СТРУКТУРНЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ
СВОЙСТВА ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1996 год Выпуск 156

УДК 510.67

ОДНОРОДНОСТЬ В ИТЕРИРОВАННЫХ МОДЕЛЯХ [1]

Алаев П.Е.

В этой работе исследуются теоретико-модельные свойства итерированных моделей, введенных в [3], т.е. моделей, в сигнатуру которых некоторое количество раз добавляются предикаты для всех типов (более точное определение дано ниже). В первой половине статьи вводится и обосновывается конструкция, позволяющая строить итерированные модели первого уровня обогащения с некоторыми нужными свойствами (хотя метод может быть обобщен и на более высокие уровни), во второй — на основе этой конструкции определяются две модели,показывающие существенные отличия свойств итерированных моделей от обычных.

Первый из этих примеров показывает, что на класс итерированных моделей не переносится из обычных утверждение о том,что для всякой модели есть элементарно эквивалентная ей однородная. Такое свойство, однако, появляется, если на теорию таких моделей наложить условие атомности. Поэтому второй пример показывает, что и в случае класса итерированных моделей атомной теории теряется другое важное свойство — то, что каждая модель элементарно вкладывается в однородную.

[1]Поддержано грантом РФФИ N 93-01-01506

1. Основные определения и обозначения

В этом разделе вводятся основные определения и доказываются некоторые вспомогательные леммы.

Пусть Σ — некоторая сигнатура. Положим $\Sigma^1 = \Sigma \cup$ $\cup \{P_p$ — предикатный символ: $p = p(\bar{x})$ — некоторое непустое множество формул Σ, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $P_p = P_p^{(k)}\}$ — новая сигнатура, в которой каждому множеству формул Σ ставится в соответствие свой предикатный символ. Более точно, предикат ставится в соответствие паре $(p, \bar{x})$, но этот формальный момент в большинстве случаев роли не играет. Естественно, считаем, что $P_p \notin \Sigma$ и $P_{p_1} \neq P_{p_2}$ при $p_1 \neq p_2$.

Пусть Σ фиксировано, $S \subseteq \Sigma^1, \mathcal{N}$ — модель S. Будем говорить, что она стандартна относительно Σ, если для любого $P_p \in S \setminus \Sigma$ и любого $\bar{a}$ из $|\mathcal{N}|$ верно: $\mathcal{N} \models$ $\models P_p(\bar{a}) \Longleftrightarrow \mathcal{N} \models p(\bar{a})$. Далее, пусть $\mathcal{M}$ — модель Σ.

Через $\mathcal{M}^1$ будем обозначать обогащение $\mathcal{M}$ до стандартной модели языка $\Sigma \cup \{P_p \in \Sigma^1\colon\ p(\bar{x})$ — тип Σ, реализующийся в $\mathcal{M}\}$, которое, очевидно, существует и единственно. Модели вида $\mathcal{M}^1$ являются итерированными моделями первого шага итерации.

Под $\mathbf{N}$ будем подразумевать множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Пусть A, B — некоторые непустые множества; $I_o \supseteq \dots$ $\dots \supseteq I_k$ — цепь функций, где для любого $f \in I_n, n \leq k$, верно: $\mathrm{dom} f \subseteq A$ и $f : \mathrm{dom} f \to B$. Будем называть ее правильной цепью из A в B, если выполняются условия:

1) если $f \in I_n, n \leq k$, то f разнозначно,

2) если $n < k, f \in I_{n+1}$, то верно:

2.1) для любого $x \in A$ существует $g \in I_n$ такое, что $f \subseteq g$ и $x \in \mathrm{dom} g$,

2.2) для любого $y \in B$ существует $g \in I_n$ такое, что $f \subseteq g$ и $y \in \mathrm{img}$,

3) $I_k \neq \emptyset$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — модели сигнатуры $\Sigma; I_o \supseteq \dots \supseteq I_k$ — правильная цепь из $A = |\mathcal{A}|$ в $B = |\mathcal{B}|$. Будем говорить: цепь сохраняет сигнатуру $\Sigma_o \subseteq \Sigma$, если для любых $n \leq k$

и $f \in I_n$ область определения f содержит все константы Σ_0, замкнута относительно операций Σ_0 и f сохраняет все элементы Σ_0 — в смысле обычного изоморфизма. Не говорим, что $\mathrm{dom} f$ — подмодель $\mathcal{A}$, так как она может быть и пустой.

Приведем некоторые определения из [1].Пусть $\phi(\bar{x})$ — бесконечная формула Σ (т.е. формула в логике, в которой кроме обычных операций допускаются бесконечные конъюнкции и дизъюнкции). Тогда кванторный ранг ϕ, обозначаемый $\mathrm{qr}(\phi)$ и являющийся ординалом, определяется так:

$$\phi \text{ атомарная формула } \Rightarrow \mathrm{qr}(\phi) = 0,$$

$$\mathrm{qr}(\bigwedge_{i \in I} \phi_i) = \mathrm{qr}(\bigvee_{i \in I} \phi_i) = \sup\{\mathrm{qr}(\phi_i) : i \in I\},$$

$$\mathrm{qr}(\neg\phi) = \mathrm{qr}(\phi),$$

$$\mathrm{qr}((\exists v)\phi) = \mathrm{qr}((\forall v)\phi) = \mathrm{qr}(\phi) + 1.$$

Очевидно, что для всякой обычной конечной формулы кванторный ранг также конечен.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — модели Σ (т.е. модели сигнатуры Σ), $k \in \mathbf{N}$. Тогда $\mathcal{A} \equiv^k \mathcal{B}$, если для любого θ — бесконечного предложения Σ (т.е. предложения сигнатуры Σ) верно: если $\mathrm{qr}(\theta) \leq k$, то $\mathcal{A} \models \theta \iff \mathcal{B} \models \theta$. В [1] доказано: $\mathcal{A} \equiv^k \mathcal{B} \iff$ существует $I_0 \supseteq \ldots \supseteq I_k$ — правильная цепь из $|\mathcal{A}|$ в $|\mathcal{B}|$, сохраняющая Σ. Пусть теперь Σ конечная сигнатура без функций. Ниже будет показано, что в таком случае каждое бесконечное предложение Σ конечного ранга будет эквивалентно конечному предложению того же ранга. Тем самым понятие $\mathcal{A} \equiv^k \mathcal{B}$ можно определить только через конечные предложения, и эквивалентность с существованием цепи останется верной.

Если $\phi(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x})$ бесконечные формулы, то будем называть их эквивалентными, если в любой модели на любых наборах значения этих формул совпадают, и писать $\phi \sim \psi$.

ЛЕММА 1. *Пусть Σ — конечная сигнатура без функций, $\bar{x}$ — набор переменных. Тогда*

1) для любого $n \in \mathbf{N}$ существует лишь конечное (с точностью до эквивалентности) число конечных формул $\phi(\bar{x})$ сигнатуры Σ таких, что $\mathrm{qr}(\phi) \leq n$,

2) для всякой $\phi(\bar{x})$ — бесконечной формулы Σ такой, что $\mathrm{qr}(\phi) \leq n$, $n \in \mathbf{N}$, *существует $\phi'(\bar{x})$ — конечная формула Σ такая, что $\phi(\bar{x}) \sim \phi'(\bar{x})$ и* $\mathrm{qr}(\phi') \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первой части нужны лишь длинные синтаксические выкладки, поэтому укажем только краткий путь: пусть ϕ — конечная формула, ψ — ее подформула вида $(\exists v)\chi$ или $(\forall v)\chi$. Тогда это вхождение кьантора $(\exists v)$ или $(\forall v)$ в формулу ϕ назовем вхождением уровня k, если $\mathrm{qr}(\chi) = k$. Пусть $Y = \{y_0, y_1, \ldots\}$ — некая последовательность переменных, не пересекающаяся с $\bar{x}$. Тогда по индукции нетрудно доказать два утверждения: для данного n существует лишь конечное (с точностью до эквивалентности) число конечных формул $\psi = \psi(\bar{x})$ языка Σ таких, что $\mathrm{qr}(\psi) \leq n$ и каждый квантор уровня k в ψ имеет вид $(\exists y_k)$ или $(\forall y_k)$, и каждая $\phi(\bar{x})$, у которой $\mathrm{qr}(\phi) \leq n$, эквивалентна некоторой $\psi(\bar{x})$ с такими свойствами. Из этого первая часть будет с очевидностью следовать.

Вторую нужно доказывать вложенной индукцией — по n и по сложности ϕ. Пусть $n = 0$, $\phi(\bar{x})$ — бесконечная формула, такая, что $\mathrm{qr}(\phi) = 0$. Индукцией по сложности ϕ докажем, что она эквивалентна конечной. Атомарная формула конечна по определению, разбор отрицания несложен. Пусть $\phi(\bar{x}) = \bigwedge\limits_{i \in I} \phi_i(\bar{x})$, тогда для каждого $i \in I$ существует $\phi'_i(\bar{x})$ — конечная формула ранга 0 такая, что $\phi_i(\bar{x}) \sim \phi'_i(\bar{x})$, поэтому $\phi(\bar{x}) \sim \bigwedge\limits_{i \in I} \phi'_i(\bar{x})$. Но конечных формул ранга 0 конечное число, поэтому бесконечная конъюнкция $\bigwedge\limits_{i \in I} \phi'_i(\bar{x})$ вырождается в конечную. Анализ случая $\bigvee\limits_{i \in I} \phi'_i(\bar{x})$ аналогичен, и подобными рассуждениями обосновывается переход $n \Rightarrow n + 1$. □

В дальнейшем под формулами будем подразумевать лишь конечные формулы. Если $\mathcal{M}$ — модель Σ и $A \subseteq |\mathcal{M}|^k$, $k \in \mathbf{N}$, то назовем A определимым в $\mathcal{M}$, если оно совпадает с реализацией в $\mathcal{M}$ некоторой формулы Σ, и неразличимым, если любые два его элемента неразличимы, где под неразличимостью двух наборов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается $(\mathcal{M},\bar{a}) \equiv (\mathcal{M},\bar{b})$. Если ϕ — формула, то $\phi^1 = \phi$ и $\phi^0 = \neg\phi$. Считая, что $\phi = \phi(\bar{x}), \bar{x} = (x_1,\ldots x_k)$, положим $\phi_{\bar{x}}(\mathcal{M}) = \{\bar{a} = (a_1,\ldots,a_k) \in |\mathcal{M}|^k : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}$. Значок $\subseteq_f$ будем применять для обозначения конечных подмножеств.

Пусть $\mathcal{N}$ — модель σ, $\mathcal{M}$ — модель Σ, $h: N \to M$ — некая функция. Будем говорить, что h сохраняет определимость в образах, если для любого $A \subseteq N^k$, определимого в $\mathcal{N}$, образ $h(A)$ определим в $\mathcal{M}$, и что h сохраняет определимость в прообразах, если для любого $A \subseteq M^k$, определимого в $\mathcal{M}$, прообраз $h^{-1}(A)$ определим в $\mathcal{N}$. Будем называть h специальным вложением, если h инъективна и сохраняет определимость как в образах, так и в прообразах.

