СТРУКТУРНЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ
СВОЙСТВА ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1996 год Выпуск 156

УДК 510.5+519.68

Σ-НУМЕРАЦИЯ И Σ-ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$

А.Н.Хисамиев

Ю.Л.Ершовым [4] введено понятие Σ-определимости модели $\mathcal{M}$ в допустимом множестве $\mathbb{A}$. В случае, когда $\mathbb{A}$ — наименьшее допустимое множество $\mathrm{HF}_{\mathcal{N}}$, то данное понятие обобщает понятие конструктивизируемости модели [5]. Поэтому представляет интерес нахождение условий для Σ-определимости модели $\mathcal{M}$ в $\mathrm{HF}_{\mathcal{N}}$.

В работе введено понятие Σ-нумерации модели $\mathcal{N}$, и для модели $\mathcal{N}$, допускающую такую нумерацию, получен критерий Σ-определимости модели $\mathcal{M}$ в $\mathrm{HF}_{\mathcal{N}}$ на языке относительной рекурсивности (теорема 1). Отсюда следует, что для Σ-нумерованной модели $\mathcal{N}$ справедливо: 1) модель $\mathcal{M}$ Σ-определима в $HF_{\mathcal{N}}$ тогда и только тогда, когда она Δ_1-определима; 2) если абелева p-группа (булева алгебра) Σ-определима в $\mathrm{HF}_{\mathcal{N}}$, то в $\mathrm{HF}_{\mathcal{N}}$ Σ-определим и ее ульмов (ординальный) тип. Показано, что стандартная нумерация конечно порожденной алгебры является ее Σ-нумерацией. Получен критерий, когда модель $\mathcal{M}$ допускает Σ-нумерацию.

§ 1. Σ-нумерация и Σ-определимость в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$

Здесь вводится понятие Σ-нумерации модели $\mathcal{M}$ и дан критерий Σ-определимости модели $\mathcal{N}$ в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$ для Σ-нумерованной модели $\mathcal{M}$.

Рассматриваются только не более чем счетные модели конечных сигнатур, не содержащих функциональных символов. Знак "$\rightleftharpoons$" означает выражение "равно по определению".

Приведем понятие Σ-определимости модели $\mathcal{M}$ в допустимом множестве, введенное Ю.Л.Ершовым в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что модель $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, \sigma_1\rangle$ сигнатуры $\sigma_1 = \langle P_1^{n_1}, \ldots, P_s^{n_s}\rangle$ Σ-определима в допустимом множестве $\mathcal{A}$, если существуют Σ-формула $\varphi(x,y)$ и Δ_1-формулы $\eta(x_1, x_2, y)$, $\psi_1(x_1, \ldots, x_{n_1}, y), \ldots$ $\ldots, \psi_s(x_1, \ldots, x_{n_s}, y)$ сигнатуры модели $\mathcal{A}$ и элемент $a \in A$ такие, что формула $\eta(x_1, x_2, a)$ определяет конгруэнтность $\bar{\eta}$ на модели $\mathcal{M}'_1 = \langle X, P'_1, \ldots, P'_s\rangle$ и фактор-модель $\mathcal{M}'_1/\bar{\eta}$ изоморфна $\mathcal{M}_1$, где

$X = \{b \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi(\mathrm{b}, \mathrm{a})\}$,

$P'_i = \{\langle b_1, \ldots, b_{n_i}\rangle \mid b_j \in X, \quad \mathcal{A} \models \psi_i(\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_{n_i}, \mathrm{a})\}$.

Если в этом определении $\varphi(x,y)$ также будет Δ_1-формулой, то будем говорить, что модель $\mathcal{M}_1$ Δ_1-определима в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$.

Пусть $\mathcal{M}_2 = \langle M_2, \sigma_2\rangle$ — модель сигнатуры $\sigma_2 = \langle Q_1, \ldots, Q_k\rangle$. Если S — множество, то через $\mathrm{PF}(S)$ обозначим множество всех конечных подмножеств множества S. Допустимое множество $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$ над моделью $\mathcal{M}_2$ есть модель $\langle M_2 \cup \mathrm{HF}_{M_2}, U^1, \in, Q_1, \ldots, Q_k\rangle$, где предикат U выделяет множество M_2 праэлементов, а множество $\mathrm{HF}_{\mathrm{M}_2}$ определено так:

$\mathrm{HF}_{M_2}(o) = \emptyset$,

$\mathrm{HF}_{M_2}(n+1) = \mathrm{PF}(M \cup \mathrm{HF}_M(n))$,

$\mathrm{HF}_{M_2} = \bigcup\limits_{n<\omega} \mathrm{HF}_M(n)$.

