомогательные функции. Пусть функция p — взаимнооднозначная нумерация троек натуральных чисел:

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, \text{ если } m =< n, k, l >,\ n \in N, \\ \qquad k \in N, l \in N, \\ \text{расходится в противном случае;} \end{cases}$$

$$\mathrm{Nat}(n) = \begin{cases} 1, \text{ если } n \in N, \\ \text{расходится в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно показать, что функции p, μ, Nat Σ-определимы в $HW(\mathbb{R})$.

Определим универсальную функцию следующим образом:

$$F(m, x) = \mu(p(m))F(< \mathrm{head}(p(m)),$$
$$h(p, \xi(k, \mathrm{head}(\mathrm{tail}(p(m))))) >, \mathrm{head}(\mathrm{tail}(\mathrm{tail}(p, m))), x),$$

где

$$F(m, l, k, x) = y \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow HW(\mathbb{R}) \models \exists n(\mathrm{Nat}(n) \ \& \ (((x \in < \nu\kappa(m, 2n),$$
$$\nu\kappa(m, 2n+1) > \to y =$$
$$= A_{\kappa(k,2n)}(x)) \vee (x = \nu\kappa(m, 2n) \to y = \nu\kappa(l, 2n)) \vee$$
$$\vee (x = \nu\kappa(m, 2n) \to y = \nu\kappa(l, 2n))))).$$

Используя теорему 1 нетрудно показать, что F является Σ-определимой универсальной функцией для класса частичных вещественнозначных функций.

2. Замечание об униформизации

В данной части статьи рассматривается проблмема униформизации предикатов на $\mathbb{R}^n$ Σ-определимых в $HW(\mathbb{R})$. Естественный вопрос — допускают ли определимые множества определимые униформизации — часто возникает, например, при нахождении "канонического" решения $y(x)$ некоторого уравнения $f(x, y) = 0$ [3].

Напомним ряд определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Предположим $P \subseteq X \times Y$ — подмножество произедения $X \times Y$. Будем говорить, что P^* униформализует P, если $P^* \subseteq P$ и P^* — график функции с областью определения $\exists^Y P$.

Интуитивно, P^* ставит в соответствие каждой точке из $\exists^Y P$ только один элемент из множества $P_x = \{y : P(x, y)\}$. С одной стороны, из аксиомы выбора следует, что любое множество P может быть униформизировано каким-то P^*, с другой стороны, достаточно тяжело найти "хорошо" определимое униформизирующее множество, даже если данное множество достаточно простое [3]. Рассмотрим проблему униформизации для Σ-определимых в $HW(\mathbf{R})$ множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Класс G обладает свойством униформизации, если любое P из G может быть униформизировано некоторым P^* из G.

Рассмотрим $G = \{P \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} | \ P$ — Σ-определимое в $HW(\mathbf{R})$ множество $\}$, тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Для любого n-местного Σ-предиката Φ на действительных числах существует $n-1$-местная действительнозначная Σ-определимая функция f со свойствами:*

1) $\mathrm{dom}(f) = \{x | \ \exists y \Phi(x, y)\}$;

2) для $x \in \mathrm{dom}(f) HW(\mathbf{R}) \models \Phi(x, f(x))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Другими словами класс G обладает свойством униформации. Более того, если в определении класса G модель $\mathbf{R}$ заменить на любую другую, упорядоченную, обладающую свойством 0-минимальности свойство униформизации сохранится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, рассмотрим случай $n = 2$. Пусть Φ — Σ-предикат на $\mathbf{R}$, тогда он эквивалентен эффективной дизъюнкции бескванторных формул сигнатуры σ_0 :

$$HW(\mathbf{R}) \models \Phi(x, y) \ \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models \bigvee_{i \in \omega} \Phi_i(x, y).$$

Построим Σ-формулы $\{\Phi_i^*(x, y)\}_{i \in \omega}$, эффективная дизъюнкция которых и будет определять искомую функцию. Для каждых $i \in \omega$, $x_0 \in \mathbf{R}$ формула $\Phi_i(x_0, y)$ задает множество A_i (которое может быть вырожденным). При условиях: A_{i-1} — пусто, A_i — непусто, наша задача выбрать из A_i какое-то y, которое и будет искомым значением функции f. При выполнении $HW(\mathbf{R}) \models \Phi(x_0, y)$ для какого-то $i \in \omega$ условия 1-2 будут выполнены и соответствующее y будет значением функции f. Иначе функция f будет не определена в точке x_0. Покажем, что y можно выбрать эффективно. Формула $\Phi_i^*(x_o, y)$ будет определять данное y.

