СТРУКТУРНЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ
СВОЙСТВА ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1996 год Выпуск 156

УДК 519.48

ОБ УСЛОВНЫХ ТЕРМАХ И ТОЖДЕСТВАХ НА УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ [1]

А.Г.Пинус

Одной из возможных прикладных трактовок понятий универсальной алгебры и терма сигнатуры этой алгебры является следующее: на некоторой совокупности объектов — базисном множестве универсальной алгебры — заданы некоторые стандартные программы преобразований (вычислений), соответствующие сигнатурным функциям данной универсальной алгебры. Тогда понятие терма сигнатуры этой алгебры можно рассматривать как некую программу преобразований (вычислений) на базисном множестве, составленную из стандартных (сигнатурных) подпрограмм с помощью лишь операций суперпозиции. Однако в программировании используется еще целый ряд принципов построения более сложных программ из подпрограмм, в том числе, и так называемый условный оператор. Целью данной работы является попытка обобщить понятие терма с использованием принципа условного оператора и рассмотреть ряд основных вопросов универсальной алгебры с точки зрения подобного обобщения. Часть этих вопросов решена в данной работе, часть других сформулирована в явном виде.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 93-011-1520).

Для удобства обозначений договоримся через $=^1$ обозначать обычное равенство, а через $=^0$ его отрицание.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Условием сигнатуры σ будем называть конечную совокупность $\Im(\bar{x})$ равенств и неравенств вида

$$\Im(\bar{x}) = \begin{cases} t_1^1(\bar{x}) =^{i_1} t_1^2(\bar{x}), \\ \dots \\ t_n^1(\bar{x}) =^{i_n} t_1^2(\bar{x}), \end{cases}$$

где $t_j^i(\bar{x})$ — термы сигнатуры σ, а $i_j \in \{0,1\}$. Полной системой условий сигнатуры σ будем называть набор $\{\Im_1(\bar{x}),\dots,\Im_k(\bar{x})\}$ условий данной сигнатуры такой, что формула $\forall\bar{x}(\bigvee_{i=1}^{k} \& \Im_i(\bar{x}))$ является тождественно истинной и для различных $l,m \le k$ формулы $\& \Im_l(\bar{x}) \& \Im_m(\bar{x})$ тождественно ложны.

Введем определение условного терма сигнатуры σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Понятие условного терма сигнатуры σ определяется индукцией за конечное число шагов с помощью следующих правил:

а) любая переменная есть условный терм;

б) если $t_1(\bar{x}),\dots,t_n(\bar{x})$ — условные термы сигнатуры σ и $f(x_1,\dots,x_n)$ — функция входящая в сигнатуру σ, то $f(t_1(\bar{x}),\dots,t_n(\bar{x}))$ — также условный терм сигнатуры σ;

в) если $t_1(\bar{x}),\dots,t_n(\bar{x})$ — условные термы сигнатуры σ, а $\{\Im_1(\bar{x}),\dots,\Im_n(\bar{x})\}$ — полная система условий этой сигнатуры, то

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} \Im_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}) \\ \dots \\ \Im_n(\bar{x}) \to t_n(\bar{x}) \end{cases}$$

также является условным термом сигнатуры σ;

г) любой условный терм сигнатуры σ строится за конечное число шагов по правилам "а" - "в".

Определим теперь семантику условных термов сигнатуры σ, т.е. функции на алгебрах данной сигнатуры, вычислимые с помощью условных термов, при этом не будем делать формальных отличий в обозначениях условного терма и соответствующей ему функции на алгебре $\mathcal{A}$ сигнатуры σ. Для правил "а" - "б" из определения 2 условных термов предполагаем стандартные интерпретации, имеющие место при интерпретации термов сигнатуры σ на алгебрах этой сигнатуры. Если теперь условный терм $t(\bar{x})$ определятся по правилу "в" определения 2, то для любых $\bar{a} \in \mathcal{A}^k$, где k — длина кортежа переменных $\bar{x}$, положим $t(\bar{a}) = b$, если $b = t_i(\bar{a})$ и $\mathcal{A} \models \Im_i(\bar{a})$ для некоторого $i \leq n$.

В качестве примера укажем на известную функцию $d(x, y, z)$ дискриминатора на множестве, которая на основном множестве алгебры любой сигнатуры задается условным термом $t_d(x, y, z)$ вида

$$t_d(x, y, z) = \begin{cases} x \neq y \to x, \\ x = y \to z. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что условный терм $t(\bar{x})$ имеет нормальную форму, если

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} \Im_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}), \\ \dots \\ \Im_n(\bar{x}) \to t_n(\bar{x}), \end{cases}$$

где $t_i(\bar{x})$ — обычные термы сигнатуры σ.

Достаточно очевидно следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Для любого условного терма $t(\bar{x})$ сигнатуры σ существует условный терм $t^1(\bar{x})$ этой сигнатуры, имеющей нормальную форму и такой, что для любой алгебры $\mathcal{A}$ сигнатуры σ термы $t(\bar{x})$ и $t^1(\bar{x})$ вычисляют на $\mathcal{A}$ одну и ту же функцию.*

Для доказательства этой леммы достаточно заметить, что если

$$t_1(\bar{x}) = \begin{cases} \Im_1^1(\bar{x}) \to t_1^1(\bar{x}) \\ \dots \\ \Im^1_{k_1}(\bar{x}) \to t^1_{k_1}(\bar{x}) \end{cases}, \dots, \quad t_n(\bar{x}) = \begin{cases} \Im_1^n(\bar{x}) \to t_1^n(\bar{x}) \\ \dots \\ \Im^n_{k_n}(\bar{x}) \to t^n_{k_n}(\bar{x}) \end{cases}$$