ЛЕММА 2 (об определимости прообразов). *Пусть σ и Σ — две сигнатуры без функций, $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ — модели σ и Σ соответственно и $h : N \to M$ — инъекция. Пусть, далее, для любого $\Sigma_o \subseteq_f \Sigma$ и $n \in \mathbf{N}$ существуют $\sigma_o \subseteq_f \sigma$ и $m \in \mathbf{N}$ такие, что если $I_o \subseteq \ldots \subseteq I_m$ — правильная цепь из N в N, сохраняющая σ_o, то существует $I_o^* \subseteq \ldots \subseteq I_n^*$ — правильная цепь из M в M, сохраняющая Σ_o и такая, что если $f \in I_m$, то найдется такое $f^* \in I_n^*$, что $h \circ f \circ h^{-1} \subseteq f^*$. Тогда h сохраняет определимость в прообразах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \subseteq M^r$ и $\phi_{\bar{x}}(\mathcal{M}) = A$. Пусть Σ_o — язык ϕ, $n = \mathrm{qr}(\phi)$ и σ_o, m та пара, которая существует для Σ_o, n по условию. Число формул языка σ_o от $\bar{x}$ таких, что их кванторный ранг не более m конечно, и пусть это $\bar{\psi}_o(\bar{x}),\ldots,\bar{\psi}_l(\bar{x})$. В качестве $\psi_o(\bar{x}),\ldots,\psi_k(\bar{x})$ возьмем некоторое упорядочение конечного множества $\{\bar{\psi}_o^{\epsilon_o} \wedge\ldots\wedge \bar{\psi}_l^{\epsilon_l} : (\epsilon_o,\ldots,\epsilon_l) \in \{0,1\}^{l+1}\}$. Пусть $I = \{i \in \{0,\ldots,k\} : \psi_{i,\bar{x}}(\mathcal{N}) \cap B \neq \emptyset\}$, где $B = h^{-1}(A)$, и $\chi(\bar{x}) = \bigvee_{i\in I} \psi_i(\bar{x})$. Тогда $B \subseteq \chi_{\bar{x}}(\mathcal{N})$. Докажем, что $B = \chi_{\bar{x}}(\mathcal{N})$.

Это и даст нужное. Пусть $\bar{a} \in \chi_{\bar{x}}(\mathcal{N})$, тогда существует $i \in I$ такое, что $\bar{a} \in \psi_{i,\bar{x}}(\mathcal{N})$, и существует $\bar{b} \in B$ такое, что $\bar{b} \in \psi_{i,\bar{x}}(\mathcal{N})$. В этом случае, очевидно, $(\mathcal{N}|\sigma_o, \bar{a}) \equiv^m \equiv^m (\mathcal{N}|\sigma_o, \bar{b})$ и, следовательно, существует $I_o \supseteq \ldots \supseteq I_m$ — правильная цепь из N в N, сохраняющая σ_o, такая, что в I_m существует f со свойством: $\bar{a}$ из $\mathrm{dom} f$ и $f(\bar{a}) = \bar{b}$. По условию существует $I_o^* \supseteq \ldots \supseteq I_n^*$ — правильная цепь из M в M, сохраняющая Σ_o и с указанными в условии свойствами, из чего следует, что $(\mathcal{M}|_{\Sigma_o}, h(\bar{a})) \equiv^n (\mathcal{M}|_{\Sigma_o}, h(\bar{b}))$, $\bar{b} \in \in B \Rightarrow h(\bar{b}) \in A \Rightarrow \mathcal{M} \models \phi(h(\bar{b}))$. Если $\mathcal{M} \models \neg\phi(h(\bar{a}))$, то эквивалентность нарушается, поэтому $h(\bar{a}) \in A$ и $\bar{a} \in B$. Нужное доказано. □

2. Построение стандартной модели с определенными свойствами

В этой части работы будет описана конструкция, смысл которой заключен в теореме, завершающей раздел. Фактически она позволяет при указанных ниже ограничениях (довольно существенных) строить модели вида $\mathcal{N}^1$, "похожие" на заданные обычные модели.

Пусть Σ — счетный язык без функциональных символов, $\mathcal{M}$ — счетная модель Σ, $\sigma = \{Q_o^{(\alpha_o)}, Q_1^{(\alpha_1)}, \ldots \ldots, Q_n^{(\alpha_n)}, \ldots\}$ — подъязык из некоторых предикатных символов. Положим $\hat{\Sigma} = \Sigma \setminus \sigma, \hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_{\hat{\Sigma}}$.

Пусть $\{T_o^{(1)}, T_1^{(1)}, \ldots\}$ и $\{R_o^{(\alpha_o+1)}, R_1^{(\alpha_1+1)}, \ldots\}$ — предикатные символы, не входящие в Σ, положим $\Sigma^* = \hat{\Sigma} \cup \cup\{T_i : i \in \mathrm{N}\} \cup \{R_i : i \in \mathrm{N}\}$. Для $\epsilon = 0, 1$ определим класс $\mathbf{A}_\epsilon$ как класс счетных моделей $\mathcal{A}$ языка $\{T_i : i \in \mathrm{N}\}$ с такими свойствами: $T_o^{\mathcal{A}} = |\mathcal{A}|$, $T_{i+1}^{\mathcal{A}} \subset T_i^{\mathcal{A}}$, $|T_i^{\mathcal{A}} \setminus T_{i+1}^{\mathcal{A}}| = 1$; если $\epsilon = 0$, то $\bigcap\limits_{i \in N} T_i^{\mathcal{A}} = 0$, если $\epsilon = 1$, то $|\bigcap\limits_{i \in N} T_i^{\mathcal{A}}| = 1$.

Определим теперь модель $\mathcal{M}^*$ языка Σ^*. Для каждого $n \in \mathrm{N}$ и $\bar{a} \in \mathcal{M}^{\alpha_n}$, где $M = |\mathcal{M}|$, заведем экземпляр модели $\mathcal{A}_{\bar{a}}^n$ из $\mathbf{A}_\epsilon$, где $\epsilon = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \neg Q_n(\bar{a})$ и $\epsilon = 1 \Leftrightarrow \mathcal{M} \models Q_n(\bar{a})$;

$|A^n_{\bar a}|$ обозначим $A^n_{\bar a}$ и считаем: $A^{n_1}_{\bar a_1} \cap A^{n_2}_{\bar a_2} = \emptyset$ при $(n_1, \bar a_1) \neq$ $\neq (n_2, \bar a_2)$, $A^n_{\bar a} \cap M = \emptyset$ для всех $(n, \bar a)$. Полагаем

$$M^* = |\mathcal{M}^*| = M \cup \bigcup_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ \bar a \in M^{\alpha_n}}} A^n_{\bar a}.$$

Предикаты T_i считаем определенными на $A^n_{\bar a}$ как на носителях $\mathcal{A}^n_{\bar a}$, на остальной части модели определяем их так: $\mathcal{M}^* \models \neg T_i(a)$ для любых $a \in M$ и $i \in \mathbf{N}$. Пусть $(\bar a, b) \in (M^*)^{\alpha_n+1}$, тогда $\mathcal{M}^* \models R_n(\bar a, b) \Leftrightarrow (\bar a \in M^{\alpha_n}$ и $b \in A^n_{\bar a})$. На M символы из $\hat\Sigma$ считаем определенными как на носителе $\hat{\mathcal{M}}$. Если $P^{(k)}$ — предикат из $\hat\Sigma$, $\bar a \in (M^*)^k \setminus M^k$, то $\mathcal{M}^* \models \neg P(\bar a)$. Реализации констант из $\hat\Sigma$, очевидно, лежат в M. Тем самым $\mathcal{M}^*$ построено. По построению $\hat{\mathcal{M}} \subseteq (\mathcal{M}^*)|_{\hat\Sigma}$ и $\mathcal{M}^*$ — счетная модель счетного языка.

Введем следующее обозначение. Если $y \in M^* \setminus M$, то по построению существуют $n \in \mathbf{N}$ и $\bar a$ из M такие, что $\mathcal{M}^* \models R_n(\bar a, y)$. Это $\bar a$, которое единственно, будем обозначать как $\Phi(y)$. Если $y \in M$, то полагаем $\Phi(y) = (y)$.

ЛЕММА 3. $\mathrm{Id}_M : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}^*$ — *специальное вложение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество M определимо в $\mathcal{M}^*$ формулой $\neg T_0(x)$, и из этого с очевидностью следует сохранение определимости в образах: достаточно ограничить кванторы на $\neg T_0(x)$, и добавить $\neg T_0(v)$ для всех свободных переменных v. Для доказательства в другую сторону применим лемму об определимости прообразов. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $\Sigma^*_0 \subseteq_f \Sigma^*$. Положим $\sigma_0 = \Sigma^*_0 \cap \hat\Sigma$, $k =$ $= \max\{k' : T_{k'} \in \Sigma^*_0\}$, $l = \max\{l' : R_{l'} \in \Sigma^*_0\}$, $r = \max\{\alpha_n :$ $n \leq l\}$, $m = (n+1) \cdot r - 1$. Докажем, что σ_0 и m — то, что требуется в условии леммы. Пусть $I_0 \subseteq \ldots \subseteq I_m$ — правильная цепь из M в M, сохраняющая σ_0.

Предварительно для данных $k \in \mathbf{N}$, $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ зафиксируем какой-нибудь способ биективного отображения $h^k_{\epsilon_1, \epsilon_2} : \mathcal{A}_{\epsilon_1} \to \mathcal{A}_{\epsilon_2}$, где $\mathcal{A}_{\epsilon_i} \in \mathbf{A}_{\epsilon_i}$, сохраняющего предикаты $T_0, \ldots, T_k$. Под фиксированностью понимается то, что $h^k_{\epsilon_1, \epsilon_2}$ ведет себя одинаково относительно всех

T_i, $i \in \mathrm{N}$, для данных k, ϵ_1 и ϵ_2. Кроме того, будем считать, что $h^k_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ для $\epsilon_1 = \epsilon_2$ является изоморфизмом $\mathcal{A}_{\epsilon_1}$ и $\mathcal{A}_{\epsilon_2}$ — это пригодится в будущем.

Построим теперь нужную цепь. Пусть $f \in I_j, j \leq m$. Пусть $\bar{x}_o$ из $\mathrm{dom} f, n \leq l, |\bar{x}_o| = \alpha_n$ и $\bar{x}_1 = f(\bar{x}_o)$. Положим $Y_o = \{y \in M^* : \mathcal{M}^* \models R_n(\bar{x}_o, y)\}$, $Y_1 = \{y \in M^* : \mathcal{M}^* \models R_n(\bar{x}_1, y)\}$, тогда Y_o и Y_1 являются по построению $\mathcal{M}^*$ носителями некоторых моделей из $\mathcal{A}_{\epsilon_o}$ и $\mathcal{A}_{\epsilon_1}$ соответственно. Положим $f_{\bar{x}_o, n} = h^k_{\epsilon_o,\epsilon_1} : Y_o \to Y_1$. Кроме того, пусть $M_l^* = \{y \in M^* \setminus M :$ не существует $n \leq l$ и $\bar{a}$ из M такого, что $\mathcal{M}^* \models R_n(\bar{a}, y)\}$. Тогда определим

$$f^* = f \cup \bigcup_{\substack{n \leq l,\ |\bar{x}_o| = \alpha_n \\ \bar{x}_o \text{ из } \mathrm{dom} f}} f_{\bar{x}_o, n} \cup Id_{M_l^*}$$

Далее положим, $I_j^o = \{f^* : f \in I_j\}$ для $j \leq m$. Легко видеть, что все f^* разнозначные функции из M^* в M^*, сохраняющие Σ_o^*. Кроме того, верно свойство $f \subseteq g \Rightarrow$ $\Rightarrow f^* \subseteq g^*$, и по построению $I_o^o \supseteq \ldots \supseteq I_m^o$. Но, вообще говоря, правильной цепью это еще не будет. Чтобы получить правильность, для $i = 0, \ldots, n$ положим

$$I_i^* = \bigcup_{j=i\cdot r}^{(i+1)\cdot r - 1} I_j^o,$$

образуя цепь $I_o^* \supseteq \ldots \supseteq I_n^*$. Докажем, что она будет правильной цепью из M^* в M^* (про сохранению Σ_o^* уже сказано). Пусть $f^* \in I_{t+1}^* \Rightarrow$ существует s такое, что $(t+1) \cdot r \leq s < (t+2) \cdot r$ и $f^* \in I_s^o$. Пусть некое $z \in M^*$. Рассмотрим случаи:

1) $z \in M_l^* \Rightarrow z \in \mathrm{dom} f^*$, и доказывать нечего,

2) $z \notin M_l^* \Rightarrow |\Phi(z)| \leq r$, и $\Phi(z)$ из M. В этом случае, добавляя каждый раз по одному элементу $\Phi(z)$, мы найдем $g \in I_{s-r}$ такое, что $f \subseteq g$ и $\Phi(z)$ из $\mathrm{dom} g$. Тогда $f^* \subseteq g^*, z \in \mathrm{dom} g^*$ и $g^* \in I_t^*$.