Известно, что множество ω всех натуральных чисел в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$ выделяется Δ_0-формулой. Отображение ν множеств ω на основное множество M модели $\mathcal{M}$ называется *нумерацией* модели $\mathcal{M}$, а пара $(\mathcal{M}, \nu)$ — нумерованной моделью. Через η_ν обозначим нумерационную эквивалентность, т.е. $\eta_\nu = \{\langle n, m\rangle \mid \nu n = \nu m\}$. Нумерацию ν модели $\mathcal{M}$ можно рассматривать как функцию в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если нумерация ν модели $\mathcal{M}$ является Σ-функцией в $HF_{\mathcal{M}}$, то ν называется *Σ-нумерацией* модели $\mathcal{M}$. Если существует Σ-нумерация ν модели $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ назовем *внутреннее перечислимой* или Σ-перечислимой.

Пусть $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ — нумерованная модель сигнатуры σ_1. Через $\mathcal{M}_1^{\nu_1}$ обозначим модель $\langle\omega, \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_s\rangle$, где предикаты $\bar{P}_i$ определяются так:

$$\bar{P}_i(m_1, \ldots, m_{n_i}) \Leftrightarrow P_i(\nu_1 m_1, \ldots, \nu_1 m_{n_i}).$$

Ясно, что фактор-модель $\mathcal{M}_1^{\nu_1}/\eta_{\nu_1}$ изоморфна модели $\mathcal{M}_1$.

Пусть $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$ — нумерованная модель сигнатуры $\sigma_2 = \langle Q_1, \ldots, Q_k\rangle$. Если предикаты $\eta_{\nu_1}, \bar{P}_i$, $1 \le i \le s$, модели $\mathcal{M}_1^{\nu_1}$ рекурсивны относительно предикатов η_{ν_2}, $\bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_k$ модели $\mathcal{M}_2^{\nu_2}$, то говорят, что нумерованная модель $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ *рекурсивна относительно нумерованной модели* $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. Если n-местный предикат $S \subseteq \omega^n$ рекурсивен относительно предикатов $\eta_{\nu_2}, \bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_k$, то говорят, что S рекурсивен относительно нумерованной модели $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$.

Аналогично определяются понятия рекурсивной перечислимости модели $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ и предиката S относительно модели $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ — не более, чем счетные модели соответственно сигнатур σ_1, σ_2 и ν_2 — Σ-нумерация модели $\mathcal{M}_2$. Тогда модель $\mathcal{M}_1$ Σ-определима в $HF_{\mathcal{M}_2}$ тогда и только тогда, когда существует такая нумерация ν_1 модели $\mathcal{M}_1$, что пара $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ рекурсивна относительно $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модель $\mathcal{M}_1$ конечна, то теорема очевидна. Поэтому будем считать, что модель $\mathcal{M}_1$ бесконечна.

Докажем сперва теорему справа налево. Пусть $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. Покажем, что модель $\mathcal{M}_1$ Σ-определима в $HF_{\mathcal{M}_2}$. В качестве X в определении 1 нужно взять множество ω, которое в $HF_{\mathcal{M}_2}$ выделяется Δ_0-формулой $\varphi(x)$. Покажем, что нумерационная эквивалентность η_{ν_1} и предикаты $\bar{P}_i$ Δ_1-определимы в $HF_{\mathcal{M}_2}$. Для этого достаточно доказать, что каждая всюду определенная функция Θ, рекурсивная относительно характеристических функций предикатов η_{ν_2}, $\bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_k$, является Σ-функцией в $HF_{\mathcal{M}_2}$. Используя определения [10] относительно рекурсивности имеем, что функция Θ получается из базисных функций "+", ".", характеристической функции отношения "<", функции выборки и характеристических функций предикатов η_{ν_2}, $\bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_k$, путем конечного числа применений операций суперпозиций и минимизаций. Отсюда нетрудно доказать, что функция Θ является Σ_1-функцией. Поэтому предикаты η_{ν_1}, $\bar{P}_i$ являются Δ_1-определенными в $HF_{\mathcal{M}_2}$. Так как $\mathcal{M}_1^{\nu_1}/\eta_{\nu_1} \simeq \mathcal{M}_1$, то модель $\mathcal{M}_1$ Σ-определима в $HF_{\mathcal{M}_2}$. Достаточность условий теоремы доказана.