и

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} \Im_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}) \\ \dots \\ \Im_n(\bar{x}) \to t_n(\bar{x}), \end{cases}$$

то терм $t(\bar{x})$ на любой алгебре $\mathcal{A}$ сигнатуры σ вычисляет ту же функцию, что и терм

$$t^1(\bar{x}) = \begin{cases} \Im_1(\bar{x}) \cup \Im_1^1(\bar{x}) \to t_1^1(\bar{x}) \\ \dots \\ \Im_1(\bar{x}) \cup \Im^1_{k_1}(\bar{x}) \to t^1_{k_1}(\bar{x}), \\ \dots \\ \Im_n(\bar{x}) \cup \Im_1^n(\bar{x}) \to t_1^n(\bar{x}) \\ \dots \\ \Im_n(\bar{x}) \cup \Im^n_{k_n}(\bar{x}) \to t^n_{k_n}(\bar{x}). \end{cases}$$

Таким образом, работая с условными термами, всегда можно предполагать, что они заданы в нормальной форме.

Нетрудно видеть, что к тем же самым функциям на универсальных алгебрах, определяемых условными термами, приводит и следующий вариант определения условных термов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2′. Понятие условного терма сигнатуры σ определяется индукцией за конечное число шагов с помощью следующих правил:

а) любая переменная есть условный терм;

б) если $t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x})$ условные термы сигнатуры σ и $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, входящая в сигнатуру σ, то $f(t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x}))$ и $t_d(t_1(\bar{x}), t_2(\bar{x}), t_3(\bar{x}))$ также условные термы сигнатуры σ;

в) любой условный терм сигнатуры σ строится за конечное число шагов по правилам "а" и "б".

Здесь, при интерпретации таким образом определяемых условных термов, имеется в виду интерпретация функции $t_d(x, y, z)$ как дискриминатора на основном множестве любой алгебры.

Аналогичным образом, если попытаться обобщить понятие условия из определения 1 допущением в качестве условия рассматривать равенства и неравенства условных термов вместо стандартных термов, то, как нетрудно видеть, на самом деле обобщенное таким образом понятие условного терма сводится к понятию условного терма, данного в определении 2. Иначе говоря, равномерным образом для всех алгебр рассматриваемой сигнатуры, для каждого обобщенного условного терма строится условный терм, определяющий на всех этих алгебрах ту же функцию, что и обобщенный условный терм.

Рассмотрим прежде всего взаимосвязь условных термов с такими основными понятиями алгебры, как подалгебра, автоморфизм, гомоморфизм, декартово произведение. Очевидно, что понятие подалгебры и автоморфизма сохраняется и при рассмотрении условных термов, т.е. если $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра, $t(\bar{x})$ — условный терм, $\mathcal{B}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, f — автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ и $\bar{a}(\bar{b})$ — кортеж элементов алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, то $f(t(\bar{a}) = t(f(\bar{a}))$ и $t(\bar{b}) \in \mathcal{B}$. Иначе обстоит дело с гомоморфизмами, не являющимися вложениями, и с декартовыми произведениями. Выше был указан условный терм $t_d(x, y, z)$, определяющий на любой алгебре функцию дискриминатора. Пусть f — некоторый гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$, не являющийся вложением и такой, что $|f(\mathcal{A})| > 1$. Пусть $a, b, c \in \mathcal{A}$ таковы, что $a \neq b$, $f(a) = f(b)$ и $f(a) \neq f(c)$, тогда $f(t_d(a, b, c)) = f(a) \neq t_d(f(a), f(b), f(c)) = f(c)$, т.е. такой гомоморфизм не сохраняет значения условных термов. Точно также вычисления условных термов на декартовых произведениях не сводятся к вычислению этих термов на сомножителях. Пусть $a \neq b \in \mathcal{A}$, тогда $t_d(\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle) = \langle a, a\rangle \neq \langle t_d(a, b, b), t_d(a, a, b)\rangle = \langle a, b\rangle$.

Приведенные примеры показывают, какую важную роль в изучении условных термов играет дискриминаторная функция. В связи с этим приведем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Если дискриминаторная функция на алгебре A выразима термом (т.е. алгебра A дискриминаторная), то любой условный терм выразим на A с помощью терма. Таким образом совокупности термальных и условно термальных функций на алгебре совпадают тогда и только тогда, когда алгебра дискриминаторна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см. к примеру, [1,2]) выразимость термом от дискриминаторной функции $t_d(x,y,z)$ функции $p(x,y,z,u)$ такой, что

$$p(x,y,z,u) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ u, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Действительно, $p(x,y,z,u) = t_d(t_d(xy,z),\ t_d(x,y,u),u)$. Тогда, если условный терм $t(\bar{x})$ строится с помощью условий $t_1^1(\bar{x}) = t_2^1(\bar{x}), t_1^1(\bar{x}) \neq t_2^1(\bar{x})$ и термов $t_1(\bar{x}), t_2(\bar{x})$ по правилу

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} t_1^1(\bar{x}) = t_2^1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}), \\ t_1^1(\bar{x}) \neq t_2^1(\bar{x}) \to t_2(\bar{x}), \end{cases}$$

то, очевидно, что $t(\bar{x}) = p(t_1^1(\bar{x}), t_2^1(\bar{x}), t_1(\bar{x}), t_2(\bar{x}))$. Также очевидно, что итерируя эту процедуру, можно показать выразимость с помощью стандартных термов алгебры A любого условного терма на алгебре A, если на этой алгебре дискриминаторная функция выразима (стандартным) термом.