В силу 0-минимальности $\mathbf{R}$ множество A_i является объединением конечного числа отрезков, границы которых попадают в $\mathbf{R}_o$. Если A_i — невырожденное множесто, рассмотрим следующие случаи.

1. Среди отрезков есть отрезок вида $< -\infty, a >$, в этом случае можно построить формулу:

$$\tilde{\Phi}_i^!(x_o, y) \rightleftharpoons \exists a(\forall b \subseteq a\Phi_i(x_o, b)) \ \&$$

$$\& \ (\forall c \supseteq a \ \exists y_1(a \subseteq y_1 \subseteq c \ \& \ \neg\Phi_i(x_o, y)) \ \& \ (y = a - 1).$$

За счет элиминации кванторов она эквивалентна бескванторной $\Phi_i^!(x_o, y)$.

2. Среди отрезков нет отрезков вида $< -\infty, a >$, но есть отрезок вида $< a, +\infty >$, в этом случае потроим формулу:

$$\tilde{\Phi}_i^2(x_o, y) \rightleftharpoons \neg(\exists a \ \forall b \leq a\Phi(x, b)) \ \& \ \exists a(\forall b \geq a\Phi(x_o, b)) \ \&$$

$$\& \ (\forall c \leq a \ \exists y_1(c \leq y_1 \leq a \ \& \ \neg\Phi(x_o, y)) \ \& \ (y = a + 1).$$

За счет элиминации кванторов она эквивалентна бескванторной $\Phi_i^2(x_o, y)$.

3. Среди отрезков нет отрезков вида $< -\infty, a >$, $< a, +\infty >$ но есть отрезки вида $< a, b >$, в этом случае выбираем самый левый отрезок. Искомая формула имеет вид:

$$\Phi_i^3(x_o, y) \rightleftharpoons \neg(\exists a_1 \ \forall b_1 \leq a_1\Phi_i(x_o, b_1)) \ \& \ \neg(\exists a_2 \ \forall b_2 >$$

$$> a_2\Phi_i(x_o, b_2)) \ \& \ (\exists a \ \exists b \ \forall y_1(a \leq y_1 \leq b \ \& \ \Phi_i(x_o, y_1)) \ \&$$

$$\&(\forall c \leq a \ \& \ \neg\Phi_i(x_o, c)) \ \& \ \Big(\forall c \geq b \ \exists y_2(b \leq y_2 \leq c \ \&$$

$$\&\neg\Phi(x_o, y_2)) \ \& \ y = \frac{(a+b)}{2}\Big).$$

За счет элиминации кванторов она эквивалентна бескванторной $\Phi_i^3(x_o, y)$.

Положим

$$\Phi_1^*(x,y) \rightleftharpoons \Phi_1^1(x,y) \vee \Phi_1^2(x,y) \vee \Phi_1^3(x,y);$$

$$\Phi_2^*(x,y) \rightleftharpoons (\neg\Phi_1^*(x,y) \ \& \ (\Phi_2^1(x,y) \vee \Phi_2^2(x,y) \vee \vee \Phi_2^3(x,y)));$$

$$\Phi_n^*(x,y) \rightleftharpoons (\&_{i<n-1} \neg\Phi_i^*(x,y) \ \& \ (\Phi_2^1(x,y) \vee \vee \Phi_2^2(x,y) \vee \Phi_2^3(x,y))) \ldots$$

Искомая функция будет иметь следующее определение: $f(x) = y \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models \bigvee\limits_{i\in\omega} (\Phi_i^*(x,y))$, что эквивалентно Σ-определению.