Поиск $g^* \in I_t^*$ такого, что $z \in \mathrm{img}^*$ производится аналогично. Нужная цепь построена, и все доказано. □

Пусть для $z \in M^*$

$$\delta(z) = \begin{cases} -1, \text{ если } \neg T_0(z), \\ n, \text{ если } T_n(z) \wedge \neg T_{n+1}(z), \\ \infty, \text{ если } T_n(z) \text{ для всех } n \in \mathbf{N}; \end{cases}$$

$$\gamma(z) = \begin{cases} -1, \text{ если } \neg T_0(z), \\ k, \text{ если существует } \bar{x} \text{ такое,} \\ \qquad \text{что } R_k(\bar{x}, z). \end{cases}$$

ЛЕММА 4. *Пусть* $\bar{z}' = (z_1', \ldots, z_k')$ *и* $\bar{z}'' = (z_1'', \ldots, z_k'')$ *из* M^*, $\delta(z_i') = \delta(z_i'')$ *и* $\gamma(z_i') = \gamma(z_i'')$ *для любого* i. *Тогда* $\bar{z}'$ *и* $\bar{z}''$ *неразличимы в* $\mathcal{M}^*$ $\Leftrightarrow$ $\Phi(\bar{z}')$ *и* $\Phi(\bar{z}'')$ *неразличимы в* $\mathcal{M}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{z}' = (x_1', \ldots, x_n', y_1', \ldots, y_m')$ и верно: $\neg T_0(x_i')$ и $T_0(y_j')$. Тогда $\bar{x}' = \Phi(\bar{z}') = (x_1', \ldots, x_n', \bar{x}_1', \ldots, \bar{x}_m')$. Аналогично для $\bar{z}''$ и $\Phi(\bar{z}'') = \bar{x}''$. Предположим: $\bar{x}'$ и $\bar{x}''$ неразличимы, а $\bar{z}'$ и $\bar{z}''$ различимы. Пусть $\phi(\bar{z})$ — формула Σ^* такая, что $\mathcal{M}^* \models \phi(\bar{z}') \wedge \neg\phi(\bar{z}'')$. Предположим еще, что среди $\delta(z_1'), \ldots, \delta(z_k')$ нет ∞. Тогда формула

$$\psi(\bar{x}) = \text{"}(\exists y_1 \ldots \exists y_m)(\bigwedge_{i=1}^{m}[R_{\gamma(y_i')}(\bar{x}_i, y_i) \wedge T_{\delta(y_i')}(y_i) \wedge$$

$$\wedge \neg T_{\delta(y_i')+1}(y_i)] \wedge \phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m))\text{"}$$

будет различать $\bar{x}'$ и $\bar{x}''$.

Пусть теперь среди $\delta(z_1'), \ldots, \delta(z_k')$ есть ∞, и пусть $l = \max\{l' \in \mathbf{N} : \ l' \in \{\delta(y_1'), \ldots, \delta(y_m')\}$ или $T_{l'}$ входит в $\phi\} + 1$. Вместо тех y_i', у которых $\delta(y_i') = \infty$, возьмем другие $\bar{y}_i'$ такие, что $\gamma(\bar{y}_i') = \gamma(y_i')$, $\Phi(\bar{y}_i') = \Phi(y_i')$ и $\delta(\bar{y}_i') = l$; аналогично и для y_i'' и $\bar{y}_i''$. Обмен местами y_i' и $\bar{y}_i'$ будет автоморфизмом модели $\mathcal{M}^* |_{\Sigma^* \setminus \{T_l, T_{l+1}, \ldots\}}$, не нарушающим предикаты между y_i' и другими компонентами $\bar{z}'$; $\Phi(\bar{z}')$ от этого не изменится, и ситуация вернется к предыдущему случаю. В одну сторону доказано. В другую доказательство совсем просто: пусть $\mathcal{M}^* \models \psi(\bar{x}') \wedge \neg\psi(\bar{x}'')$.

Тогда формула

$$\phi(\bar{z}) = "(\exists\bar{x}_1 \ldots \exists\bar{x}_m)[\bigwedge_{i=1}^{m} R_{\gamma(y_i')}(\bar{x}_i, y_i) \wedge$$

$$\wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)"$$

будет различать $\bar{z}'$ и $\bar{z}''$. □

Установив общий вид неразличимых элементов в $\mathcal{M}^*$, нетрудно описать все максимальные неразличимые множества в этой модели.

Пусть $k \in \mathbf{N}$, $\{B_n^k\}_{n\in\mathbf{N}}$ — некоторое фиксированное разнозначное перечисление всех максимальных неразличимых множеств в M^k . Если таких множеств конечное число, то ситуация лишь упростится, поэтому будем считать, что их количество бесконечно. Каждому B_n^k соответствует тип $\{\phi_{n,i}^k(\bar{x}) : i \in \mathbf{N}\}$ языка Σ^*. Рассмотрим $H_k = \{(p_1, \ldots, p_m) : m \in \mathbf{N}, p_i = (\delta_i, \gamma_i)$, где $\delta_i \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $\gamma_i \in \mathbf{N}$ или $\delta_i = -1$, $\gamma_i = -1$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и $\sum_{i=1}^{m} \alpha\gamma_i = k$, где $\alpha_{-1} = 1\}$. Очевидно, что если $\bar{p} \in H_k$, то по самому $\bar{p}$ легко восстановить это k, которое будем обозначать $k(\bar{p})$.

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ и $\bar{p} \in H_k$, считая, что $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m) = ((\delta_1, \gamma_1), \ldots, (\delta_m, \gamma_m))$, рассмотрим $D_n^{\bar{p}} = \bigcap_{i\in\mathbf{N}} \{(z_1, \ldots, z_m) \in (M^*)^m : \neg T_o(z_j)$ для j такого, что $\delta_j = -1$, $T_{\delta_j}(z_j) \wedge \neg T_{\delta_j+1}(z_j)$ для j такого, что $\delta_j \in \mathbf{N}$ и $T_i(z_j)$ для j такого, что $\delta_j = \infty$ и верно:

$$(\exists\bar{x}_1 \ldots \exists\bar{x}_m)[\bigwedge_{r=1}^{m} R_{\gamma_r}(\bar{x}_r, z_r) \wedge \phi_{n,i}^{k(\bar{p})}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)],$$

где $R_{-1}(x, z)$ — это формула "$x = z$"$\}$. Тогда легко видеть, что $D_n^{\bar{p}} = \{(z_1, \ldots, z_m) : m = l(\bar{p}),\ \delta(z_i) = \delta_i, \gamma(z_i) = \gamma_i$ для $i = 1, \ldots, m$ и $\Phi(\bar{z}) \in B_n^{k(\bar{p})}\}$.

Из леммы 4 следует, что это множество неразличимо. Кроме того, из построения видно, что оно задается как пересечение определимых множеств, следовательно, оно либо пустое, либо максимальное неразличимое. Очевидно также, что семейство $\{D_n^{\bar{p}} : n \in \mathbf{N},\ \bar{p} \in \bigcup\limits_{k \in \mathbf{N}} H_k\}$ состоит из непересекающихся множеств. Докажем, что оно покрывает все $(M^*)^m$. Пусть $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ из M^*. Пусть $\bar{p} = ((\delta(z_1), \gamma(z_1)), \ldots, (\delta(z_m), \gamma(z_m)))$, $k = k(\bar{p})$. Тогда $\bar{p} \in H_k$ и $\Phi(\bar{z}) \in (M^*)^k$. Набор $\Phi(\bar{z})$ лежит в некотором максимальном неразличимом множестве в $\mathcal{M}^*$ и это множество будет целиком содержаться в $M^k \Rightarrow$ будет совпадать с некоторым B_n^k.

Пусть $\bar{\mathcal{M}} = (\hat{\mathcal{M}})^1$ и $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}^*)^1$ — модели языков $\bar{\Sigma}$ и Σ' соответственно, $\check{\mathcal{M}}$ — такое обогащение $\bar{\mathcal{M}}$ до языка $\check{\Sigma} = \bar{\Sigma} \cup \sigma$, что $\check{\mathcal{M}} |_{\Sigma} = \mathcal{M}$.

ЛЕММА 5. $\mathrm{Id}_M : \check{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}'$ — *сохраняет определимость в прообразах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно отметим один факт. Пусть $\mathcal{N}$ — модель Σ, $I_o \supseteq \ldots \supseteq I_m$ — правильная цепь из $|\mathcal{N}|$ в $|\mathcal{N}|$, сохраняющая Σ, $f \in I_k$, $\theta(\bar{x})$ — формула Σ такая, что $\mathrm{qr}(\theta) \leq k$. Тогда, из ранее сказанного следует, что $(\mathcal{N}, \bar{a}) \equiv^k (\mathcal{N}, f(\bar{a}))$ для любой $\bar{a}$ из $\mathrm{dom} f$. А это означает, что f будет "сохранять" формулу θ, т.е. для любого $\bar{a}$ из $\mathrm{dom} f$ будет верно: $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \theta(f(\bar{a}))$.

Для доказательства применим лемму об определимости прообразов. Пусть $\Sigma'_o \subseteq_f \Sigma'$ и $n \in \mathbf{N}$. Нам нужно найти $\check{\Sigma}_o \subseteq_f \check{\Sigma}$ и $m' \in \mathbf{N}$, удовлетворяющие условиям леммы. Без ограничения общности можно считать, что $\Sigma'_o = (\Sigma'_o \cap \hat{\Sigma}) \cup \cup \{T_o, \ldots, T_k\} \cup \{R_o, \ldots, R_l\} \cup \{P_o, \ldots, P_t\}$, где $P_i \in \Sigma' \setminus \Sigma^*$. Для любого $i = 0, \ldots, t$ реализация $P_i^{\mathcal{M}'}$ — некое максимальное неразличимое множество в $\mathcal{M}^*$, совпадающее с некоторым $D_{n_i}^{\bar{p}_i}$. Пусть $k_i = k(p_i)$, $\bar{p}_i = ((\delta_{i,1}, \gamma_{i,1}), \ldots, (\delta_{i,m_i}, \gamma_{i,m_i}))$. Тогда $P_i^{\mathcal{M}'} = \{\bar{z} \in (M^*)^{m_i} : \Phi(\bar{z}) \in B_{n_i}^{k_i}$ и $\gamma(z_j) = \gamma_{i,j}$ и $\delta(z_j) = \delta_{i,j}$ для $j = 1, \ldots, m_i\}$, где $B_{n_i}^{k_i}$ — реализация некоторого типа языка Σ^* в $(M)^{k_i}$. Поскольку $Id_M : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}^*$ — специальное вложение, $B_{n_i}^{k_i}$ — также реализация некоторого типа $\hat{\Sigma}$ в $\hat{\mathcal{M}}$. Если этот тип главный, то существует формула θ_i языка $\hat{\Sigma}$, выделяющая $B^{k_i}_{n_i}$ в $\hat{\mathcal{M}}$, если — неглавный, то существует $\bar{P}_i \in \bar{\Sigma} \setminus \hat{\Sigma}$ такой, что $B^{k_i}_{n_i} = \bar{P}_i^{\hat{\mathcal{M}}}$. Без ограничения общности можно считать, что язык таких θ_i содержится в $\Sigma'_o \cap \hat{\Sigma}$, и для простоты обозначений будем полагать, что θ_i и $\bar{P}_i \in \bar{\Sigma} \setminus \hat{\Sigma}$ определены для всех $i = 1, \dots, t$. Кроме того, будем считать, что $\mathrm{qr}(\theta_i) \leq q$ для всех i.