Из доказанной части теоремы имеем:

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть S — рекурсивное отношение на ω. Тогда S рекурсивно относительно $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$, а значит отношение S Δ_1-определимо в $HF_{\mathcal{M}_2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Фактически мы доказали

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если пара $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$ и ν_2 — Σ-нумерация, то модель $\mathcal{M}_1$ Δ_1-определима в $HF_{\mathcal{M}_2}$.*

Докажем теорему слева направо. Пусть ν_2 — Σ-нумерация модели $\mathcal{M}_2$ и счетная модель $\mathcal{M}_1$ Σ-определима в $HF_{\mathcal{M}_2}$. Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

ЛЕММА 1 [10]. *Существует взаимно-однозначное отображение $e: \omega \to HF$ такое, что выполнены условия*

1) e — Σ-функция в HF;

2) $e(m) = n$ — рекурсивное отношение от $m, n \in \omega$;

3) $e(m) \in e(n)$ — рекурсивное отношение от m, n.

Аналогом этой леммы является

ЛЕММА 2. *Существует нумерация $\bar{e}: \omega \to HF_{\mathcal{M}_2}$ множества $HF_{\mathcal{M}_2}$ такая, что выполнены условия:*

1) $\bar{e}$ — Σ-функция;

2) $\bar{e}(m) = n$ — рекурсивное отношение от m, n;

3) для любой Δ_o-формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_s)$ отношение

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \varphi(\bar{e}(n_1),\ldots,\bar{e}(n_s))$$

от $n_1,\ldots,n_s$ рекурсивно относительно нумерованной модели $(\mathcal{M}_2,\ \nu_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множество $\omega_o \subseteq \omega$ и нумерацию $e_o:\ \ \omega_o \to \mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$ множества $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$ индуктивно следующим образом. Для любого числа $n \in \omega$, числа 2^n и 3^n принадлежат ω_o и $e_o(2^n) = \nu_2(n)$, $e_o(3^n) = e(n)$, где функция e определена в лемме 1. Пусть числа $n_1 > n_2 > \ldots > n_s$ такие, что $n_i \in \omega_o$ и $e_o(n_i) = x_i, 1 \leq i \leq s$. Тогда число $m = 5^{2^{n_1}\cdots p_s^{n_s}}$ принадлежит ω_o и $e_o(m) \rightleftharpoons \{x_1,\ldots,x_s\}$. Определение множества ω_o и функции e_o закончено. Множество ω_o, очевидно, рекурсивно. Отсюда существует разнозначная рекурсивная функция g, перечисляющая множество ω_o в порядке возрастания его элементов. Положим $\bar{e} = eg$. Покажем, что $\bar{e}$ является Σ-функцией. Так как g является Σ-функцией, то для этого достаточно поазать, что e_o является Σ-функцией. Покажем это. Определим функцию:

$$H(l) = \begin{cases} \{s_1,\ldots,s_m\}, \text{ если } s_i \in \omega_o,\ s_1 > \ldots > s_m, \\ \qquad l = 5^{2^{s_1}\cdots p_m^{s_m}}; \\ 0, \text{ в противном случае }. \end{cases}$$

Покажем, что $H(l)$ является Σ-функцией. Очвидно, что отношение $s \in H(l)$ от s и l рекурсивно. Поэтому по замечанию 1 оно Δ_1-определимо. Справедлива эквивалентность:

$$H(l) = y \Leftrightarrow (l \notin \omega_o\ \wedge\ y = 0) \vee$$

$$\vee \exists k \in l((l = 2^k\ \vee\ l = 3^k)\ \wedge\ y = 0) \vee$$

$$\vee \forall z \in y(z \in H(l)\ \wedge\ \forall z \in l(z \in H(l) \to z \in y)).$$

Отсюда получаем, что H есть Σ-функция.

Определим Σ-функцию $G(a,b)$ так:

$$G(a,b) = u \Leftrightarrow \mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models a \in \omega_o \wedge$$

$$\wedge \forall k \in a (a \neq 2^k \ \wedge \ a \neq 3^k) \wedge$$

$$\wedge \exists x \in b \exists y_1 y_2 \in TC(b)(x = \langle y_1, y_2 \rangle \ \wedge \ y_1 \in H(a) \ \wedge \ y_2 \in u) \wedge$$

$$\wedge \forall z_2 \in u \ \exists z_1 \in TC(b) \ \exists w \in b (w = \langle z_1, z_2 \rangle \ \wedge \ z_1 \in H(a)).$$

Функция e_o получается из функции ν_2, e, G следующей Σ-рекурсией:

$e_o(2^k) = \nu_2(k)$,

$e_o(3^k) = e(k-1)$,

$e_o(l) = G(l, \langle z, e_o(z) \rangle | z \in l)$,

где $l = 5^{2^{s_1} \dots p_m^{s_m}}$, $s_i \in \omega_o$.

Поэтому e_o, а следовательно $\bar{e}$, являются Σ-функциями. Утверждение 1 леммы 2 доказано.

Утверждение 2 следует из леммы 1 и следующей эквивалентности: $\bar{e}(m) = n \Leftrightarrow \exists s (m = 2^s \wedge e(s) = n)$.