Рассмотрим следующее отношение $\equiv_n$ на элементах декартовой степени A^n алгебры A : $\bar{a} \equiv_n \bar{b}$, если существует изоморфизм φ конечно порожденной подалгебры $(\bar{a})$ алгебры A, порожденной множеством элементов из $\bar{a}$ на конечно порожденную подалгебру $(\bar{b})$ алгебры A такой, что $\varphi(\bar{a}) = \bar{b}$. Очевидно, что $\equiv_n$ есть отношение эквивалентности на A^n и это отношение является отношением неотделимости с помощью условий на кортежах из A^n, т.е. для любых $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$ существует условие, которое выполняется на $\bar{a}$, но не выполняется на $\bar{b}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} \not\equiv_n \bar{b}$. В связи с этим, в частности, если для некоторого условного терма $t(\bar{x})$ и стандартного терма $p(\bar{x})$ имеют место равенства $t(\bar{a}) = p(\bar{a})$ и $\bar{a} \equiv_n \bar{b}$, то имеет место и равенство $t(\bar{b}) = p(\bar{b})$. К примеру, если все однопорожденные подалгебрпы алгебры $\mathcal{A}$ изоморфны между собой с помощью изоморфизмов, переводящих порождающий элемент одной подалгебры в выбранный порождающий элемент другой подалгебры, то любой одноместный условный терм на $\mathcal{A}$ совпадает с с некоторым стандартным термом. Если, к примеру, $\mathcal{A} = \langle A; +, f_a | a \in F\rangle$ есть векторное пространство над полем F (f_a — умножение на a), то для любого одноместного условного терма $t(x)$ существуют стандартные термы $p(x), q(x)$ такие,что на $\mathcal{A}$ выполняется:

$$t(x) = \begin{cases} p(x), & \text{если } x \neq 0, \\ q(x), & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

А так как для всех термов $q(x)$ алгебры $\mathcal{A}$ имеет место равенство $q(0) = 0$, то совокупности одноместных функций, определяемых на $\mathcal{A}$ условными и стандартными термами, совпадают. Нетрудно видеть, что для двухместных функций это уже не так.

Если алгебра $\mathcal{A}$ конечна, то для любого $n \in \omega$ существует конечное число классов эквивалентности $\{A_n^1, \ldots$ $\ldots, A_n^{m_n}\}$ множества A^n по отношению $\equiv_n$ и, тем самым, для любого условного $t(\bar{x})$ найдутся стандартные термы $p_1(\bar{x}), \ldots, p_{m_n}(\bar{x})$ такие, что на $\mathcal{A}$ выполняется:

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} p_1(\bar{x}), & \text{если } \bar{x} \in A_n^1, \\ \ldots \\ p_{m_n}(\bar{x}), & \text{если } \bar{x} \in A_n^{m_n}. \end{cases}$$

Приведенные замечания позволяют, в частности, решить вопрос об алгебрах, все функции на основных множествах которых определяются условными термами, т.е. вопрос описания аналога примальных алгебр, на основе понятия условного терма.

Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ называется примальной, если она конечна и любая функция на основном множестве алгебры $\mathcal{A}$ задается (стандартным) термом сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$. Причем условие конечности возникает здесь из естественных мощностных соотношений при стандартных ограничениях на счетность сигнатуры рассматриваемых алгебр.

Напомним также известное описание примальных алгебр, принадлежащее Фостеру и Пиксли [3]: "алгебра $\mathcal{A}$ примальна тогда и только тогда, когда она конечна, проста (не имеет нетривиальных конгруэнций), не имеет нетривиальных автоморфизмов, не имеет собственных подалгебр и $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — многообразие, порожденное алгеброй $\mathcal{A}$, конгруэнц-дистрибутивно и конгруэнц-перестановочно".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем алгебру $\mathcal{A}$ условно примальной, если $\mathcal{A}$ конечна и любая функция на основном множестве алгебры $\mathcal{A}$ определяется с помощью некоторого условного терма этой алгебры. Алгебру $\mathcal{A}$ назовем финитарно аппроксимируемой условными термами, если для любого натурального n, любого конечного подмножества $A \subseteq \mathcal{A}^n$ и любой функции $f : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ найдется условный терм $t(\bar{x})$ алгебры $\mathcal{A}$ от n переменных такой, что ограничения $f \mid A$ и $t \mid A$ функции f и терма t на множестве A совпадают.

Имеет место следующая простая характеризация условно примальных алгебр и алгебр, финитарно аппроксимируемых условными термами.

ТЕОРЕМА 1. *Алгебра $\mathcal{A}$ финитарно аппроксимируема условными термами тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ не имеет нетривиальных автоморфизмов и собственных подалгебр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как подалгебры замкнуты относительно значений условных термов и автоморфизмы коммутируют с условными термами, то очевидно, что каждая финитарно аппроксимируемая условными термами алгебра не должна иметь нетривиальных автоморфизмов и собственных подалгебр.