Данный результат дает еще один подход к доказательству существования универсальной для действительных функций. Более того обобщает результат на случай $\mathbf{R}^n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует Σ-определимая функция универсальная для частичных действительнозначных Σ-определимых функций. Существует Σ-функция универсальная для частичных Σ-определимых функций из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что для класса G есть универсальное Σ-множество и класс G обладает свойством униформизации.

3. Абстрактные машины (AMR).

Используя представление действительных Σ-определимых функций с помощью ч.р.ф. и алгебраических функций, построим абстрактные машины для вычисления действительных функций (AMR).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Любая AMR включает в себя:

1. Универсальную машину для вычисления алгебраических функций $\mathrm{MA}(i,x) = f_i(x)$.

2. Универсальную машину Тьюринга $\mathrm{MT}(i,x) = h_i(x)$.

3. Головную машину, которая состоит из бесконечной ленты разделенной на регистры, обозначаемые $R_1,\ldots,R_n,\ldots$. В каждом регистре в любой момент времени содержится элемент из $HW(\mathbf{R})$.

4. Программу $P = I_1, \ldots, I_n$. Каждая I_i может быть одной из следующих команд:

а) $R_m \leftarrow c$ (запись константы из сигнатуры в регистр R_m);

б) $R_m \leftarrow \mathrm{MA}(R_1, \ldots, R_k)$ (запись в регистр R_m результата работы машины T от содержимого регистров $R_1, \ldots$ $\ldots, R_k$);

в) $R_m \leftarrow \mathrm{MT}(R_1, \ldots, R_k)$ (запись в регистр R_m результата работы машины T от содержимого регистров $R_1, \ldots$ $\ldots, R_k$);

г) *If* $\Phi(R_1, \ldots, R_k)$ *then goto* n, *else* m (если формула Φ истина на значениях регистров $R_1, \ldots, R_k$ то перейти к выполнению команды n, иначе выполнять команду m, где Φ — Δ-формула);

д) $R_m \leftarrow R_k$ (запись в регистр R_m содержимого регистра R_k);

е) $R_m \leftarrow f(R_1, \ldots, R_k)$ запись в регистр R_m значения терма f от содержимого регистров $R_1, \ldots, R_k$, где f получен из базисных операцией композиции).

Для начала работы абстрактная машина AMR должна быть снабжена начальной конфигурацией, т.е. последовательностью $a_1, \ldots, a_n$ элементов из $HW(\mathbf{R})$, помещенных в регистры $R_1, \ldots, R_n$. Предположим что программа P состоит из команд $I_1, \ldots, I_l$. Абстрактная машина AMR начинает ычисления с команды I_1. Пусть в некоторый момент времени машина выполняет команду I_k, тогда дальнейшее вычисление происходит следующим образом.

Если I_k не является командой условного перехода, то следующей выполняемой командой будет I_{k+1}.

Если $I_k \rightleftharpoons$ (*if* $\Phi(R_1, \ldots, R_k)$ *then goto* n, *else* m) и формула Φ истина на значениях регистров $R_1, \ldots, R_k$, то следующей выполняемой командой будет I_n, иначе I_m.

Вычисления заканчиваются тогда и только тогда, когда нет следующей команды. Заключительная конфигурация есть содержимое регистров на этом шаге.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Действительнозначная функция f — AMR-вычислима, если найдется абстрактная машина

AMR, такая, что $f(x) = e$ тогда и только тогда, когда AMR, начинает работу с конфигурацией $< x, 0, 0, \ldots >$ и заканчивает работу с конфигурацией $< y, \ldots >$.

ЛЕММА 1.

1. Композиция AMR-вычислимых функций AMR-вычислима.

2. Допустимо использование в программах команд $R_m \to \to f(R_1, \ldots, R_k)$, где f — AMR-вычислимая функция.