Положим $\check{\Sigma}_o = (\Sigma'_o \cap \hat{\Sigma}) \cup \{\bar{P}_i : i = 1, \dots, t\} \cup \{Q_s : s = \gamma_{i,j}, 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq m_i\}$. Будем также считать, что если $Q_s \in \check{\Sigma}_o$, то $s \leq l$. Далее, пусть $r = \max\{\alpha_s : s \leq l\}$, положим $m = (n+1) \cdot r + 1$ и $m' = m + q$. Докажем, что это то, что требуется в условиях леммы. Пусть $I_{-q} \supsetneq \dots \dots \supsetneq I_o \supsetneq \dots \supsetneq I_m$ — правильная цепь из M в M, сохраняющая $\check{\Sigma}_o$. Точно так же, как и в доказательстве того, что $\mathrm{Id}_M : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}^*$ — специальное вложение, определим $f_{\bar{x}_o, n}$ для $f \in I_j, \bar{x}_o$ из $\mathrm{dom} f$ и $n \leq l$, затем M_l^* и f^*, образуем $I_j^o = \{f^* : f \in I_j\}$ для $j = 0, \dots, m$.

Как было показано ранее, функции из этой цепи будут разнозначными и будут сохранять $\Sigma'_o \cap \Sigma^*$. Докажем, что это будет верно и для $\bar{P}_i$, при данном i. Пусть $\bar{z} \in (M^*)^{m_i}$, $\bar{z}$ из $\mathrm{dom} f^*$, $f^* \in I_j^o$ и $\mathcal{M}' \models \bar{P}_i(\bar{z})$ (вариант, когда $\mathcal{M}' \models \bar{P}_i(f(\bar{z}))$, рассматривается аналогично). Для любого $s \in \{1, \dots, m_i\}$ верно неравенство: $\gamma(z_s) \leq l \Rightarrow \Rightarrow \Phi(\bar{z})$ из $\mathrm{dom} f^*$, по построению $f^*(\Phi(\bar{z})) = \Phi(f^*(\bar{z}))$ и $f^*(\Phi(\bar{z})) = f(\Phi(\bar{z}))$. Функция f, сохраняя $\bar{P}_i$ и θ_i, сохраняет и $B^{k_i}_{n_i}$, $\Phi(\bar{z}) \in B^{k_i}_{n_i}$, поэтому $\Phi(f^*(\bar{z})) \in B^{k_i}_{n_i}$ и $\gamma(f^*(z_s)) = \gamma(z_s)$ для $1 \leq s \leq m_i$. Осталось показать, что $\delta(z_s) = \delta(f^*(z_s)$; тогда будет доказано, что $f^*(\bar{z}) \in \bar{P}_i^{\mathcal{M}'}$. Если $z_s \in M$, то $f^*(z_s) \in M$ и равенство верно. В другом случае, пусть $q = = \gamma(z_s)$, тогда $Q_q \in \check{\Sigma}_o$ и $\mathcal{M} \models Q_q(\Phi(z_s)) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models Q_q(f^*(\Phi(z_s)))$, из чего следует, что z_s переводится функцией f^* в $f^*(z_s)$ "с помощью" $h^k_{o,o}$ или $h^k_{1,1}$, которые сохраняют все T_i, из чего следует нужное. □

Пусть $\mathcal{N}$ — модель некоторого языка Σ, $\Sigma_o \subsetneq \Sigma$ и $Q^{(k)} \in \Sigma \setminus \Sigma_o$ — предикат. Будем называть его простым относительно Σ_o в $\mathcal{N}$, если $Q^{\mathcal{N}}$ представим в виде конечного объединения неразличимых в $\mathcal{N}|_{\Sigma_o}$ множеств.

ЛЕММА 6. *Пусть все предикаты из σ просты относительно $\hat{\Sigma}$ в $\check{\mathcal{M}}$. Тогда* $\mathrm{Id}_M : \check{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}'$ *сохраняет определимость в образах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку M определимо в $\mathcal{M}^*$, достаточно показать, что реализации элементов $\check{\Sigma}$ в $\check{\mathcal{M}}$ определимы в $\mathcal{M}'$, так как навешивание кванторов будет очевидным образом сохранять определимость. Элементы $\hat{\Sigma}$ определимы по построению. Пусть $P \in \bar{\Sigma} \setminus \hat{\Sigma}$, тогда $P^{\check{\mathcal{M}}}$ — реализация неглавного типа из $\hat{\mathcal{M}}$ и, поскольку $\mathrm{Id}_M : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}^*$ специальное вложение, реализация также неглавного типа и в $\mathcal{M}^*$, из чего следует, что существует $P' \in \Sigma' \setminus \Sigma^*$ такой, что $(P')^{\mathcal{M}'} = P^{\check{\mathcal{M}}}$ — это даст нужное. Пусть теперь $Q_n \in \sigma$ и $Q_n^{\check{\mathcal{M}}} = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, где A_i неразличимые множества в $\hat{\mathcal{M}}$. Каждое A_i может быть дополнено до $B_i \supseteq A_i$, где $B_i \subseteq M^{\alpha_n}$ и B_i максимальное неразличимое как в $\mathcal{M}$, так и в $\mathcal{M}^*$ для $i = 1, \ldots, k$. Существуют n_i такие, что $B_i = B_{n_i}^{\alpha_n}$; положим $\bar{p} = ((\infty, n))$ и $D_i = D_{n_i}^{\bar{p}}$. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, k$ множество D_i либо пустое, либо максимальное неразличимое. В последнем случае оно реализация либо главного, либо неглавного типа в $\mathcal{M}^*$, и при любом варианте существует $\phi_i(y)$ — формула Σ' такая, что $\phi_i(\mathcal{M}') = D_i$. Пусть $\psi(\bar{x}) = $ "$(\exists y)(R_n(\bar{x}, y) \wedge \bigvee_{i=1}^{k} \phi_i(y))$", тогда легко понять, что $\psi_{\bar{x}}(\mathcal{M}') = Q_n^{\check{\mathcal{M}}}$, и нужное доказано. □

ЛЕММА 7. *Если* $\mathrm{Th}(\check{\mathcal{M}})$ *атомная, то и* $\mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ *тоже атомная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathrm{Th}(\check{\mathcal{M}})$ атомная. Заметим сначала, что если формула $\psi(\bar{x})$ языка Σ' такова, что $\psi_{\bar{x}}(\mathcal{M}')$ из M и не пусто, то под ней есть атомная формула. Это с очевидностью следует из специальности вложения. Пусть теперь $\phi_o(\bar{z})$ — произвольная формула Σ', реализующаяся в $\mathcal{M}'$, и $\bar{z}^o$ из M^* таков, что $\mathcal{M}' \models \phi_o(\bar{z}^o)$. Тогда $\bar{z}^o$ принадлежит некоторому непустому $D_n^{\bar{p}}$, и существует формула $\theta(\bar{z})$ такая, что $\theta_{\bar{z}}(\mathcal{M}') = D_n^{\bar{p}}$. Определим

$\phi(\bar{z}) = "\phi_o(\bar{z}) \wedge \theta(\bar{z})"$. Будем считать, что $\bar{z}^o = (x^o_1, \ldots$ $\ldots, x^o_n, y^o_1, \ldots, y^o_m)$, где выполняются $\neg T_o(x^o_i)$ и $T_o(y^o_j)$, и что $\Phi(\bar{z}^o) = \bar{x}^o = (x^o_1, \ldots, x^o_n, \bar{x}^o_1, \ldots, \bar{x}^o_m)$. Положим

$$\psi(\bar{x}) = "(\exists y_1 \ldots \exists y_m)[\bigwedge_{i=1}^{m} R_{\gamma(y^o_i)}(\bar{x}_i, y_i) \wedge$$

$$\wedge \phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)]",$$

где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$. Тогда $\psi_s(\mathcal{M}')$ — множество из M, содержащее $\Phi(\bar{z}^o)$, и найдется атомная в $\mathcal{M}'$ формула $\psi'(\bar{x})$ такая, что $\psi' \to \psi$. Обозначим

$$\phi'(\bar{z}) = "(\exists \bar{x}_1 \ldots \exists \bar{x}_m)[\bigwedge_{i=1}^{m} R_{\gamma(y^o_i)}(\bar{x}_i, y_i) \wedge$$

$$\wedge \psi'(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)] \wedge \vartheta(\bar{z})".$$

Тогда $\phi' \to \phi$, $\phi \to \phi_o$, и для завершения доказательства достаточно обосновать, что $\phi'(\bar{z})$ атомная формула. Реализуемость очевидна. Предположим, что $\phi'(\bar{z}) \wedge \xi(\bar{z})$ и $\phi'(\bar{z}) \wedge \neg\xi(\bar{z})$ реализуются в $\mathcal{M}'$. Так же, как было образовано $\psi(\bar{x})$ для $\phi(\bar{z})$, построим $\psi_1(\bar{x})$ и $\psi_2(\bar{x})$ для первой и второй формулы соответственно. Нетрудно понять, что это будут реализующиеся дизъюнктные формулы, вкладывающиеся в ψ', что противоречит ее атомности. Тем самым утверждение доказано. □

Подведем теперь итог наших построений, и сформулируем общее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Σ — счетная сигнатура без функций, $\sigma \subseteq \Sigma$ — некоторое подмножество из предикатных символов, $\mathcal{M}$ — счетная модель Σ. Обозначим $\hat{\Sigma} = \Sigma \setminus \sigma$, $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\,|_{\hat{\Sigma}}$, $\bar{\mathcal{M}} = (\hat{\mathcal{M}})^1$, через $\check{\mathcal{M}}$ модель $\bar{\mathcal{M}}$, обогащенную символами из σ так, чтобы $\check{\mathcal{M}}\,|_{\Sigma} = \mathcal{M}$. Пусть каждый предикат из σ прост относительно $\hat{\Sigma}$ в $\mathcal{M}$. Тогда существует $\mathcal{M}^*$ — счетная модель счетного языка Σ^*, обладающая следующими свойствами. Пусть $\bar{\Sigma}$ и Σ' — языки $\bar{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}^*)^1$ соответственно. Тогда верно:*

1) $|\mathcal{M}| = M \subseteq |\mathcal{M}^*|$, *2)* $\mathrm{Id}_M : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}^*$ *— специальное вложение,*

3) $\mathrm{Id}_M : \check{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}'$ *— специальное вложение,*

4) если $P \in \bar{\Sigma} \setminus \hat{\Sigma}$, *то существует* $P' \in \Sigma' \setminus \Sigma^*$ *такой, что* $P^{\check{\mathcal{M}}} = (P')^{\mathcal{M}'}$,

5) если $\mathrm{Th}(\check{\mathcal{M}})$ *атомная, то* $\mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ *тоже атомная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого непосредственно следует из предыдущих рассуждений.

3. Теория, не имеющая стандартных однородных моделей

Известно, что каждая теория имеет однородную модель. В этой части будет построен пример, показывающий, что аналогичное утверждение не верно в пространстве стандартных моделей теории. Волее точно это формулируется в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Существует* $\mathcal{M}^*$ *— счетная модель счетного языка* Σ^* *такая, что* $Th((\mathcal{M}^*)^1)$ *не имеет однородных стандартных относительно* Σ^* *моделей.*

Доказательству этой теоремы, т.е. построению такой модели, посвящен весь этот раздел. В нем будет определена шестерка моделей $(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{M}}, \bar{\mathcal{M}}, \check{\mathcal{M}}, \mathcal{M}^*, \mathcal{M}')$ и соответствующих языков, связанных между собой теми же соотношениями, что и в предыдущей части.