Покажем обратное. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ не имеет нетривиальных автоморфизмов и собственных подалгебр и $a \neq b \in \mathcal{A}$. Парой $< a, b >$ породим подалгебру в алгебре $\mathcal{A}^2$. Так как $\mathcal{A}$ не имеет нетривиальных автоморфизмов и собственных подалгебр, то найдется пара термов $t_1^1(x), t_2^1(x)$ таких, что $t_1^1(a) = t_2^1(a)$ и $t_1^1(b) \neq t_2^1(b)$, либо $t_1^1(a) \neq t_2^1(a)$ и

$t_1^1(b) = t_2^1(b)$. Т.е. любая пара различных элементов алгебры $\mathcal{A}$ отделима с помощью условий. Очевидно, что комбинация этих определяющих условий позволяет построить для любого конечного $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathcal{A}$ полную систему условий $\{\Im_1(x), \ldots, \Im_s(x)\}$, где $s \geq k$, такую, что $\mathcal{A} \models \&_{i=1}^k \Im_i(a_i)$. Если функция $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такова, что $f(a_i) = b_i$ для $i \leq k$, то в силу того, что $\mathcal{A}$ не имеет собственных подалгебр, найдутся термы $t_i(x), i \leq k$, такие, что $t_i(a_i) = b_i$. Тогда условный терм

$$t(x) = \begin{cases} \Im_1(x) \to t_1(x), \\ \ldots \\ \Im_k(x) \to t_k(x), \\ \Im_{k+1}(x) \to x, \\ \ldots \\ \Im_s(x) \to x \end{cases}$$

очевидно обладает тем свойством, что $f \mid A = t \mid A$. Рассмотрение многоместной функции f аналогично и опирается на ту же отделимость различных элементов алгебры $\mathcal{A}$ с помощью условий.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Алгебра $\mathcal{A}$ условно примальна тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ конечна и не обладает нетривиальными автоморфизмами и собственными подалгебрами.*

Представляет интерес асимптотическая оценка доли условно примальных алгебр среди всех алгебр той же конечной мощности. В связи с кодируемостью любой конечной сигнатуры в сигнатуре, содержащей одну единственную двухместную функцию, достаточно ограничиться рассмотрением алгебр в сигнатуре $\sigma = < f >$, где f — двухместна, т.е. рассмотрением группоидов. Пусть $G(n)$ — число типов изоморфизма условно примальных группоидов мощности n. Из следствия 1 и известных оценок Мурского [4] числа типов изоморфизма группоидов, не имеющих собственных подгруппоидов и не имеющих нетривиальных автоморфизмов, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{CP(n)}{G(n)} = \frac{1}{e}.$$

Напомним также известную ассимптотическую оценку доли примальных алгебр среди всех конечных алгебр той же мощности, которая равна $\frac{1}{e}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *"Почти все" конечные условно примальные алгебры большой мощности являются примальными.*

По аналогии с понятием стандартных тождеств и многообразий введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Под условным тождеством будем понимать равенство условных термов $t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$ и определять его истинным на алгебре $\mathcal{A}$, если функции, вычислимые на алгебре $\mathcal{A}$ с помощью условных термов $t_1(\bar{x})$ и $t_2(\bar{x})$ совпадают. Под условным многообразием будем понимать класс всех алгебр фиксированной сигнатуры, на которых истинна некоторая совокупность условных тождеств.

Прежде всего заметим, что любое условное многообразие является универсальным классом алгебр. Действительно, истинность тождества $t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$ на алгебре $\mathcal{A}$, где условные термы $t^1(\bar{x})$ и $t^2(\bar{x})$ имеют нормальную форму и определены схемами

$$t^1(\bar{x}) = \begin{cases} \Im^1_1(\bar{x}) \to t^1_1(\bar{x}), \\ \dots \\ \Im^1_k(\bar{x}) \to t^1_k(\bar{x}); \end{cases}$$

$$t^2(\bar{x}) = \begin{cases} \Im^2_1(\bar{x}) \to t^2_1(\bar{x}), \\ \dots \\ \Im^2_1(\bar{x}) \to t^2_1(\bar{x}) \end{cases}$$

очевидным образом равносильна истинности на алгебре $\mathcal{A}$ $\forall$-формулы

$$\forall \bar{x}(\&_{i\leq k} \&_{j\leq 1}(\& \Im^1_i(\bar{x}) \& \& \Im^2_j(\bar{x}) \to t^1_i(\bar{x}) = t^2_j(\bar{x}))).$$

Очевидно также, что в силу того, что любое условное многообразие содержит одноэлементную алгебру, то не любой универсальный класс алгебр является условным многообразием. В силу выразимости дискриминаторной функции условным термом, класс простых (дискриминаторных) алгебр любого дискриминаторного многообразия является условным многообразием и, так как этот класс не замкнут относительно декартовых произведений, то существуют условные многообразия, не являющиеся квазимногообразиями.

С другой стороны, нетрудно заметить, что любое квазимногообразие алгебр является условным многообразием. Действительно, истинность на алгебре $\mathcal{A}$ квазитождества $\forall\bar{x}(\&_{i=1}^{n} t_i^1(\bar{x}) = t_i^2(\bar{x}) \to p(\bar{x}) = q(\bar{x})$ соответствует истинности на алгебре $\mathcal{A}$ условного тождества $\forall\bar{x}(r(\bar{x}) = s(\bar{x}))$, где $r(\bar{x}), s(\bar{x})$ — условные термы, определяемые следующим образом:

$$r(\bar{x}) = \begin{cases} \&_{i=1}^{n} t_i^1(\bar{x}) = t_i^2(\bar{x}) \to p(\bar{x}), \\ \Im_2(\bar{x}) \to x, \\ \dots \\ \Im_k(\bar{x}) \to x; \end{cases}$$

$$s(\bar{x}) = \begin{cases} \&_{i=1}^{n} t_i^1(\bar{x}) = t_i^2(\bar{x}) \to q(\bar{x}), \\ \Im_2(\bar{x}) \to x, \\ \dots \\ \Im_k(\bar{x}) \to x. \end{cases}$$

Здесь $\Im_2(\bar{x}), \dots, \Im_k(\bar{x})$ — некоторая система условий такая, что совокупность $\{\&_{i=1}^{n} t_i^1(\bar{x}) = t_i^2(\bar{x}),\ \Im_2(\bar{x}), \dots, \Im_k(\bar{x})\}$ является полной системой условий.