3. Следующие функции AMR-вычислимы:

$$(< a_1, \ldots, a_n >) = \begin{cases} a_m, & \text{если } m \leq n, \\ 0, & \text{если } m \geq n; \end{cases}$$

$$Ln(\alpha) = \begin{cases} \text{длина списка, если } \alpha \text{ — список}, \\ 0, \text{ в противном случае}; \end{cases}$$

$$replace(< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >, j, \beta) =$$

$$= \begin{cases} < \alpha_1, \ldots, \beta, \ldots, \alpha_n >, \text{ если } j \leq n; \\ append(< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >, < 0, 0, \ldots, \beta >), \\ \qquad \text{если } j \geq n. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть f — действительнозначная функция, вычислимая на некоторой машине AMR с программой $P = = I_1, \ldots, I_n$, тогда f является Σ-определимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — действительнозначная функция, вычислимая на некоторой машине AMR с программой $P = I_1, \ldots, I_n$, тогда программе P сопоставим последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ следующим образом — каждой команде I_i поставим в соответствие формулу Φ_i по правилу:

$$\Phi_i(x, y, j) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \left[\begin{array}{l} x \text{ — входная конфигурация команды } I_i, \\ \qquad \text{если } i \leq n, \\ y \text{ — выходная конфигурация команды } I_i, \\ j \text{ — номер следующей команды}; \\ x \text{ — выходная конфигурация машины}, \\ \qquad \text{если } i \nless n, \\ y = x, \\ j = 0. \end{array} \right.$$

Построение соответствующих формул разбивается на случаи.

1. Если $(I_i \rightleftharpoons R_m \leftarrow c)$, тогда $\Phi(x,y,j) \rightleftharpoons (y = replace(x,m,c) \ \& \ j = i+1$.

2. Если $(I_i \rightleftharpoons R_m \leftarrow \mathrm{MA}(R_{i_1},\dots,R_{i_k}))$, тогда $\Phi_i(x,y,j) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons (A((x)^{i_1},\dots,(x)^{i_k}) = y \ \& \ j = i{+}1)$, где A — универсальная для алгебраических.

3. Если $(I_i \rightleftharpoons R \leftarrow \mathrm{MT}(R_{i_1},\dots,R_{i_k})$, тогда $\Phi(x,y,j) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons (T((x)^{i_1},\dots,(x)^{i_k}) = y \ \& \ j = i{+}1)$, где T — универсальная для ч.р.ф.

4. Если $(I_i \rightleftharpoons R_m \leftarrow R_n$, тогда $\Phi(x,y,j) \rightleftharpoons (y = replace(x,m,(x)^n) \ \& \ j = i+1)$.

5. Если $(I_i \rightleftharpoons If \ \ G(R_1,\dots,R_k) \ \ then \ goto \ n, \ elsem)$, тогда

$$\Phi_i(x,y,j) \rightleftharpoons ((G((x)^{i_1},\dots,(x)^{i_k}) \ \& \ y = n \ \&$$

$$\& \ x = y)) \vee (\neg G(x)^{i_1},\dots,(x)^{i_k}) \ \& \ j = m \ \& \ x = y))).$$

Построим $\Delta+$LFP-определение для следующего предиката:

$C(x,t,\ <y,m>) \rightleftharpoons$

$$\rightleftharpoons \left[\begin{array}{l} \text{за } t \text{ шагов от конфигурации } x \\ \qquad \text{перешли к конфигурации } y; \\ m \text{ — номер команды которую нужно} \\ \qquad \text{выполнять на шаге } t+1, \text{ если } m \leq n, \\ \text{иначе } m = 0. \end{array}\right.$$

Для этого введем оператор:

$\chi_1(S;x,t,\ <y,n>) \rightleftharpoons (t = 0 \ \& \ x = y \ \& \ n = 0) \vee$
$\vee \exists n1 \exists y1 \ \mathrm{Nat}(n) \ \& \ \mathrm{Nat}(n1) \ \& \ \mathrm{Nat}(t) \ \& \ S(x,t-1,$
$<y1,n1>) \ \& \ \Phi(y1,y,n)$.