Пусть $E = \{f : f : [0, n[\to \{0,1\}, [0, n[\subseteq \mathbf{N}, n \geq 0\}$. Пустой элемент E будем обозначать через λ. Определим $E_n = \{\epsilon \in E : |\epsilon| = n\}$ для $n \in \mathbf{N}$. Через $2^{\mathbf{N}}$ обозначим $\{f : f : \mathbf{N} \to \{0,1\}\}$, через D — подмножество $2^{\mathbf{N}}$, состоящее из тех функций f, для которых существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что $f(n) = f(n+i)$ для любого $i \in \mathbf{N}$. Для элементов E и $2^{\mathbf{N}}$ обозначение f_i соответствует $f(i)$, $f|_n = f|_{[0,n[}$. Если $\epsilon \in E$, то через $(\epsilon, 0)$ будем обозначать $\epsilon' \in E$ такое, что, если $|\epsilon| = n$, то $|\epsilon'| = n+1$, $\epsilon'|_n = \epsilon$ и $\epsilon'_n = 0$, аналогично $(\epsilon, 1)$. Определим $\hat{\Sigma} = \{H^{(2)}, S_o^{(2)}, S_1^{(2)}, \ldots\}$, $\Sigma = \hat{\Sigma} \cup \sigma$, где $\sigma = \{F^{(2)}\} \cup \{Q_\epsilon^{(1)} : \epsilon \in E\}$ — сигнатуры из предикатов. Построим теперь модели. Из элементов D образуем два множества: $A = \{f \in D :$ существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что $f_{n+i} = 1$ для всех $i \in \mathbf{N}\}$, $B = \{f \in D :$ существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что $f_{n+i} = 0$ для всех $i \in \mathbf{N}\}$. Для ясности договоримся, что A и B содержат элементы не самого D, а некоего его экземпляра, не пересекающегося с D. Через D_a и D_b обозначим два других экземпляра D, через H — некое двухэлементное множество $\{a, b\}$; $M = A \cup B \cup \cup D_a \cup D_b \cup H$, где все элементы объединения не пересекаются; M и будет носителем наших моделей.

Зададим значения предикатов: $H^{\hat{\mathcal{M}}} = \{a\} \times A \cup \{b\} \times B$, $S_n^{\hat{\mathcal{M}}} \subseteq D_a \times D_b \cup D_b \times D_a$, $\hat{\mathcal{M}} \models S_n(f, g) \Longleftrightarrow f|_n = g|_n$, $S_o^{\hat{\mathcal{M}}} = D_a \times D_b \cup D_b \times D_a$. Модель $\hat{\mathcal{M}}$ сигнатуры $\hat{\Sigma}$ определена. Модель $\mathcal{M}$ сигнатуры Σ построим как ее обогащение. Реализации $F^{\mathcal{M}} \subseteq A \times D_a \cup B \times D_b, \mathcal{M} \models F(x, y) \Leftrightarrow x$ и y совпадают как функции из $\mathbf{N}$ в $\{0, 1\}$ (будем обозначать это $x \equiv y$). Фактически F — это функция из A в D_a и из B в D_b, представляющая собой тождественное вложение, поэтому будем в дальнейшем употреблять обозначения вида $F(x)$, $\mathrm{im}F$ и т.д. Далее, $Q_\epsilon^{\mathcal{M}} \subseteq A \cup B$, $\mathcal{M} \models Q_\epsilon(f) \Leftrightarrow$ если $n = |\epsilon|$, то $f|_n = \epsilon$, $Q_\lambda^{\mathcal{M}} = A \cup B$. Модель $\mathcal{M}$ построена. Для ясности заметим, что A и B являются фактически экземплярами известной "ветвящейся" теории, для которых нет типа, который реализовался бы в обоих одновременно.

Образуем модели $\bar{\mathcal{M}}$ и $\check{\mathcal{M}}$ в соответствии с обозначениями предыдущего раздела.

Исследуем теперь определимые множества в $\hat{\mathcal{M}}$. Введем формулы: $G(x) =$ "$(\exists x)H(z, x)$", $T(x) =$ "$(\exists z)H(z, x)$", $R(y) =$ "$(\exists y_1)S_o(y, y_1)$"; через G, T и R обозначим соответственно $G(\hat{\mathcal{M}})$, $T(\hat{\mathcal{M}})$ и $R(\hat{\mathcal{M}})$, тогда $G = \{a, b\}$, $T = A \cup B$, $R = D_a \cup D_b$. Далее

$$S_n^+(y_1, y_2) = \text{"}S_n(y_1, y_2) \wedge \neg S_{n+1}(y_1, y_2)\text{"},$$

$$V_n(y_1, y_2) = \text{"}(\exists y)(S_n(y, y_1) \wedge S_n(y, y_2))\text{"},$$

$$V_n^+(y_1, y_2) = \text{"}V_n(y_1, y_2) \wedge \neg V_{n+1}(y_1, y_2)\text{"},$$

$$W(x_1, x_2) = \text{"}(\exists z)(H(z, x_1) \wedge H(z, x_2))\text{"}$$

— все это формулы $\hat{\Sigma}$.

ЛЕММА 8. *Каждая формула $\phi(\bar{v})$ языка $\hat{\Sigma}$ эквивалентна в $\hat{\mathcal{M}}$ конечной дизъюнкции формул вида:*

$$\bigwedge_{i\in I_1} T(v_i) \wedge \bigwedge_{i\in I_2} G(v_i) \wedge \bigwedge_{i\in I_3} R(v_i) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{(i,j)\in K_1} W^{\epsilon^1_{i,j}}(v_i,v_j) \wedge \bigwedge_{(i,j)\in K_2} H^{\epsilon^2_{i,j}}(v_i,v_j) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{(i,j)\in K_3} S^*_{n_{i,j}}(v_i,v_j) \wedge \bigwedge_{(i,j)\in K_4} V^*_{m_{i,j}}(v_i,v_j) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{(i,j)\in K_5} (v_i = v_j) \wedge \bigwedge_{(i,j)\in K_6} (v_i \neq v_j),$$

где, если $v = (v_1,\dots,v_n)$, то $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1,\dots,n\}$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\epsilon^k_{i,j} \in \{0,1\}$; $*$ — либо $+$, либо пусто, и K_i — некие множества пар индексов, возможно, пустые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полное доказательство этого сводится к механическому перебору вариантов, поэтому укажем лишь некоторые ключевые моменты. Введем понятие: если $f,g \in 2^{\mathbb{N}}$, то $f \equiv_n g$, если $f|_n = g|_n$. Отметим для ясности: $\hat{\mathcal{M}} \models V_n(f,g) \Leftrightarrow (f,g \in D_a$ или $f,g \in D_b)$ и $f \equiv_n g$, формула $T(v) \vee G(v) \vee R(v)$ тождественно-истинна в $\hat{\mathcal{M}}$, $\neg S_n(u,v) \sim \neg T(u) \vee \neg T(v) \vee T(u) \wedge T(v) \wedge (\bigvee_{i=0}^{n-1} S^+_i(v,u))$, аналогично для $\neg V_n(u,v)$.

Некоторая сложность возникает лишь в том случае, когда мы навешиваем на формулу квантор с переменной с индексом из I_3. Рассмотрим навешивание $(\exists v)$, после очевидных преобразований и отбрасывания простых случаев задача сводится к анализу формулы вида:

$$(\exists v)[R(v) \wedge \bigwedge_{i\in L_1} S^*_{n_i}(v,v_i) \wedge \bigwedge_{i\in L_2} V^*_{m_i}(v,v_i) \wedge \bigwedge_{i\in L_3} (v \neq v_i)].$$

Если $k = \max\{n_i : i \in L_1\} \cup \{m_i : i \in L_2\}$, f — решение для квантора и $g \equiv_k f$, то g — также решение для квантора (если f и g лежат в D_a или D_b одновременно). Поэтому часть $\bigwedge_{i\in L_3}(v\neq v_i)$, несущественна, так как число решений квантора бесконечно. Далее, заметим, что в $\hat{\mathcal{M}}$ верны эквивалентности такого вида:

при $n\geq m$:

$$A_n(v,u_1)\wedge B_m(v,u_2)\sim A_n(v,u_1)\wedge C_m(u_1,u_2),$$

$$A_n^+(v,u_1)\wedge B_m(v,u_2)\sim A_n^+(v,u_1)\wedge C_m(u_1,u_2);$$

при $n>m$:

$$A_n(v,u_1)\wedge B_m^+(v,u_2)\sim A_n(v,u_1)\wedge C_m^+(u_1,u_2),$$

$$A_n^+(v,u_1)\wedge B_m^+(v,u_2)\sim A_n^+(v,u_1)\wedge C_m^+(u_1,u_2),$$

$$A_n^+(v,u_1)\wedge B_n^+(v,u_2)\sim A_n^+(v,u_1)\wedge C_{n+1}(u_1,u_2),$$

где A,B — произвольные элементы из $\{S,V\}$, а C определяется так: при $A=S$ и $B=S$ $C=V$, $A=S$ и $B=V\Rightarrow$ $\Rightarrow C=S$, $A=V$ и $B=S\Rightarrow C=S$, $A=V$ и $B=V\Rightarrow C=$ $=V$. Применяя последовательно эти эквивалентности и вынося за квантор лишние части, мы сведем формулу к одному из видов: $(\exists v)(R(v)\wedge S_n(v,u))$, $(\exists v)(R(v)\wedge S_n^+(v,u))$ или $(\exists v)(R(v)\wedge V_n^*(v,u))$, а их анализ тривиален. □

Отношение на функциях $f\equiv_m g$, определяемое равенством $f\mid_m=g\mid_m$, $m\in\mathbf{N}$, можно рассматривать как двухместный предикат на D и на E_n, причем на E_n при $m\geq n$ оно вырождается в отношение равенства. Говоря, что некая функция сохраняет это отношение, будем подразумевать, что предикат сохраняется в смысле обычного изоморфизма моделей. Множество $A\subseteq D$ будем называть редким, если для любого $\epsilon\in E$ множество $D^\epsilon\setminus A$ бесконечно, где $D^\epsilon=\{f\in D: f\mid_n=\epsilon\}$.

ЛЕММА 9. *Пусть $n\in\mathbf{N}$, $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ и $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ — две последовательности элементов D со свойствами: множество членов каждой из них редко в D, для любых $i,j\in\mathbf{N}$ верно: $a_i=a_j\Leftrightarrow b_i=b_j$; для любых $m,i,j\in\mathbf{N}$, если $m\leq n$, то $a_i\equiv_m a_j\Leftrightarrow b_i\equiv_m b_j$. Тогда существует биекция $f: D\to D$,* *которая сохраняет отношения* $\equiv_m$ *для* $m = 0,\ldots,n$ *и переводит первую последовательность во вторую, т.е.* $f(a_k) = b_k$ *для всех* $k \in \mathbf{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала заметим истинность одного утверждения, которое можно доказать индукцией по n (доказательство проводить не будем): пусть $n \in \mathbf{N}$, $\bar r = (r_0,\ldots,r_m)$ и $\bar s = (s_0,\ldots,s_m)$ — два набора элементов E_n, имеющие свойство: для любых $i,j \le m$ и $k \le n$ верно: $r_i \equiv_k r_j \Leftrightarrow s_i \equiv_k s_j$. Тогда существует биекция $h : E_n \to E_n$ такая, что $h(\bar r) = \bar s$ и h сохраняет $\equiv_k$ на E_n для $k = 0,\ldots,n$.

Воспользуемся теперь этим фактом. Рассмотрим последовательность $\{a_k|_n\}_{k\in\mathbf{N}}$. Очевидно, что найдется $l \in \mathbf{N}$ такое, что, если $i \in \mathbf{N}$, то $a_{(l+i)}|_n \in \{a_0|_n, \ldots, a_l|_n\}$. Положим $\bar r = (a_0|_n,\ldots,a_l|_n)$ и $\bar s = (b_0|_n,\ldots,b_l|_n)$ — наборы из E_n. Они будут удовлетворять нужным условиям, и найдется $h : E_n \to E_n$ такое, что $h(a_i|_n) = b_i|_n$ для $i \le l$ и h сохраняет $\equiv_k$ для $k \le n$.