Заметим также, что, как любой универсальный класс алгебр, условные многообразия замкнуты относительно ультрапроизведений и подалгебр.

Пусть для любой совокупности $\mathfrak{K}$ алгебр некоторой фиксированной сигнатуры σ через $\mathcal{M}^*(\mathfrak{K})$ будет обозначено наименьшее условное многообразие, содержащее класс алгебр $\mathfrak{K}$. Введем обозначения: $P_u(\mathfrak{K})$ — совокупность всех ультрапроизведений алгебр из $\mathfrak{K}$; $S(\mathfrak{K})$ — совокупность всех подалгебр из $\mathfrak{K}$; $I(\mathfrak{K})$ — замыкание класса $\mathfrak{K}$, получаемое добавлением всех алгебр изоморфных $\mathfrak{K}$-алгебрами; $(\mathfrak{K})_1$ — класс алгебр, получаемый добавлением к $\mathfrak{K}$ одноэлементной алгебры сигнатуры σ.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого класса алгебр $\mathfrak{K}$ неодноэлементная алгебра $\mathcal{A}$ входит в условное многообразие $\mathcal{M}^*(\mathfrak{K})$ тогда и только тогда, когда на $\mathcal{A}$ истинны все универсальные формулы, истинные на алгебрах класса $\mathfrak{K}$, т.е. в силу хорошо известного описания универсального замыкания классов алгебраических систем, $\mathcal{M}^*(\mathfrak{K}) = I((SP_u(\mathfrak{K}))_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведенное здесь, значительно более простое, чем авторское, доказательство принадлежит Е.А.Палютину. Первоначальное авторское доказательство было основано на использовании дискриминаторов и описании строения простых алгебр в многообразиях, порожденных некоторым классом дискриминаторных алгебр.

Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольный класс алгебр фиксированной сигнатуры σ. Очевидно, что одноэлементная алгебра этой сигнатуры принадлежит $\mathcal{M}^*(\mathfrak{K})$. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая неодноэлементная алгебра сигнатуры σ, входящая в $\mathcal{M}^*(\mathcal{A})$, и $\varphi = \forall\bar{x}\psi(\bar{x})$ — некоторая универсальная формула сигнатуры σ, истинная на всех* $\mathfrak{K}$-алгебрах (здесь $\psi(\bar{x})$ — бескванторная формула). Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathcal{A} \models \varphi$. Выберем представление формул $\psi(\bar{x})$ и $\neg\psi(\bar{x})$ в дизъюнктивной нормальной форме $\varphi(\bar{x}) = \bigvee\limits_{i=1}^{k} \Im_i(\bar{x}), \neg\psi(\bar{x}) = \bigvee\limits_{i=k+1}^{r} \Im_i(\bar{x})$. Здесь $\Im_i(\bar{x})$ — некоторые условия сигнатуры σ, и можно считать совокупность $\{\Im_1(\bar{x}),\ldots,\Im_r(\bar{x})\}$ полной системой условий. Определим условный терм $t(\bar{x})$ следующим образом:

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} \Im_1(\bar{x}) \to x_1, \\ \ldots \\ \Im_k(\bar{x}) \to x_1, \\ \Im_{k+1}(\bar{x}) \to x_2, \\ \ldots \\ \Im_r(\bar{x}) \to x_2. \end{cases}$$

Очевидно, что формула φ на неодноэлементных алгебрах сигнатуры σ эквивалентна условному тождеству $\forall\bar{x}((\bar{x}) = x_1)$ и, тем самым, действительно, $\mathcal{A} \models \varphi$. Как было замечено выше, это завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3.

1) Для любой конечной алгебры $\mathcal{A}$ имеет место равенство $\mathcal{M}^*(\mathcal{A}) = I(S(\mathcal{A}) \cup \{1\})$.

2) Для любой конечной алгебры $\mathcal{A}$, не имеющей собственных подалгебр, в частности, для условно примальной алгебры $\mathcal{A}$, имеет место равенство $\mathcal{M}^*(\mathcal{A}) = I(\{\mathcal{A}\} \cup \{1\})$.

Здесь 1 — одноэлементная алгебра сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$.

Так как $ISP_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{K})$ является наименьшим универсальным классом алгебр, содержащим класс $\mathfrak{K}$, а $I((SP_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{K}))_1)$ — наименьшим универсальным классом алгебр, содержащим класс алгебр $\mathfrak{K}$ и одноэлементную алгебру, то имеет место

СЛЕДСТВИЕ 4. *Класс алгебр $\mathfrak{K}$ сигнатуры σ является условным многообразием тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ есть универсальный класс алгебр, содержащий одноэлементную алгебру.*

Утверждение и доказательство теоремы 2 и данного следствия, а также отмеченная выше связь условных термов с отношением $\equiv_{\mathfrak{K}}$ позволяют рассматривать изучение условных тождеств как некую форму "алгебраизации" проблемы изучения универсальных классов алгебр.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Совокупность условных многообразий алгебр данной сигнатуры является решеткой относительно операции теоретико-множественных пересечений и объединений, а следовательно, дистрибутивной решеткой.*

В работе [8] было введено понятие "богатой алгебры". Напомним соответствующие определения и введем некоторые их обобщения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.