Обозначим:

$Q(x,t-1,\ <y,n>) \rightleftharpoons$
$\rightleftharpoons \exists n1 \ \exists y1 \ \mathrm{Nat}(n) \ \& \ \mathrm{Nat}(n1) \ \& \ \mathrm{Nat}(t) \ \& \ S(x,t-1,$
$<y1,n1>) \ \& \ \Phi(y1,y,n)$.

Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям теоремы 1 [6], можно построить $\Delta+$LFP-определение для Q. В итоге искомый предикат имеет следующее определение: $C(x, t, <y, n>) = \mathrm{LFP}_{C;x,t,l}(\chi(S; x, t, <y, n>))$.

Легко заметить, что рассматриваемая **AMR** — вычислимая функция имеем следующее Σ-определение:

$$f(x) = y \leftrightarrow HW(\mathbf{R}) \models (\exists \mathrm{tNat(t)}\ \&\ \mathrm{C(x, t < y, 0 >)}).$$

ТЕОРЕМА 5. *Любая действительнозначная Σ-определимая функция* AMR-*вычислима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — вещественнозначная, Σ-определимая функция, тогда по теореме 1 найдутся ч.р.ф. h, g, χ полностью ее определяющие. Пусть k — номер машины Тьюринга, вычисляющей функцию g, n — номер машины Тьюринга, вычисляющей функцию χ. Нетрудно убедиться, что следующая машина, начиная с конфигурации $< x, \ldots >$ вычисляет $< y, \ldots >$, где y является значением рассматриваемой функции в точке x:

$I_1 :\ R_2 \leftarrow -1,$
$I_2 :\ R_2 \leftarrow R_2 + 1,$
$I_3 :\ R_3 \leftarrow 2R_2,$
$I_4 :\ if\ (x \in < \nu(h(R_3)), \nu(h(R_3)+1) >)\ then\ goto$ 12
$\quad else$ 5,
$I_5 :\ if\ (x \in \nu(h)R_3)))\ then\ goto$ 7 $else$ 6,
$I_6 :\ if\ (x = \nu(h(R_3)+1))\ then\ goto$ 9 $else$ 2,
$I_7 :\ R_1 \leftarrow \nu(\chi(R_3)),$
$I_8 :\ if\ (a = a)\ then\ goto$ 13 $else$ 13,
$I_9 :\ R_1 \leftarrow \nu(\chi(R_3 + 1)),$
$I_{10} :\ if\ (a = a)\ then\ goto$ 13 $else$ 13,
$I_{11} :\ R_4 \leftarrow T(k, R_2),$
$I_{12} :\ R_1 \leftarrow A(R_4, R_1),$
$I_{13} :\ R_1 \leftarrow R_1.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Абстрактная машина Univ называется универсальной для класса AMR-вычислимых функций, если для любой AMR-вычислимой функции f найдется $z \in HW(\mathbf{R})$, что $f(x) = y$ тогда и только тогда, когда абстрактная машина Univ, начиная работу с конфигурации $< x, z, \ldots >$, заканчивает конфигурацией $< y, \ldots >$.

ТЕОРЕМА 6. *Универсальная машина* Univ *существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На неформальном уровне работа универсальной машины заключается в следующем: если e — код AMR-машины P, вычисляющей функцию f, тогда нужно декодировать число e и имитировать вычисление P шаг за шагом; при этом на каждом шаге выписывать содержимое регистров и команду, которую нужно выполнять на следующем шаге. Когда вычисление заканчивается значение функции содержится в регистре R_1. Итак, нам понадобится:

1) закодировать программы;

2) уметь воспроизводить текущую ситуацию, которая состоит из текущей конфигурации и номера следующей команды.

Этап 1. Закодируем команды программы следующим образом:

а) для команд типа $R_m \leftarrow c$ код $< 1, m, c >$;

б) для команд типа $R \leftarrow \mathrm{MA}(R_1, \ldots, R_k)$ код $< 2, m < 1, \ldots, k >>$;

в) $R \leftarrow \mathrm{MT}(R_1, \ldots, R_k)$ код $< 3, m < 1, \ldots, k >>$;

г) для команд типа $If\Phi(R_1, \ldots, R_k)$ *then goto* n, *else* m код $< 4, \varphi, < 1, \ldots, k >, n, m >$, где φ — код Δ-формулы ;

д) для команд типа $R_m \leftarrow R_n$ код $< 5, m, n >$;

е) для команд типа $R_m \leftarrow f(R_1, \ldots, R_n)$ код $< 6, \bar{f}, 1, \ldots, k >$, где $\bar{f}$ — код терма f.