Утверждение 3 докажем индукцией по сложности формулы φ.

1. Пусть φ — атомная формула вида: $\varphi = Q_i(x_1, \dots, x_{m_i})$. Докажем рекурсивность отношения

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models Q_i(\bar{e}(n_1), \dots, \bar{e}(n_{m_i})), \tag{1}$$

от $n_1, \dots, n_{m_i}$ относительно $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. Пусть $g(n_j) = r_j$, $1 \leq j \leq m_i$. Тогда $\bar{e}(n_j) = e_o(r_j)$. Поэтому можно считать, что (1) имеет вид:

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models Q_i(e_o(n_1), \dots, e_o(n_{m_i})). \tag{2}$$

Если хотя бы одно из чисел n_j не представимо в виде 2^{k_j}, то (2) ложно. Пусть $n_j = 2^{k_j}$. Тогда (2) равносильно отношению: $\mathcal{M}_2 \models Q_i(\nu_2 k_1, \dots, \nu_2 k_{m_i})$, т.е. равносильно истинности предиката $\bar{Q}_i(k_1, \dots, k_{m_i})$. Это означает, что отношение (1) рекурсивно относительно $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$.

2. Пусть φ имеет вид

$$\varphi = (\bar{e}(n) \in \bar{e}(m)). \tag{3}$$

Докажем рекурсивность отношения

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \bar{e}(n) \in \bar{e}(m). \tag{4}$$

Как и в случае (1) можно считать, что (4) имеет вид:

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models e_o(n) \in e_o(m). \tag{5}$$

Если $m = 2^k$, то отношение (5) ложно. Если $m = 3^k$, то (5) истинно тогда и только тогда, когда для некоторого числа k верно $n = 3^k \wedge e(k) \in e(m)$. Отсюда по лемме 1 имеем, что отношение (5) рекурсивно.

Пусть $m = 5^{2^{s_1} \cdots p_{m'}^{s_{m'}}}, s_j \in \omega_o, s_1 > \ldots > s_{m'}$. Тогда (5) равносильно отношению

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models e_o(n) = e_o(s_1) \vee \ldots \vee e_o(n) = e_o(s_{m'}).$$

Отсюда нам нужно показать рекурсивность отношения

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models e_o(n) = e_o(m) \tag{6}$$

относительно $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$ от чисел n, m.

Доказательство этого проведем индукцией по числу m. Пусть $m = 2^k$ и $n = 2^s$. Тогда $e_o(m) = e_o(n) \Leftrightarrow \nu_2 k = \nu_2 s$, т.е. отношение (5) рекурсивно относительно предиката η_{ν_2}.

Если $m = 3^k$, то отношение (5) истинно тогда и только тогда, когда для некоторого числа s верно $n = 3^s \wedge e(s) = e(k)$. Это отношение по лемме 1 рекурсивно.

Пусть $m = 5^{2^{s_1} \cdots p_{m'}^{s_{m'}}}$, $s_j \in \omega_o$, $s_1 > \ldots > s_{m'}$, $j = 1, \ldots, m'$. Если $n = 2^k$ или $n = 3^k$, то отношение (5) ложно. Пусть

$$n = 5^{2^{r_1} \cdots p_k^{r_k}}, \quad r_1 > \ldots > r_k, \; r_i \in \omega_o, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тогда отношение (6) равносильно конъюнкции формул:

1_j : $e_o(s_j) = e_o(r_1) \vee \ldots \vee e_o(s_j) = e_o(r_k)$;

2_i : $e_o(r_i) = e_o(s_1) \vee \ldots \vee e_o(r_i) = e_o(s_{m'})$.

По индукционному предположению атомные формулы из 1_j и 2_i рекурсивны относительно $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. Отсюда отношение (6), а следовательно и отношение (5), рекурсивны относительно $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$.

Таким образом, для атомных формул утверждение 3 доказано. Далее индукция проводится обычным способом. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Счетная модель* $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, \sigma_1 \rangle$ Σ-*определима в* $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$ *тогда и только тогда, когда существует разнозначная нумерация* ν_1 *модели* $\mathcal{M}_1$ *и* Δ_1-*формулы* $\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_s$, *определяющие предикаты* $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_s$ *модели* $\mathcal{M}_1^{\nu_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модель $\mathcal{M}_1$ Σ-определена, модель $\mathcal{M}'_1$ и формулы φ, η, $\psi_1, \ldots, \psi_s$ такие же как в определении 1. Через w_1 обозначим множество $\bar{e}^{-1}(M'_1)$. Тогда $x \in w_1 \iff \bar{e}(x) \in M'_1$. Так как $\bar{e}$ есть Σ-функция, а множество M'_1 определено формулой $\varphi(x, a)$ в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$, то множество w_1 также Σ-определено в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$. На w_1 введем эквивалентность: $n \sim m \iff \mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \eta(\bar{e}(n), \bar{e}(m), a)$. Отсюда следует, что эта эквивалентность Δ_1-определена. Определим функцию $g_o : w_1 \to w_1$, которая выбирает из каждого класса фактор-множества $w_1/\sim$ наименьшего представителя, т.е.