Далее, для каждого $\epsilon \in E_n$ построим биекцию $g_\epsilon : D^\epsilon \to D^{h(\epsilon)}$. Пусть $\{a_{i_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ — все члены последовательности $\{a_k\}$, лежащие в D^ϵ (если их конечное число, ситуация лишь упростится). Покажем, что тогда все b_{i_k} для $k \in \mathbf{N}$ будут лежать в $D^{h(\epsilon)}$. Элемент $a_{i_k} \in D^\epsilon \Rightarrow a_{i_k}|_n = \epsilon$. Существует $j \in \{0,\ldots,l\}$ такое, что $a_{i_k}|_n = a_j|_n$. Тогда $a_{i_k} \equiv_n a_j$ и $b_{i_k} \equiv_n b_j$, и $b_j|_n = h(a_j|_n) = h(\epsilon)$, поэтому $b_{i_k}|_n = h(\epsilon)$ и $b_{i_k} \in D^{h(\epsilon)}$. В силу редкости последовательностей $D_0^\epsilon = D^\epsilon \setminus \{a_{i_k} : k \in \mathbf{N}\}$ и $D_0^{h(\epsilon)} = D^{h(\epsilon)} \setminus \{b_{i_k} : k \in \mathbf{N}\}$ — бесконечные множества, и $a_{i_{k_1}} = a_{i_{k_2}} \Leftrightarrow b_{i_{k_1}} = b_{i_{k_2}}$ для всех $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$, поэтому нетрудно найти биекцию $g_\epsilon : D^\epsilon \to D^{h(\epsilon)}$, для которой верно: $g_\epsilon(a_{i_k}) = b_{i_k}$ при любом $k \in \mathbf{N}$.

Если теперь взять $f = \bigcup\limits_{\epsilon\in E_n} g_\epsilon$, то это будет, очевидно, биекция D на D, переводящая одну последовательность во вторую. Покажем, что она сохраняет нужное отношения. Пусть $m \le n$ и $x \equiv_m y$, тогда $(x|_n)|_m = (y|_n)|_m$, и $h(x|_n) \equiv_m h(y|_n)$ (по выбору h). По построению $f(x)|_n = h(x|_n)$, откуда $f(x) \equiv_m f(y)$. В обратную сторону доказательство аналогично, и нужная биекция построена. Лемма доказана. □

Пусть $f : D \to D$ — биекция. Укажем два способа преобразования ее в биекцию носителя модели M — в функции f' и f''. Функция f' определяется так: $f'|_{D_a} \equiv f$, $f'|_{D_b} \equiv f$, $f'(a) = a$, $f'(b) = b$. На множествах A и B функция f' однозначно определяется условием сохранения F.

Функция f'' определяется так: $f''(D_a) = D_b$, $f''(D_b) = D_a$, $f''(x) \equiv f(x)$ для любого $x \in D_a \cup D_b$, $f''(a) = b$, $f''(b) = a$ и $f''|_A$, $f''|_B$ вновь однозначно определяются условием сохранения F.

Легко видеть, что для любой f, являющейся биекцией из D на D, функции f' и f'' будут сохранять H, F и P (этот символ будет введен позднее), сохранение же остальных предикатов будет зависеть от выбора f. Заметим лишь очевидный факт: если f сохраняет на D отношение $\equiv_m$ для $m \in \mathbf{N}$, то f' и f'' сохраняют предикаты S_m.

Отметим, что данная конструкция в основном нужна будет при рассмотрении следующего примера, в котором множества A и B отличаются от данных, но приведенное выше определение f' и f'' дословно так же можно применить и в том примере, указанные свойства при этом сохранятся. Поэтому будем пользоваться функциями f' и f'' и в будущем, не упоминая о различиях специально.

Исследуем теперь язык $\hat{\Sigma}$. Для $\epsilon \in E$ положим $D_a^\epsilon = \{f \in D_a : f|_n = \epsilon$, если $n = |\epsilon|\}$, множество D_b^ϵ определим той же формулой с заменой a на b. Пусть $p_o(u, v) = \{S_n(u, v) : n \in \mathbf{N}\}$ — множество формул $\hat{\Sigma}$, $P = \{(f, g) \in M^2 : \hat{\mathcal{M}} \models p_o(f, g)\}$. Тогда $P = \{(f, g) \in D_a \times D_b \cup D_b \times D_a : f \equiv g\}$.

ЛЕММА 10. *Множество P — реализация неглавного типа $\hat{\Sigma}$ в $\hat{\mathcal{M}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что P — неразличимое множество, т.е. для любых f', g', f'', g'', если $\bar{c} = (f', g') \in P$ и $\bar{d} = (f'', g'') \in P$, то $(\hat{\mathcal{M}}, \bar{c}) \equiv (\hat{\mathcal{M}}, \bar{d})$. Для этого достаточно при любом $n \in \mathbf{N}$ построить биекцию $h : M \to M$, такую, что h сохраняет сигнатуру $\{H, S_o, \ldots, S_n\}$ и $h(\bar{c}) = \bar{d}$. По лемме 9 существует $h_o : D \to D$ такое, что h_o сохраняет $\equiv_k$ на D для $k = 0, \ldots, n$, $h_o(f') = f''$ и $h_o(g') = g''$. Возможны два варианта: f' и f'' лежат в одном D_a или D_b или один из элементов в D_a, а другой в D_b. Взяв в первом случае h'_o, а во втором h''_o, мы получим нужную биекцию. Тем самым P — реализация некоторого типа $\hat{\Sigma}$ в $\hat{\mathcal{M}}$.

Докажем теперь, что P реализация неглавного типа. Предположим, что $\phi(u, v)$ — формула $\hat{\Sigma}$ такая, что $\bar{d} \in P \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \hat{\mathcal{M}} \models \phi(\bar{d})$. Пусть $n = \max\{n' : S_{n'}$ входит в $\phi\}$, рассмотрим биекцию $h : M \to M$, такую, что h тождественна на $T \cup G \cup D_b$, а на D_a обладает свойством: если $\epsilon \in E_n$, то $h(D_a^{(\epsilon,o)}) = D_a^{(\epsilon,1)}$ и $h(D_a^{(\epsilon,1)}) = D_a^{(\epsilon,o)}$. Тогда h будет сохранять язык $\{H, S_o, \ldots, S_n\}$ и, следовательно, формулу ϕ, но при этом обладать свойством: если $(f, g) \in P$, то $(h(f), h(g)) \notin P$ — противоречие. Тем самым P — реализация неглавного типа. □

Из доказанного следует, что в $\bar{\Sigma}$ существует предикат $P^{(2)}$ такой, что $\bar{d} \in P \Leftrightarrow \hat{\mathcal{M}} \models P(\bar{d})$.

ЛЕММА 11. *Все символы $\bar{\Sigma}$ можно представить как конечные формулы в языке $\hat{\Sigma} \cup \{P\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(v_1, \ldots, v_n) = p(\bar{v})$ — некий тип $\hat{\Sigma}$, реализующийся в $\hat{\mathcal{M}}$. Пусть $I = \{1, \ldots, n\}$, $I_1 =$ $= \{i \in I : T(v_i) \in p\}, I_2 = \{i \in I : G(v_i) \in p\}, I_3 = \{i \in I :$ $R(v_i) \in p\}$, тогда $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$ и $I_i \cap I_j = \emptyset$. Для некоторых $(i, j) \in I^2$ определим $A_{i,j}$ — множество формул, которые попарно-несовместны в $\hat{\mathcal{M}}$, и в качестве $\theta_{i,j}(v_i, v_j)$ выберем ту $\phi(v_i, v_j) \in A_{i,j}$, которая лежит в p. Для $(i, j) \in I_1^2$ зададим $A_{i,j} = \{v_i = v_j,\ W(v_i, v_j) \wedge (v_i \neq v_j),\ \neg W(v_i, v_j)\}$; для $(i, j) \in I_2 \times I_1$ зададим $A_{i,j} = \{H(v_i, v_j), \neg H(v_i, v_j)\}$; для $(i, j) \in I_2^2$ зададим $A_{i,j} = \{v_i = v_j, v_i \neq v_j\}$; для $(i, j) \in I_3^2$ зададим $A_{i,j} = \{v_i = v_j,\ V_n^+(v_i, v_j),\ S_n^+(v_i, v_j),\ P(v_i, v_j) : n \in \mathbf{N}\}$.

В последнем случае $P(v_i, v_j)$ выбирается тогда, когда невозможны остальные варианты (это, очевидно, будет тогда, когда $S_n(v_i, v_j) \in p$ для всех $n \in \mathbb{N}$). Кроме того, для всех $i \in I$ в качестве $\theta_i(v_i)$ выберем формулу из $\{T(v_i), G(v_i), R(v_i)\}$ аналогичным образом. Положим $\theta(\bar{v}) =$ $= " \bigwedge\limits_{i,j} \theta_{i,j}(v_i, v_j) \wedge \bigwedge\limits_{i} \theta_i(v_i)"$. Очевидно, что если $\hat{\mathcal{M}} \models p(\bar{d})$, то $\check{\mathcal{M}} \models \theta(\bar{d})$. Нетрудно проверить и обратное: если $\hat{\mathcal{M}} \models$ $\models p(\bar{d})$ и $\check{\mathcal{M}} \models \theta(\bar{e})$, то $(\check{\mathcal{M}}, \bar{d}) \equiv (\check{\mathcal{M}}, \bar{e})$, поскольку формулы в $\hat{\mathcal{M}}$ уже проанализированы. Тем самым $\hat{\mathcal{M}} \models p(\bar{d}) \Leftrightarrow \check{\mathcal{M}} \models$ $\models \theta(\bar{d})$. Нужное доказано. □

Теперь укажем те свойства построенных моделей $\hat{\mathcal{M}}$ и $\check{\mathcal{M}}$, которые понадобятся в дальнейшем.

ЛЕММА 12. *Верна следующая эквивалентность:* $(\check{\mathcal{M}}, a) \equiv$ $\equiv (\check{\mathcal{M}}, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для этого достаточно, чтобы для любого $\check{\Sigma}_o \subseteq_f \check{\Sigma}$ существовала $h : M \to M$ — биекция, сохраняющая $\check{\Sigma}_o$ и переводящая a в b. Все символы из $\check{\Sigma}$ выражаются в $\check{\mathcal{M}}$ через $\hat{\Sigma}$ и P, а конечные формулы содержат конечное число символов из $\hat{\Sigma}$, поэтому можно без ограничения общности считать, что $\check{\Sigma}_o = \{H, S_o, \ldots, S_n, P, F\} \cup \{Q_\epsilon : \epsilon \in E, |\epsilon| \le n\}, n \in \mathbb{N}$. Пусть $A^n = \{Q_\epsilon(A) : \epsilon \in E_n\}$, аналогично $B^n = \{Q_\epsilon(B) : \epsilon \in E_n\}$. Тогда A^n — множество из 2^n элементов, каждый из которых счетное множество, и это же верно для B^n. Следовательно, существует биекция $h_o : A \to B$ такая, что если $\epsilon \in E_n$, то $h_o(Q_\epsilon(A)) = Q_\epsilon(B)$. Пусть $\epsilon \in E_n$, тогда отображение h_o порождает единственное отображение $h_2^\epsilon : F(A) \cap D_a^\epsilon \to$ $\to F(B) \cap D_b^\epsilon$, если наложить условие $h_2^\epsilon \circ F = F \circ h_o$. Те элементы D_a^ϵ, которые связаны отношением P с $F(B) \cap D_b^\epsilon$, образуют в точности множество $D_a^\epsilon \setminus F(A)$, поэтому условие сохранения предиката P обуславливает единственное отображение $h_3^\epsilon : D_a^\epsilon \setminus F(A) \to D_b^\epsilon \setminus F(B)$. Если теперь определить $h_2^\epsilon \cup h_3^\epsilon = h_1^\epsilon : D_a^\epsilon \to D_b^\epsilon$ и $h_1 = \bigcup\limits_{\epsilon \in E_n} h_1^\epsilon$, то получим биекцию $h_1 : D_a \to D_b$. Определим теперь $h : M \to M$ как объединение этих функций: $h|_A = h_o$, $h|_B = h_o^{-1}$, $h|_{D_a} =$

$= h_1$, $h|_{D_b} = h_1^{-1}, h(a) = b$, $h(b) = a$. Тогда из построения очевидно, что h искомое отображение. $\Box$

Отметим еще один факт для $\hat{\mathcal{M}}$. Пусть $p(u,v)$ — тип $\hat{\Sigma}$, реализацией которого в $\hat{\mathcal{M}}$ является множество P. Тогда верно: $\mathrm{Th}(\hat{\mathcal{M}}), S_o(u,v), S_1(u,v), \ldots \vdash p(u,v)$. Это с очевидностью следует из проведенного анализа формул $\hat{\mathcal{M}}$, так как всякая формула, входящая в $p(u,v)$ будет эквивалентна дизъюнкции, один из членов которой будет иметь вид: $R(u) \wedge R(v) \wedge (u \neq v), R(u) \wedge R(v) \wedge S_n(u,v)$ или $R(u) \wedge R(v) \wedge S_n(u,v) \wedge (u \neq v)$.