а) Под системой уравнений $\Im(x)$ над алгеброй $\mathcal{A}$ понимается конечный набор равенств

$$\Im(x) = \begin{cases} t_1^1(x, \bar{a}_1^1) = t_1^2(x, \bar{a}_1^2), \\ \dots \\ t_n^1(x, \bar{a}_n^1) = t_n^2(x, \bar{a}_n^2), \end{cases}$$

где t_j^i — некоторые термы сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$, $\bar{a}_j^i$ — кортежи элементов этой же алгебры, x — переменная.

б) Под системой условных уравнений над алгеброй $\mathcal{A}$ понимаем аналогичный набор равенств, где t_j^i — условные термы.

в) Под системой уравнений и неравенств $\Im(x)$ над алгеброй $\mathcal{A}$ будем понимать конечную систему, аналогичную определенной в п."а" настоящего определения с возможной заменой части равенств на неравенства $(t_j^1(x, \bar{a}_j^1) \neq \neq t_j^2(x, \bar{a}_j^2))$.

Если $\Im(x)$ — некоторая система уравнений (условных уравнений, уравнений и неравенств) над алгеброй $\mathcal{A}$, то через $C_{\Im(x)}(\mathcal{A})$ обозначим совокупность решений этой системы в алгебре $\mathcal{A}$, т.е. $C_{\Im(x)}(\mathcal{A}) = \{b \in \mathcal{A} | \mathcal{A} \models \Im(b)\}$.

Нетрудно заметить, что любая система условных уравнений $\Im(x)$ над неодноэлементной алгеброй $\mathcal{A}$ эквивалентна некоторой системе $\Im'(x)$ уравнений и неравенств над алгеброй $\mathcal{A}$ в том смысле, что $C_{\Im(x)}(\mathcal{A}) = C_{\Im'(x)}(\mathcal{A})$. Верно и обратное, для любой системы $\Im(x)$ уравнений и неравенств над неэлементной алгеброй $\mathcal{A}$ существует система условных уравнений $\Im^{\#}(x)$ такая, что $C_{\Im(x)}(\mathcal{A}) = = C_{\Im^{\#}(x)}(\mathcal{A})$.

Через $\mathcal{D}_2$ обозначим полное двоичное дерево — совокупность конечных кортежей элементов множества $\{0, 1\}$, частично упорядоченную отношением быть начальным интервалом, т.е. для $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{D}_2$ отношение $\tau_1 \leq \tau_2$ имеет место тогда и только тогда, когда τ_2 является начальным интервалом кортежа τ_1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Через $C_{\mathcal{A}}$ ($C'_{\mathcal{A}}$) обозначим нижнюю полурешетку относительно теоретико-множественного пересечения (булеву алгебру относительно теоретико-множественных операций пересечения,объединения, дополнения), образованную совокупностью $\{C_{\Im(x)}(\mathcal{A}) | \Im(x)$ — система уравнений над $\mathcal{A}\}$ $(\{C_{\Im(x)}(\mathcal{A}) | \Im(x)$ — система условных уравнений над $\mathcal{A}\})$ подмножеств основного множества алгебры $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Алгебру $\mathcal{A}$ назовем богатой (условно богатой), если существует изотонное вложение φ двоичного дерева $\mathcal{D}_2$ в полурешетку $C_{\mathcal{A}}$ (в булеву алгебру $C'_{\mathcal{A}}$) такое, что для любого $\tau \in \mathcal{D}_2$, $\varphi(\tau) \neq \emptyset$, и для несравнимых $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{D}$ имеет место равенство $\varphi(\tau_1) \cap \varphi(\tau_2) = \emptyset$.

Каждая богатая алгебра является условно богатой. Нетрудно заметить, что алгебра $\mathcal{A}$ условно богата тогда и только тогда, когда булева алгебра $C'(\mathcal{A})$ не является суператомной.

Пусть $\mathcal{A}'$ обозначает обогащение алгебры $\mathcal{A}$ введением в сигнатуру нового функционального символа $d(x, y, x)$, интерпретируемого на $\mathcal{A}'$ с помощью дискриминаторной функции. Довольно очевидно, что алгебра $\mathcal{A}$ является условно богатой тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}'$ богата. В работе [8] доказано, что любое дискриминаторное многообразие $\mathcal{M}$, содержащее конечно порожденную дискриминаторную богатую алгебру, содержит континуум попарно не вложимых друг в друга конечно порожденных дискриминаторных богатых алгебр. В силу этого результата, теоремы 2, отмеченной выше взаимосвязи условного богатства алгебры $\mathcal{A}$ и богатства алгебры $\mathcal{A}'$, а также того, что вложимость алгебры $\mathcal{A}_1$ в алгебру $\mathcal{A}_2$ эквивалентна вложимости алгебры $\mathcal{A}'_1$ в алгебру $\mathcal{A}'_2$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 6. *Если условное многообразие $\mathcal{M}^*$ содержит конечно-порожденную условно богатую алгебру, то $\mathcal{M}^*$ содержит континуум конечно-порожденных условно богатых алгебр попарно не вложимых друг в друга.*

Среди открытых вопросов, связанных с условными тождествами, желательным представляется нахождение простых правил вывода для условных тождеств, т.е.

ВОПРОС 1. Создание семантического исчисления условных тождеств адекватного истинности последних на универсальных алгебрах.

Известна определяющая роль, которую играют решетки конгруэнций (решетки относительных конгруэнций) универсальных алгебр при изучении строения многообразий (соответственно квазимногообразий) этих алгебр. Приведенные далее примеры показывают, что эти понятия не могут быть перенесены на случай условных многообразий.