$$g_o(n) = y \iff n \in w_1 \wedge y \in w_1 \wedge (n \sim y) \wedge \forall z \in y (n \not\sim z).$$

Отсюда получаем, что g_o есть Σ-функция. Пусть $w_2 = g_o(w_1)$ и функция $g : w \to w_2$ перечисляет множество w_2 без повторения в порядке возрастания его элементов. Функция g получена Σ-рекурсией из следующей функции:

$$G(n, x) = y \iff y \in w_1 \wedge \forall u \in TC(x) \forall w \in$$

$$\in x (u = 2^{nd} w \to y \not\sim u) \wedge \forall v \in y \exists u \in TC(x) \exists w \in$$

$$\in x (u = 2^{nd} w \vee v \sim u).$$

Отсюда следует, что g — Σ-функция. Функция $\nu_o \rightleftharpoons \bar{e}g$ является нумерацией модели $\mathcal{M}'_1/\bar{\eta}$ и она Σ-функция в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$. Обозначим через f изоморфизм модели $\mathcal{M}'_1/\bar{\eta}$ на $\mathcal{M}_1$ и положим $\nu_1 = f\nu_o$, $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_{n_i})$; $\nu_o(\bar{m}) = (\nu_o m_1, \ldots, \nu_o m_{n_i})$, $\bar{\psi}_i(m) = \bar{\psi}_i(\nu_o \bar{m})$. Так как ψ_i — Σ-формула, а ν_o — Σ-функция, то $\bar{\psi}$ будет

Σ-формулой. Покажем, что предикат $\bar{P}_i$ на модели $\mathcal{M}_1^{\nu_1}$ определяется формулой $\bar{\psi}_1$. Действительно,

$$\mathcal{M}_1^{\nu_1} \models \bar{P}_i(\bar{m}) \Longleftrightarrow \mathcal{M}_1 \models P_i(\nu_1 \bar{m}) \Longleftrightarrow \mathcal{M}_1 \models$$
$$\models P_i(f\nu_o\bar{m}) \Longleftrightarrow \mathcal{M}'_1/\bar{\eta} \models P_i(\nu_o\bar{m}) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \psi_i(\nu_o\bar{m}) \Longleftrightarrow \mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \bar{\psi}_i(\bar{m}).$$

Отсюда нумерация ν_1 модели $\mathcal{M}_1$ будет требуемой.

В другую сторону лемма очевидна. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим модель $\bar{\mathcal{M}}_1$, определенную в лемме 3. Покажем, что каждый предикат $\bar{P}_i$ рекурсивен относительно нумерованной модели $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. По определению предиката $\bar{P}_i$ имеем:

$$\bar{\mathcal{M}}_1 \models \bar{P}_i(\bar{m}) \Longleftrightarrow \mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \bar{\psi}(\bar{m}, a), \qquad (7)$$

где $\bar{\psi}$ — Δ_1-формула. Пусть Σ-формулы Θ_i и Θ'_i такие, что $\bar{\psi}_i$ эквивалентна в формуле Θ_i и формуле $\neg\Theta'_i$ на модели $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$. По теореме о рефлексии [10, стр. 16] формула Θ_i эквивалентна на модели $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$ некоторой формуле $\exists z\tilde{\Theta}_i(z)$, где $\tilde{\Theta}_i$ — Δ_o-формула. Отсюда (7) равносильно эквивалентности:

$$\bar{\mathcal{M}}_1 \models \bar{P}(\bar{m}) \Longleftrightarrow \mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \exists y\tilde{\Theta}_i(\bar{m}, a, y). \qquad (8)$$

Пусть $a = \bar{e}(n)$. По лемме 2 по числам m_j эффективно находим числа r_j такие, что $\bar{e}(r_j) = m_j$. Тогда (8) равносильна эквивалентности:

$$\bar{\mathcal{M}}_1 \models \bar{P}(\bar{m}) \Longleftrightarrow \mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \exists s\tilde{\Theta}_i(\bar{e}(\bar{r}), \bar{e}(n), \bar{e}(\bar{s})). \qquad (9)$$

По лемме 2 отношение

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2} \models \tilde{Q}_i(\bar{e}(r_1), \ldots, \bar{e}(r_{n_i}), \bar{e}(n), \bar{e}(s))$$