Пусть $T_o = \mathrm{Th}(\check{\mathcal{M}})$ — полная теория счетного языка. Выделим те ее элементы, которые потребуются ниже:

$T_o \vdash (\forall x)(Q_\epsilon(x) \leftrightarrow Q_{(\epsilon,o)}(x) \vee Q_{(\epsilon,1)}(x))$ для $\epsilon \in E$,

$T_o \vdash (\exists!^2 x)G(x)$,

$T_o \vdash (\forall x \forall y \forall z)(H(x,z) \wedge H(y,z) \rightarrow x = y)$,

$T_o \vdash (\forall x)[G(x) \rightarrow (\exists y)(H(x,y) \wedge Q_\lambda(y))]$,

$T_o \vdash (\forall x)[Q_\lambda(x) \rightarrow (\exists y)F(x,y)]$,

$T_o \vdash (\forall x \forall y)[G(x) \wedge G(y) \rightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y))]$ для любой $\phi(x)$-формулы $\check{\Sigma}$.

Пусть формула $\theta(x,y,z,t) = "\neg W(x,y) \wedge F(x,z) \wedge F(y,t)"$, тогда

$T_o \vdash (\forall x \forall y \forall z \forall t)(\theta(x,y,z,t) \rightarrow \neg P(z,t))$,

$T_o \vdash (\forall x \forall y \forall z \forall t)[Q_\epsilon(x) \wedge Q_\epsilon(y) \wedge \theta(x,y,z,t) \rightarrow S_n(z,t)]$ для любого $\epsilon \in E$ и $n = |\epsilon|$.

Символы G и W в этом перечне определяются так же, как и раньше: $G(x) = "(\exists y)H(x,y)"$ $W(x,y) = "(\exists z)(H(z,x) \wedge \wedge H(z,y))"$.

Заметим еще, что элементы σ просты относительно $\hat{\Sigma}$ в $\mathcal{M}$. Простота Q_ϵ для $\epsilon \in E_n$ следует из того, что обмен местами двух элементов из A будет автоморфизмом $\hat{\mathcal{M}}$, также и для B, а $Q_\epsilon^{\mathcal{M}} = Q_\epsilon^{\mathcal{M}} \cap A \cup Q_\epsilon^{\mathcal{M}} \cap B$. Что касается простоты F, то достаточно доказать, что $A \times D_a$ и $B \times D_b$ неразличимые множества в $\hat{\mathcal{M}}$. Пусть $(x,f),(y,g) \in \in A \times D_a$. По лемме 9 для любого $n \in \mathbb{N}$ существует биекция $h_o : D \rightarrow D$, сохраняющая $\equiv_k$ для $k = 0,\ldots,n$ и переводящая f в g. Для такой h_o можно построить биекцию $h : M \to M$ так:

$$h\mid_{H \cup A \cup B} = \mathrm{Id}_{H \cup A \cup B},$$

$$h(D_a) = D_a,\ h\mid_{D_a} \equiv h_o,\ h(D_b) = D_b,\ h\mid_{D_b} \equiv h_o.$$

Она будет сохранять $\{H, S_o, \ldots, S_n\}$ и переводить f в g. Из существования таких биекций следует, что (x, f) и (x, g) неразличимы, неразличимость же (x, g) и (y, g) вытекает из сказанного выше, и поэтому $A \times D_a$ неразличимо, аналогично $B \times D_b$. Докажем теперь лемму, из которой будет следовать истинность теоремы 2. Пусть $\mathcal{M}^*$ — модель Σ^*, существующая по теореме 1, $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}^*)^1$ — модель Σ', $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M}')$.

ЛЕММА 13. *У теории T нет однородных стандартных относительно Σ^* моделей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем: $M \subseteq |\mathcal{M}^*|, \mathrm{Id}_M : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}^*$ и $\mathrm{Id}_M : \check{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}'$ — специальные вложения. Если $\phi(\bar{x})$ — формула $\check{\Sigma}$, то через $\phi(\bar{x})'$ будем обозначать ту формулу Σ', для которой $\phi'_{\bar{x}}(\mathcal{M}') = \phi_{\bar{x}}(\check{\mathcal{M}})$. Очевидно, что если $\phi(\bar{x})$ формула $\hat{\Sigma}$, то можно считать, что $\phi(\bar{x})'$ формула Σ^*, и если $P \in \bar{\Sigma} \setminus \hat{\Sigma}$, то $P(\bar{x})' = P'(x) \in \Sigma' \setminus \Sigma^*$. Нетрудно понять, что в таком случае

$$(\phi \wedge \psi)(\bar{x})' \sim \phi(\bar{x})' \wedge \psi(\bar{x})',$$

$$(\phi \vee \psi)(\bar{x})' \sim \phi(\bar{x})' \vee \psi(\bar{x})',$$

$$(\neg\phi)(\bar{x})' \sim \bigwedge_i \alpha(x_i) \wedge \neg\phi(\bar{x})',$$

$$((\exists y)\psi)(\bar{x})' \sim (\exists y)\psi(y, \bar{x})',$$

где под " $\sim$ " понимается эквивалентность в $\mathcal{M}'$, а через $\alpha(x)$ обозначается формула Σ^* такая, что $\alpha(\mathcal{M}') = M$. Для ясности заметим, что если $\phi = \phi(y)$, то $\phi(x, y)' \sim \alpha(x) \wedge \wedge\phi(y)'$. Из этого нетрудно вывести, что для T будут верны те указанные ранее свойства, которые верны для T_o, с заменой всех символов на их аналоги со штрихом. То есть: пусть Q'_c, H', F' — формулы для элементов $\check{\Sigma}$, тогда $G'(x) \sim$ "$(\exists y)H'(x, y)$", $\theta'(x, y, z, t) \sim$ "$\neg W'(x, y) \wedge$

$\wedge F'(x,z) \wedge F'(y,t)$" и т.д., и $T \vdash (\forall x)[Q'_\epsilon(x) \leftrightarrow Q'_{(\epsilon,o)}(x) \vee \vee Q'_{(\epsilon,1)}(x)]$ для $\epsilon \in E$, и т.д. Особого внимания требует лишь то, что $T \vdash (\forall x \forall y)[G'(x) \wedge G'(y) \to (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y))]$ для всех формул $\psi(z)$ языка Σ', но это легко выводится из специальности вложения.

Пусть $\mathcal{N}' \models T$ — однородная модель. Покажем, что она не стандартная. Существует ровно два элемента $\mathcal{N}'$, удовлетворяющие формуле $G'(x)$. Обозначим их a и b. Тогда $(\mathcal{N}', a) \equiv (\mathcal{N}', b)$. Существует элемент a_o из $\mathcal{N}'$ такой, что $\mathcal{N}' \models H'(a, a_o) \wedge Q'_\lambda(a_o)$. В таком случае, в силу однородности $\mathcal{N}'$, существует b_o такое, что $(\mathcal{N}', a, a_o) \equiv \equiv (\mathcal{N}', b, b_o)$. Можно указать последовательность ϵ_k из E такую, что $|\epsilon_k| = k$ и $\mathcal{N}' \models Q'_{\epsilon_k}(a_o)$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Тогда $\mathcal{N}' \models H'(b, b_o)$ и $\mathcal{N}' \models Q'_{\epsilon_k}(b_o)$ для любого k. Покажем, что $\mathcal{N}' \models \neg W'(a_o, b_o)$. Если $\mathcal{N}' \models W'(a_o, b_o)$, то существует d такое, что верно $H'(d, a_o) \wedge H'(d, b_o)$. В таком случае $\mathcal{N}' \models G'(d)$, и либо $d = a$, либо $d = b$. Если $d = a$, то условие $H'(a, b_o) \wedge H'(b, b_o)$ влечет $a = b$, аналогично для $d = b$ — противоречие.

Далее, существуют a_1 и b_1, для которых верно: $F'(a_o, a_1)$ и $F'(b_o, b_1)$; тогда $\mathcal{N}' \models \theta'(a_o, b_o, a_1, b_1)$. Из этого вытекает, что $\mathcal{N}' \models S'_k(a_1, b_1)$ для всех $k \in \mathbf{N}$ и $\mathcal{N}' \models \models \neg P'(a_1, b_1)$. Так как $P' \in \Sigma' \setminus \Sigma^*$, существует $p'(x,y)$ — неглавный тип Σ^*, реализация которого в $\mathcal{M}^*$ совпадает с $(P')^{\mathcal{M}'}$. Для окончания доказательства достаточно показать, что $T, S'_o(x,y), S'_1(x,y), \ldots \vdash p'(x,y)$, из этого будет следовать, что $\mathcal{N}' \models p'(a_1, b_1)$, и связь между предикатом и типом будет нарушена. А эта выводимость ясна из следующих рассуждений. Пусть $\phi_o(x,y) \in \in p'(x,y)$. Положим $\phi(x,y) =$ "$\phi_o(x,y) \wedge \alpha(x) \wedge \alpha(y)$". Тогда $\phi_{(x,y)}(\mathcal{M}^*) \supseteq (P')^{\mathcal{M}'}$, и если $\bar{\phi}(x,y)$ — формула Σ такая,что $\bar{\phi}(x,y)' \sim \phi(x,y)$, то $\bar{\phi}_{(x,y)}(\hat{\mathcal{M}}) \supseteq P^{\hat{\mathcal{M}}}$. В таком случае существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что $T_o \vdash (\forall x \forall y)[\bigwedge\limits_{i=0}^{n} S_n(x,y) \to \bar{\phi}(x,y)]$, и $T \vdash (\forall x \forall y)[\bigwedge\limits_{i=0}^{n} S'_n(x,y) \to \phi(x,y)]$. Кроме того, $T \vdash \phi \to \phi_o$, из чего следует нужное. □

4. Модель, не имеющая стандартных однородных расширений

Известен факт, состоящий в том, что если $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_0)^1$ модель счетного языка и $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ атомная, то у $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ есть атомная модель, которая будет стандартной (и даже вида $(\mathcal{N}_0)^1$). Поэтому атомность теории обеспечивает существование однородных стандартных моделей. Но тем не менее и для стандартных моделей с атомными теориями будет неверно свойство, истинное для моделей вообще, а именно, что любая модель элементарно вкладывается в однородную. Это показывает следующая

ТЕОРЕМА 3. *Существует $\mathcal{M}^*$ — счетная модель счетного языка Σ^* такая, что $(\mathcal{M}^*)^1$ обладает атомной теорией и не имеет стандартных относительно Σ^* однородных расширений.*

Как и в предыдущем случае, определению такой модели будет посвящен весь этот раздел, и построение будет осуществляться сходным образом — через определение шестерки моделей $(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{M}}, \bar{\mathcal{M}}, \check{\mathcal{M}}, \mathcal{M}^*, \mathcal{M}')$, связанных теми же соотношениями, что и в теореме 1.