В этом случае кодом программы будет список кодов команд. Текущая конфигурация задается списком $< a_1, \ldots, a_n >$, где a_i содержимое регистра R_i.

Этап 2. Построим AMR-машины для следующих функций:

$$config(e, < c, j >) =$$

$$= \begin{cases} c_1 \text{ — конфигурация после выполнения команды с номером } j \text{ над конфигурацией } c, \\ \qquad \text{если } j \leq Ln(e), \\ c, \text{ если } j \geq Ln(e). \end{cases}$$

Начальная конфигурация машины: $a = << c, j >, e, 0, 0, 0, \ldots >$.

Программа для этой функции имеет следующий вид:

$I_1:$ *if* $\text{head}(\text{tail}(R_1)) \geq Ln(e)$ *then* 21 *else* 2,

$I_2:$ $R_3 \leftarrow \text{head}(\text{tail}(R_1))$,

$I_3:$ $R_3 \leftarrow (e)^{R_3}$,

$I_4:$ *if* $\text{head}((e)^{R_3}) = 1$ *then goto* 5 *else* 7,

$I_5:$ $R_1 \leftarrow replace(\text{head}(R_1)), \ \text{head}(\text{tail}((e)^{R_3})),$
$\text{head}(\text{tail}(\text{tail}((e)^{R_3}))),$

$I_6:$ *if* $(a = a)$ *then goto* 21 *else* $n + 1$

$I_7:$ *if* $\text{head}((e)^{R_3}) = 2$ *then goto* 8 *else* 10,

$I_8:$ $R_1 \leftarrow \ replace \ \text{head}(R_1), \text{head}(\text{tail}((e)^{R_3})),$
$\text{MT}(\text{head}(\text{tail}(\text{tail}((e)^{R_3})))),$

$I_9:$ *if* $a = a$ *then* 21 *else* 22,

$I_{10}:$ *if* $\text{head}((e)^{R_3}) = 3$ *then goto* 11 *else* 13,

$I_{11}:$ $R_1 \leftarrow replace(\text{head}(R_1), \text{head}(\text{tail}((e)^{R_3}))),$
$\text{MT}(\text{head}(\text{tail}(\text{tail}((e)^{R_3}))))),$

$I_{12}:$ *if* $a = a$ *then* 21 *else* 22,

$I_{13}:$ *if* $\text{head}((e)^{R_3}) = 4$ *then goto* 14 *else* 15,

$I_{14}:$ *if* $P(\text{tail}(\text{head}((e)^{R_3})), \text{tail}(\text{tail}(\text{head}(e)^{R_3})))$
then goto$\text{tail}(\text{tail}(\text{tail}(\text{head}(e)^{R_3})))$
else 13,

$I_{15}:$ *if*$\text{head}((e)^{R_3}) = 5$ *then goto* 16 *else* 18,

$I_{16}:$ $R_1 \leftarrow replace \ \text{head}(R_1), \text{head}(\text{tail}((e)^{R_3})),$
$\text{head}(\text{tail}(\text{tail}((e)^{R_3}))),$

$I_{17}:$ *if* $a = a$ *then* 21 *else* 22,

$I_{18}:$ *if* $\text{head}((e)^{R_3}) = 6$ *then goto* 19 *else* 21,

$I_{19}:$ $R_1 \leftarrow replace(\text{head}(R_1), \text{head}(\text{tail}((e)^{R_3})),$
$\text{f}(\text{head}(\text{tail}(\text{tail}((e)^{R_3})))),$

$I_{20}:$ *if* $a = a$ *then* 21 *else* 22,

$I_{21}:$ $R_1 \leftarrow \text{head}(R_1)$;