от переменных $r_1, \ldots, r_{n_i}, s$ рекурсивно относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. Тогда отношение из правой части (9), а следовательно предикат $\bar{P}_i$, рекурсивно перечислим относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. Аналогично получим, что предикат $\neg\bar{P}_i$ также рекурсивно перечислим относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. По теореме Поста [6], имеем, что предикат $\bar{P}_i$

рекурсивен относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. Нумерационная эквивалетность η_{ν_1} совпадает с обычным равенством на натуральных числах. Отсюда пара $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если в определении 1 формулы $\eta, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ будут Σ-формулами, то будем говорить, что модель $\mathcal{M}_1$ квази-Σ-определима в допустимом множестве $\mathcal{A}$.

Аналогично теореме 1 доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — не более, чем счетные модели соответственно сигнатур σ_1, σ_2 и ν_2 — Σ-нумерация модели $\mathcal{M}_2$. Тогда модель $\mathcal{M}_1$ квази-Σ-определима в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$ тогда и только тогда, когда существует такая нумерация ν_1 модели $\mathcal{M}_1$, что пара $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ рекурсивно перечислима относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$.*

Из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — не более, чем счетные модели и $\mathcal{M}_2$ — внутренне перечислима. Тогда модель $\mathcal{M}_1$ Σ-определима в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}_2}$ тогда и только тогда, когда она Δ_1-определима.*

§ 2. Σ-нумерации конечно порожденных алгебр

Представляет интерес исследование следующих вопросов:

1. Какие модели допускают Σ-нумерацию?

2. Какие нумерации данной модели будут Σ-нумерациями?

Покажем,что для конечно порожденных алгебр $\mathcal{A}$ эти вопросы решаются просто.

Пусть алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \sigma \rangle$, сигнатуры $\sigma = \langle f_1^{m_1}, \ldots \ldots, f_n^{m_n}, a_1, \ldots, a_r \rangle$ порождается элементами $a_1, \ldots, a_r$. Как известно [6] любой элемент алгебры $\mathcal{A}$ есть значение некоторого терма сигнатуры σ. Поэтому если мы определим нумерацию ν множества T всех термов сигнатуры σ, то ν будет и нумерацией алгебры $\mathcal{A}$. Следуя А.И.Мальцеву [7] определим одновременно множество $\omega_o \subseteq \omega$ и нумерацию $\nu_o : \omega_o \to T$ множества T следующим образом.

1. Числа $3^i, i = 1, \ldots, n$, принадлежат ω_o и $\nu_o(3^i) = a_i$.

2. Пусть известно, что числа $s_1, \ldots, s_{m_j}$ принадлежат ω_o и $\nu(s_i) = b_i, 1 \leq i \leq m_j$. Если f_j является m_j-местной операцией, тогда число $e = 2^j \cdot p_1^{s_1} \ldots p_{m_j}^{s_{m_j}}$ включаем в множество ω_o и полагаем $\nu_o(e) = f_j(b_1, \ldots, b_{m_j})$.

Нумерация ν_o и множество ω_o определены. Пусть рекурсивная функция f перечисляет множество ω_o в порядке возрастания его элементов. Тогда нумерация $\nu = \nu_o f$ алгебры $\mathcal{A}$ называется стандартной [7].

Аналогично доказательству Σ-определимости функции e_o в доказательстве утверждения 3 леммы 2 доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Стандартная нумерация ν конечно порожденной алгебры $\mathcal{A}$ является ее Σ-нумерацией.*

Отсюда и из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — не более чем счетная модель и $\mathcal{A}$ — конечно порожденная алгебра, а ν — ее стандартная нумерация. Тогда модель $\mathcal{M}$ Σ-определима в $\mathrm{HF}_{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда существует такая нумерация μ модели $\mathcal{M}$, что пара $(\mathcal{M}, \mu)$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{A}, \nu)$.*

§ 3. Условия для существования Σ-нумерации

Сперва докажем одно необходимое условие для того, чтобы модель $\mathcal{M}$ допускала Σ-нумерацию. Напомним, что модель $\mathcal{M}$ называется жесткой, если она не имеет нетождественных автоморфизмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если модель $\mathcal{M}$ допускает Σ-нумерацию, то существует такое обогащение $\mathcal{M}'$ модели $\mathcal{M}$ конечным числом констант, что модель $\mathcal{M}'$ является жесткой моделью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модель $\mathcal{M}$ имеет Σ-нумерацию ν. Тогда существует формула $\varphi(x, y, a_o, \ldots, a_{n-1})$, $a_i \in \mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$, $i < n$, такая, что выполнена эквивалентность:

$$\nu n = a \implies \mathrm{HF}_{\mathcal{M}} \models \varphi(n, a, a_o, \ldots, a_{n-1}) \qquad (10)$$

для любого элемента $a \in \mathcal{M}$. Пусть в построении элементов $a_o, \ldots, a_{n-1}$ участвуют праэлементы $p_1, \ldots, p_s$, т.е.