ТЕОРЕМА 3. *Существуют алгебры $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ и условное многообразие $\mathcal{M}$ такие, что:*

1) в алгебре $\mathcal{A}_1$ имеются элементы a, b такие, что не существует наименьшей конгруэнции Θ алгебры $\mathcal{A}_1$ такой, что $(a,b) \in \Theta$ и $\mathcal{A}_1/\Theta \in \mathcal{M}^*(\mathcal{A}_1)$ (в алгебре $\mathcal{A}_1$ нет главной $\mathcal{M}^*(\mathcal{A}_1)$-конгруэнции, порожденной парой (a,b));

2) на алгебре $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{M}$ существуют Θ_1, Θ_2 такие, что $\mathcal{A}_1/\Theta_1$, $\mathcal{A}_2/\Theta_2 \in \mathcal{M}$ и не существует наименьшей конгруэнции Θ такой, что $\Theta \geq \Theta_1, \Theta_2$ и $\mathcal{A}_2/\Theta \in \mathcal{M}$ (совокупность $\mathcal{M}$-конгруэнций на алгебре $\mathcal{A}_2$ не является верхней полурешеткой).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Через $[0,1]$ обозначим линейно упорядоченное множество действительных чисел интервала $[0,1]$, а через 2^i, где $i \in [0,1]$, двухэлементные линейно упорядоченные множества $< \{0^i, 1^i\}; \leq >$ такие, что $0^i < 1^i$. Пусть $\sum\limits_{i\in[0,1]} 2^i$ — лексикографическая сумма линейно упорядоченных множеств 2^i по основанию $[0,1]$. На основном множестве A линейного порядка $\sum\limits_{i\in[0,1]} 2^i$ определим функцию

$$\varphi(x,y,z) = \begin{cases} 0^0, \text{ если } x > y, z, \\ z \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Хорошо известно (см., к примеру, [6,7]) и легко непосредственно проверяется то, что для любой конгруэнции $\Theta > \Delta_{\mathcal{A}}$ на алгебре $\mathcal{A} = < A; \varphi >$ единственный нетривиальный класс эквивалентности по Θ имеет вид некоторого начального интервала линейного порядка $\sum\limits_{i\in[0,1]} 2^i$. Кроме того, для любых различных элементов $a, b \in A$ главная конгруэнция $\Theta^{\mathcal{A}}_{a,b}$, порожденная парой $< a, b >$ на алгебре $\mathcal{A}$ в качестве единственного неодноэлементного класса эквивалентности имеет начальный интервал $[0^o, \max\{a, b\}]$.

Через $\mathcal{A}_1$ обозначим обогащение алгебры $\mathcal{A}$ одноместными функциями l, r, h, f, g такими, что

для $i \in [0,1]$ $\quad l(1^i) = l(0^i) = 0^i$,

для $i \in [0,1]$ $\quad r(1^i) = r(0^i) = 1^i$,

для любого $a \in A$ $\quad h(a) = 0^o$, $f(a) = 1^1, g(a) = 0^1$.

Легко увидеть, что конгруэнции на алгебрах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_1$ совпадают.

На алгебре $\mathcal{A}_1$ рассмотрим условные термы $t_1(x)$, $t_2(x)$, определяемые следующим образом:

$$t_1(x) = \begin{cases} l(x) = h(x) \ \& \ l(x) \neq x \rightarrow x, \\ l(x) = h(x) \ \& \ r(x) \neq x \ \& \ l(x) = x \rightarrow x, \\ l(x) = h(x) \ \& \ l(x) = x \ \& \ r(x) = x \rightarrow f(x), \\ l(x) \neq h(x) \rightarrow x; \end{cases}$$

$$t_2(x) = \begin{cases} l(x) = h(x) \ \& \ l(x) \neq x \rightarrow x, \\ l(x) = h(x) \ \& \ r(x) \neq x \ \& \ l(x) = x \rightarrow x, \\ l(x) = h(x) \ \& \ l(x) = x \ \& \ r(x) = x \rightarrow g(x), \\ l(x) \neq h(x) \rightarrow x. \end{cases}$$

Так как множество $\{a \in A | \ l(a) = h(a) \ \& \ l(a) = a \ \& \ \& \ r(a) = a\}$ является пустым, то на $\mathcal{A}_1$ истинно тождество $t_1(x) = t_2(x)$. Пусть теперь $\Theta = \Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o,1^o}$ — главная конгруэнция, порожденная парой $< 0^o, 1^o >$. Тогда очевидно, что $l([0^o]_\Theta) = h([0^o]_\Theta) = r([0^o]_\Theta) = [0^o]_\Theta$ и, значит, $t_1([0^o]_\Theta) = 1^1$, $t_2([0^o]_\Theta) = 0^1$, т.е. $\mathcal{A}_1/\Theta \not\models t_1(x) = t_2(x)$. Более того, для любого $i \in (0,1)$ $\mathcal{A}_1/\Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o,0^i} \cong \mathcal{A}_1$ и, значит, имеет место $\mathcal{A}_1/\Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o,0^i} \in \mathcal{M}^*(\mathcal{A}_1)$. В то же время $\mathcal{A}_1/\Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o,1^i} \cong \mathcal{A}_1/\Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o,1^o} \not\models t_1(x) = t_2(x)$.

Таким образом, не существует наименьшей конгруэнции $\Theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}_1$ такой, что $\langle 0^o, 1^o \rangle \in \Theta$ и $\mathcal{A}_1/\Theta \in \in \mathcal{M}^*(\mathcal{A}_1)$.