$next(e, < c, j >) =$

$$= \begin{cases} j_1 \text{ — номер команды после выполнения} \\ \quad \text{команды с номером } j \text{ над} \\ \quad \text{конфигурацией } c, \text{ если } j \leq Ln(e), \\ 0, \text{ если } j \geq Ln(e). \end{cases}$$

Пусть P — универсальный предикат для Δ-предикатов. Начальная конфигурация имеет вид $<< c, j >, e, 0 \ldots >$. Следующая программа вычисляет требуемую функцию:

$I_1:$ *if* $\mathrm{head}(\mathrm{tail}(R_1)) \geq Ln(e)$ *then* 2 *else* 4,
$I_2:$ $R_1 \leftarrow 0$,
$I_3:$ *if* $(a = a)$ *then goto* 14 *else* 15,
$I_4:$ $R_3 \leftarrow e^{\mathrm{head}(\mathrm{tail}(R_1))}$,
$I_5:$ $R_4 \leftarrow \mathrm{head}(R_3)$,
$I_6:$ *if*$(R_1 = 1) \vee (R_4 = 2) \vee (R_4 = 3) \vee (R_4 = 5) \vee$
$\vee (R_4 = 6)$*then goto* 7 *else* 9,
$I_7:$ $R_1 \leftarrow \mathrm{head}(\mathrm{tail}(R_1)) + 1$,
$I_8:$ *if* $a = a$ *then goto* 14 *else* 15,
$I_9:$ *if* $a = a$ *then goto* 21 *else* 22,
$I_{10}:$ *if* $P(\mathrm{head}(\mathrm{tail}((R_3), \mathrm{head}(R_1)^{\mathrm{head}(\mathrm{tail}(\mathrm{tail}(R_3)))})$
then goto 11 *else* 13,
$I_{11}:$ $R_1 \leftarrow \mathrm{head}(\mathrm{tail}(\mathrm{tail}(\mathrm{tail}(R_3))))$,
$I_{12}:$ *if* $a = a$ *then* 14 *else* 15,
$I_{13}:$ $R_1 \leftarrow \mathrm{head}(\mathrm{tail}(\mathrm{tail}(\mathrm{tail}(\mathrm{tail}(R_3)))))$.

Результат леммы 1 позволяет построить программу для универсальной машины такой, что $\mathrm{Univ}(x, e) = \mathrm{AMR}_e(x)$. Начальная конфигурация $< x, e, 0, \ldots >$. Программа имеет следующий вид:

$I_1:$ $R_3 \leftarrow (\mathrm{nil}, R_1)$,
$I_2:$ $R_4 \leftarrow 1$,
$I_3:$ $R_5 \leftarrow 1$,
$I_4:$ $R_5 \leftarrow R_5 + 1$,
$I_5:$ $R_6 \leftarrow cohfig(R_2, < R_4, R_3 >)$,
$I_6:$ $R_4 \leftarrow next(R_2, < R_4, R_3 >)$,
$I_7:$ $R_3 \leftarrow R_6$,

$I_8:\ if R_4 = 0\ then\ goto\ 9\ else\ 4,$
$I_9:\ R_1 \leftarrow \mathrm{head}(R_3).$

Легко проверить что построенная AMR-машина будет универсальной.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Динамические логики над допустимыми множествами //ДАН СССР. - 1983. - Т.273, N 5. - С. 1045-1048.

2. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Логико- математиеские основы проблемы МОЗ. - Новосибирск,1985. - Вып. 107: Вычислительные системы. - С. 3-29.

3. BARWISE I.Admissible sets and structure. - Berlin, 1985.

4. Van den DRIES L. Remarks on Tarki's problem concerning (R,+,*, exp)// Logic Colloquim'82,1984. - P.240-266.

5. РУДНЕВ В.А. Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах //Алгебра и логика. - 1983. - Т.25,N 4.

6. KOROVINA M.B. Generalized computability of real functions //SibAM, 1992. - Vol.2, N 4. - P. 1-18.

7. МАМФОРД Д. Алгебраическая геометрия. - М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию
2 июля 1996 года