$\mathrm{sp}\bar{a} = \{p_1,\ldots,p_s\}$ [10]. Рассмотрим обогащение $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{M}, p_1,\ldots,p_s\rangle$ модели $\mathcal{M}$. Покажем, что модель $\mathcal{M}'$ является жесткой. Допустим противное, т.е. существует автоморфизм f модели $\mathcal{M}'$ такой, что для некоторого элемента $a \in M$ верно: $fa \neq a$. Автоморфизм f модели $\mathcal{M}'$ продолжим до автоморфизма $\hat{f}$ модели $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$, положив:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \in M, \\ \{\hat{f}(y) |\ y \in x\}, \text{ если } x \notin M. \end{cases}$$

Тогда имеем $\hat{f}a_i = a_i$, $i < n$, $\hat{f}a \neq a$. Пусть $\nu n = a$. Отсюда и из (10) имеем, что:

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}} \models \varphi(n, a, a_o, \ldots, a_{n-1}). \tag{11}$$

Отсюда

$$\mathrm{HF}_{\mathcal{M}} \models \varphi(n,\ \hat{f}a,\ a_o,\ldots,a_{n-1}) \tag{12}$$

так как $\hat{f}n = n$. Отсюда следует, что $\nu n = \hat{f}a$ и $\nu n = a$, $\hat{f}a \neq a$. Противоречие. Предложение доказано.

Из этого предложения следует, что, например, счетная модель $\mathcal{M}$ с пустой сигнатурой не допускает Σ-нумерации.

Пусть $\mathcal{M}$ — модель сигнатуры $\sigma = \langle Q_1,\ldots,Q_k\rangle$, $\sigma^* = \langle \sigma, U, \in, \bar{a}\rangle$, где $\bar{a} = \langle a_o,\ldots,a_{n-1}\rangle$, $\hat{\Phi} = \{\varphi | \varphi$ — формула сигнатуры $\sigma^*\}$, $G : \omega \to \hat{\Phi}$ — геделева нумерация всех формул сигнатуры σ^*, переменные которых содержатся среди $v_o, v_1, \ldots$

Допустим, что для модели $\mathcal{M}$ выполнено условие: существует такая конечная последовательность элементов $\bar{a} = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, $a_i \in \mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$, что для каждого элемента $p \in \mathcal{M}$ существует Σ-формула $\varphi_p(v_o)$ сигнатуры σ^* с одной свободной переменной v_o, которая выделяет p в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$, т.е. $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}} \models \exists! v_o \varphi_p(v_o) \wedge \varphi_p(p)$ и множество $\Phi = \{\varphi_p |\ p \in \mathcal{M}\}$ рекурсивно перечислимо. Тогда модель $\mathcal{M}$ назовем Φ-моделью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Счетная модель внутренне перечислима тогда и только тогда, когда она является Φ-моделью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть модель $\mathcal{M}$ внутренне перечислима и ν — ее Σ-нумерация. Пусть $\psi(v_o, v_1, \bar{a})$, $a_i \in \mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$, такая, Σ-формула, что выполнено условие: $\nu(m) = p \Longleftrightarrow \mathrm{HF}_{\mathcal{M}} \models \psi(p, m, \bar{a})$. Тогда множество $\Phi = \{\psi^*_m(v_o, \bar{a}) | m \in \omega\}$, где

$$\psi^*_m(v_o, \bar{a}) \rightleftharpoons \exists v_1 (v_1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{m-\text{ раз}} \wedge \psi(v_o, v_1, \bar{a})$$

будет требуемым.

Достаточность. Пусть $\mathcal{M}$ является Φ-моделью и множество $\Phi = \{\varphi_p(v_o, \bar{a}) | p \in \mathcal{M}\}$ такое, что элемент $p \in \mathcal{M}$ выделяется в $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}}$ Σ-формулой $\varphi_p(v_o, \bar{a})$. Так как множество $G^{-1}\Phi$ — рекурсивно перечислимо, то существует Δ_1-функция $g : \omega \to G^{-1}\Phi$, перечисляющая множество $G^{-1}\Phi$. Определим нумерацию ν модели $\mathcal{M}$, положив:

$$\nu n = p \Longleftrightarrow \mathrm{HF}_{\mathcal{M}} \models G(g(n))[p, \bar{a}]. \tag{13}$$

Доказательство того, что ν является Σ-нумерацией следует из (13) по следующей лемме.