2) Построим расширение $\mathcal{A}_1'$ алгебры $\mathcal{A}_1$ путем добавления к основному множеству алгебры $\mathcal{A}_1$ двух основных элементов 0 и 1, доопределяя сигнатурные функции алгебры $\mathcal{A}_1'$ следующим образом:

$\varphi(x,y,z) = 0^o$, если $\{x,y,z\} \cup \{0,1\} \neq \emptyset$,

$l(0) = l(1) = h(0) = h(1) = f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0^0$,

$r(0) = r(1) = 1^0$.

Обогатим алгебру $\mathcal{A}_1'$ до алгебры $\mathcal{A}_2$ введением в сигнатуру еще одной одноместной функции

$$\psi(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \neq 1, \\ 1^o, \text{ если } x = 1. \end{cases}$$

Легко проверяется, что конгруэнция $\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,0}$ имеет единственный неодноэлементный класс эквивалентности $\{0, 0^o\}$, а конгруэнция $\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1}$ имеет единственный неодноэлементный класс эквивалентности $\{1^o, 1, 0\}$. При этом $\mathcal{A}_2 \models t_1(x) = t_2(x)$, $\mathcal{A}_2/\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,0} \models t_1(x) = t_2(x)$, $\mathcal{A}_2/\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1} \models$ $\models t_1(x) = t_2(x)$. Конгруэнция же $\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,0} \vee \Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1}$ на алгебре $\mathcal{A}_2$ имеет единственный неодноэлементный класс эквивалентности $\{0^o, 1^o, 0, 1\}$ и так как $(\mathcal{A}_2/\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,0} \vee \Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1})' \cong$ $\cong \mathcal{A}_1/\Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o,1^o}$ (здесь $(\mathcal{A}_2/\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,0} \vee \Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1})'$ — обеднение алгебры $\mathcal{A}_2/\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,0} \vee \Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1}$ до сигнатуры алгебры $\mathcal{A}_1$,) то, как это следует из доказательства утверждения 1 данной теоремы, не существует наименьшей конгруэнции Θ на алгебре $\mathcal{A}_2$ такой, что $\Theta \geq \Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,1}$, $\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1}$ и $\mathcal{A}_2/\Theta \models t_1(x) = t_2(x)$. Таким образом, если $\mathcal{M}$ — условное многообразие, определяемое для алгебр сигнатуры алгебры $\mathcal{A}_2$ условным тождеством $t_1(x) = t_2(x)$, то $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{M}$, $\mathcal{A}_2/\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,0} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{A}_2/\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1} \in \mathcal{M}$ и не существует наименьшей $\Theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}_2$ такой, что $\Theta \geq \Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o,0}$, $\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0,1}$ и $\mathcal{A}_2/\Theta \in \mathcal{M}$. В частности, совокупность $\mathcal{M}$-конгруэнций на алгебре $\mathcal{A}_2$ не является верхней полурешеткой. Теорема доказана.

В связи с доказательством утверждения 1 теоремы 3, заметим, что так как $\Theta^{\mathcal{A}_2}_{0^o, 1^o} = \bigcap_{i>0} \Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o, 0^i}$, $\mathcal{A}_1 / \Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o, 0^i} \cong$ $\cong \mathcal{A}_1 \models t_1(x) = t_2(x)$ и $\mathcal{A}_1 / \Theta^{\mathcal{A}_1}_{0^o, 1^o} \not\models t_1(x) = t_2(x)$, то условное многообразие, порожденное алгеброй $\mathcal{A}_1$, не является квазимногообразием (так как для любого квазимногообразия $\mathfrak{R}$, любой алгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{R}$ совокупность $\mathfrak{R}$-конгруэнций на $\mathcal{A}$ является полной нижней полурешеткой).

В качестве последнего открытого вопроса укажем на следующий

ВОПРОС 2. Нахождение по универсальной алгебре и содержащему ее условному многообразию такой производной структуры, которая бы позволяла решать вопросы строения этой алгебры, структуры подобной решеткам конгруэнций (относительных конгруэнций) для алгебр из многообразий (квазимногообразий).

Литература

1. WERNER H. Discriminator algebras. — Berlin: Academie Verlag, 1978.

2. ПИНУС А.Г. Конгруэнц-модулярные многообразия алгебр. — Иркутск, 1986 (Иркутский Госуниверситет).

3. FOSTER A.L. PIXLY A.F. Semi categorical algebras. II //Math.Z. — 1964. — Vol 85, N 2. — P.169-184.

4. МУРСКИЙ В.Л. Конечная базируемость тождеств и другие свойства "почти всех" конечных алгебр //Проблемы кибернетики, т.30. — М.: Наука, 1975. — С.43-56.

5. FOSTER A.L. Generalized "Boolean" theory of universal algebras. Part I: Subdirect sums and normal representation theorem //Math. Z. — 1953. — Vol.58, N 3. — P.306-336.

6. ANDREKA H., NEMETI J. On the congruence lattice of pseudo simple algebras //Contributions to universal algebra. — Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1977. — P.15-20.

7. ПИНУС А.Г. О квазипростых алгебрах //Исследование алгебраических систем по свойствам их подсистем. — Свердловск; 1987. — С.108-118 (Уральский Госуниверситет)

8. ПИНУС А.Г. О скелетах вложимости не локально конечных дискриминаторных многообразий с бедной алгеброй //Алгебра и логика, 1994. — Т.33, N 1. — С. 90-103.

Поступила в редакцию
31 августа 1995 года