ЛЕММА. *Существует такая Σ-формула $U(x,y)$ сигнатуры σ^*, что справедлива эквивалентность:* $\mathrm{HF}_{\mathcal{M}} \models U(n, b) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow [n \in \omega \wedge \exists m$ ((*свободные переменные формулы* $G(n)$ *содержатся среди* $v_o, \ldots, v_m$) $\wedge$ $(\exists k (b = \{\langle i, b_i \rangle | \ i < k\} \wedge m \leq$ $\leq k) \wedge \mathrm{HF}_{\mathcal{M}} \models G(n)[\gamma_b] \wedge \forall_i < k \ (\gamma_b(v_i) = b_i)))]$.

Построение требуемой формулы U такое же, как построение формулы в [10 стр. 81-83]. Предложение доказано.

§ 4. Некоторые применения

С.С.Гончаровым были поставлены вопросы:

1. Если суператомная булева алгебра $\mathcal{L}$ Σ-определима в допустимом множестве $\mathcal{A}$, то будет ли ее ординальный тип Σ-определим в $\mathcal{A}$?

2. Если абелева p-группа G Σ-определима в допустимом множестве $\mathcal{A}$, то будет ли Σ-определим ее ульмов тип в $\mathcal{A}$.

Следующие результаты дают положительный ответ для случая, когда A есть допустимое множество вида $HF_{\mathcal{M}_2}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathcal{L}$ — счетная суператомная булева алгебра и $o(\mathcal{L})$ — ее ординальный тип, $\mathcal{M}_2$ — внутренне перечислимая модель. Если булева алгебра $\mathcal{L}$ Σ-определима в $HF_{\mathcal{M}_2}$, то ее ординальный тип $o(\mathcal{L})$ также Σ-определим в $HF_{\mathcal{M}_2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства теоремы 2 [2] следует, что для любой нумерации ν_1 булевой алгебры $\mathcal{L}$ существует нумерация ν_1^* ее ординального типа $o(\mathcal{L})$ такая, что пара $(o(\mathcal{L}), \nu_1^*)$ рекурсивна относительно $\mathcal{L}_1, \nu_1)$. Пусть булева алгебра $\mathcal{L}$ Σ-определима в $HF_{\mathcal{M}_2}$. По теореме 1 существует такая нумерация ν_1 алгебры $\mathcal{L}$, что пара $(\mathcal{L}, \nu_1)$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$ для некоторой Σ-нумерации ν_2 модели $(\mathcal{M}_2)$. Тогда пара $(o(\mathcal{L}), \nu_1^*)$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$. По теореме 1 ординальный тип $o(\mathcal{L})$ Σ-определим в $HF_{\mathcal{M}_2}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть A — счетная редуцированная абелева p-группа, $\tau(A)$ — ее ульмов тип и $\mathcal{M}_2$ — внутренне перечислимая модель. Если группа A Σ-определима в $HF_{\mathcal{M}_2}$, то ее ульмов тип $\tau(A)$ также Σ-определим в $HF_{\mathcal{M}_2}$.*

Из доказательства теоремы 3 [3] следует, что для любой нумерации ν_1 группы A существует нумерация ν_1^* ее ульмова типа такая, что пара $(\tau(A), \nu_1^*)$ рекурсивна относительно пары (A, ν_1). Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

В заключение автор выражает благодарность С.С.Гончарову за постановку задачи и А.С.Морозову за замечания, которые существенно улучшили первоначальный вариант работы.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры. — Новосибирск: Наука, Сиб.отделение, 1988. — 175 с.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Конструктивизируемость супер-атомных булевых алгебр //Алгебра и логика. — 1973. — Т.12, N 1. — С. 31-40

3. ДОБРИЦА В.П., НУРТАЗИН А.Т., ХИСАМИЕВ Н.Г. О конструктивных периодических абелевых группах //Сиб.мат.журн. — 1978. — Т. 19, N 6. — С. 1260-1265.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-определимость в допустимых множествах//Докл. АН СССР. - 1985. - Т.285, N 4. — С. 792-795.

5. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980. — 415 с.

6. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции 2-ое изд. — М.: Наука, 1986. — 367 с.

7. МАЛЬЦЕВ А.И. Конструктивные алгебры //Успехи мат.наук. — 1961. — Т. 16, N 3. — С. 3-60.

8. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.

9. ФУКС Л. Бесконечные абелевы группы: Пер. с англ. Т 1. — М.: Мир, 1974. — 335 с.

10. BARWISE J. Admissible Sets and Structures. — Berlin.: Springer- Verlag, 1975. — 383 с.

Поступила в редакцию
24 июня 1996 года