Для построения модели видоизменим некоторые множества из предыдущего раздела. Обозначим некоторые элементы D. Положим $a_i^k = 0$ при $i < k$, $a_k^k = 1$ и $a_i^k = 0$ при $i > k$, $a_i^\infty = 0$ для всех $i \in \mathbf{N}$, $b_i^k = 0$ при $i < k$ и $b_i^k = 1$ при $i \geq k$. Получим набор функций:

$$a^k = (\underbrace{0\ldots0}_{k}100\ldots),$$

$$b^k = (\underbrace{0\ldots0}_{k}111\ldots),$$

$$a^\infty = (000\ldots).$$

Считая, что a^i и b^j элементы еще одного экземпляра D, отличного от D_a и D_b, положим $A = \{a^0, a^1, \ldots\} \cup \{a^\infty\}$ и $B = \{b^0, b^1, \ldots\}$. Теперь, так же как и в разделе 3, образуем носитель модели $M = A \cup B \cup D_a \cup D_b \cup H$, где все элементы объединения не пересекаются, и аналогично прошлому зададим на нем ту же сигнатуру $\hat{\Sigma} = \{H^{(2)}, S_0^{(2)}, S_1^{(2)}, \ldots\}$, что и раньше: $H^{\hat{\mathcal{M}}} = \{a\} \times A \cup \{b\} \times B$, $S_n^{\hat{\mathcal{M}}} \subseteq D_a \times D_b \cup \cup D_b \times D_a$; $S_n^{\hat{\mathcal{M}}}$ определяется по тому же правилу. Получим модель $\hat{\mathcal{M}}$. Теперь обогатим ее сигнатурой σ до $\Sigma = \hat{\Sigma} \cup \sigma$. Положим $\sigma = \{F^{(2)}\} \cup \{P_n^{(1)} : n \in \mathbf{N}\}$ — предикатный язык, $P_n^{\mathcal{M}} = \{a^k \in A : k \geq n\} \cup \{b^k \in B : k \geq n\}$, где через a^k обозначается также и a^∞ с естественным предположением, что $i < \infty$ для $i \in \mathbf{N}$. Как и в прошлой модели, $F^{\mathcal{M}}$ определим как функцию тождественного вложения A в D_a и B в D_b, т.е. $F^{\mathcal{M}} \subseteq A \times D_a \cup B \times D_b$ и $\mathcal{M} \models F(f,g) \Leftrightarrow f \equiv g$. Модель $\mathcal{M}$ построена.

Нетрудно заметить, что $\hat{\mathcal{M}}$ в прошлом случае и $\hat{\mathcal{M}}$ сейчас изоморфны, причем существует изоморфизм, тождественный на $D_a \cup D_b \cup H$. Это означает, что почти все из того, что мы доказали для $\hat{\mathcal{M}}$ в прошлом случае, будет верно и теперь, и мы используем это в будущем.

В соответствии с прошлыми обозначениями положим $\bar{\mathcal{M}} = (\hat{\mathcal{M}})^1$ и $\check{\mathcal{M}}$ — обогащение $\bar{\mathcal{M}}$ сигнатурой σ. Тогда из изоморфности $\hat{\mathcal{M}}$ следует, что в языке $\bar{\Sigma}$ существует символ $P = P^{(2)}$ такой, что $P^{\bar{\mathcal{M}}} = \{(f,g) \in D_a \times D_b \cup D_b \times D_a : f \equiv g\}$ и все остальные символы $\bar{\Sigma}$ выражаются через $\hat{\Sigma} \cup \{P\}$ конечными формулами.

Будем говорить, что элемент b выражается через набор $\bar{a}$ в модели $\mathcal{N}$, если существует формула $\phi(\bar{x}, y)$ такая, что $\mathcal{N} \models (\forall \bar{x} \exists! y)\phi(\bar{x}, y)$ и $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}, b)$. Будем называть атомным набор $\bar{a}$ в $\mathcal{N}$, если его тип в этой модели главный, т. е. он лежит в реализации атомной формулы.

ЛЕММА 14. *Пусть $\bar{a}$ набор из $\check{\mathcal{M}}$ такой, что a^∞ не входит в него ни как элемент A, ни как элемент D_a, ни как элемент D_b. Тогда $\bar{a}$ атомный в $\check{\mathcal{M}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно доказать, что если b выражается через $\bar{a}$ в $\check{\mathcal{M}}$ и $\bar{a}$ атомный, то $(\bar{a}, b)$ тоже атомный. Очевидно и то, что поднабор атомного набора вновь атомный. Поэтому можно считать, что $\bar{a}$ имеет вид $(a, b, x_o, \ldots, x_m, y_o, \ldots, y_m)$, где $x_i \in D_a$ и $y_i \in D_b$. Поскольку A и B как части модели нам пока не понадобятся, до конца доказательства леммы будем считать, что A и B обозначают соответствующие подмножества $2^{\mathbf{N}}$.

Введем для элементов $2^{\mathbf{N}}$ две характеристики. Если $f, g \in 2^{\mathbf{N}}$, то

$$\beta(f,g) = \begin{cases} \infty, \text{ если } f \equiv g, \\ k, \text{ если } f \equiv_k g \text{ и } f \not\equiv_{k+1} g \end{cases}$$

и $\gamma(f) = \beta(f, a^\infty)$. Последняя характеристика — фактически число нулей в "начале" f. В силу того, что a^∞ не входит в $\bar{a}$, $\gamma(x_i) \le k_o$ и $\gamma(y_i) \le k_o$ для некоторого $k_o \in N$ и $i = 0, \ldots, m$. Поэтому некоторым количеством добавлений новых элементов и отбрасыванием тех, которые выражаются через остальные, можно добиться, что $\bar{a}$ приобретет свойства: $x_i \equiv a^i$ и $y_i \equiv b^i$ для $i = 0, \ldots, k-1$, x_i и y_i не лежат в множестве $A \cup B$ для $i = k, \ldots, m$, $x_i \not\equiv y_j$ для любых $i, j \le m$, $x_i \not\equiv x_j$ и $y_i \not\equiv y_j$ при $i \ne j$ и для $i \le m$ верно, что $\gamma(x_i) < k$, и $\gamma(y_i) < k$, и доказательство не утратит общности.

Определим формулы:

$$H'(x,y) = "(\exists z_1 \exists z_2)[H(x, z_1) \wedge F(z_1, z_2) \wedge V_o(z_2, y)]",$$

$$W(x) = "(\exists y)[F(y,x) \vee (\exists z)(P(x,z) \wedge F(y,z))]",$$

$$W_k(x) = "(\exists y)[F(y,x) \wedge P_k(y) \wedge \neg P_{k+1}(y)]",$$

$$N_k(x) = "(\exists x_1)[V_k(x, x_1) \wedge W_k(x_1)]",$$

$$N_k^+(x) = "N_k(x) \wedge \neg N_{k+1}(x)" \text{ для } k \in N.$$

Тогда $H'_{(x,y)}(\check{\mathcal{M}}) = \{a\} \times D_a \cup \{b\} \times D_b$, $W_k(\check{\mathcal{M}}) = \{F(a^k), F(b^k)\}$, $N_k^+(\check{\mathcal{M}}) = \{x \in D_a \cup D_b : \gamma(x) = k\}$ и $W(\check{\mathcal{M}}) = \{x \in \in D_a \cup D_b : x \in A \cup B\}$. Укажем теперь формулу, которая будет атомной для $\bar{a}$:

$$\phi(z_1, z_2, r_o, \ldots, r_m, t_o, \ldots, t_m) = " \bigwedge_{i=o}^{m} H'(z_1, r_i) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{i=o}^{m} H'(z_2, t_i) \wedge (z_1 \neq z_2) \wedge \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} V^+_{\beta(x_i,x_j)}(r_i, r_j) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} V^+_{\beta(y_i,y_j)}(t_i, t_j) \wedge \bigwedge_{i,j=1}^{m} S^+_{\beta(x_i,y_j)}(r_i, t_j) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{i=o}^{m} N^+_{\gamma(x_i)}(r_i) \wedge \bigwedge_{i=o}^{m} N^+_{\gamma(y_i)}(t_i) \wedge \bigwedge_{i=o}^{k-1} W_i(r_i) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{i=o}^{k-1} W_i(t_i) \wedge \bigwedge_{i=k}^{m} \neg W(r_i) \wedge \bigwedge_{i=k}^{m} \neg W(t_i)".$$

Набор $\bar{a}$, очевидно, удовлетворяет этой формуле, и для доказательства леммы достаточно показать, что он атомный. Это означает: если $\check{\mathcal{M}} \models \phi(\bar{b})$, то $(\check{\mathcal{M}}, \bar{a}) \equiv \equiv (\check{\mathcal{M}}, \bar{b})$. Для доказательства этого для каждого $\check{\Sigma}_o \subseteq_f \check{\Sigma}$ построим автоморфизм $\check{\mathcal{M}}|_{\check{\Sigma}_o}$, переводящий $\bar{a}$ в $\bar{b}$.

Можно считать: $\check{\Sigma}_o = \{P, H, F\} \cup \{P_o, \ldots, P_n\} \cup \{S_o, \ldots \ldots, S_n\}$, где $n \in \mathbf{N}$ и $n \geq k$. Автоморфизм будем получать с помощью ранее указанного способа, строя преобразования D. Пусть $\bar{b} = (a', b', x'_o, \ldots, x'_m, y'_o, \ldots, y'_m)$. Тогда есть два варианта: $a' = a$ и $b' = b$ или $a' = b$ и $b' = a$. Рассмотрим лишь второй случай, первый значительно проще и разбирается аналогично.

Для построения нужно указать две последовательности из D. Укажем их для наглядности просто перечислением членов: $(x_o, \ldots, x_m, y_o, \ldots, y_m, a^o, b^o, \ldots, a^n, b^n, a^\infty, b^{n+1}, a^{n+1}, b^{n+2}, a^{n+2}, \ldots)$ и $(x'_o, \ldots, x'_m, y'_o, \ldots, y'_m, b^o, a^o, \ldots, b^n, a^n, b^{n+1}, a^\infty, b^{n+2}, a^{n+1}, b^{n+3}, a^{n+2}, \ldots)$.

Теперь для завершения доказательства осталось убедиться, что они удовлетворяют нужным условиям относительно отношений $\equiv_l$ для $l = 0, \ldots, n$ и равенства. Из построения ϕ следует, что $x'_i = b^i$ и $y'_i = a^i$ для $i = 0, \ldots, k-1$, $x'_i, y'_i \notin A \cup B$ для $i = k, \ldots, m$, поэтому условия леммы 9 для равенства выполняются. Для обоснования условий для эквивалентностей $\equiv_l$ достаточно посчитать β для пар элементов. По построению ϕ верно равенство $\beta(x_i, y_j) = \beta(x'_i, y'_j)$ при $i, j \leq m$, аналогично для $\beta(x_i, x_j)$ и $\beta(y_i, y_j)$. Для $A \cup B$: $\beta(a^i, a^j) = \beta(a^i, b^j) = \beta(b^i, b^j) = = min\{i, j\}$ при $i \neq j$, $\beta(a^i, b^i) = i + 1$. Рассмотрим теперь $\beta(x_i, a^j)$. Если $j < k$, то $a^j = x_j$ и $\beta(x_i, a^j) = \beta(x_i, x_j) = = \beta(x'_i, x'_j) = \beta(x'_i, b^j)$. Если $j \geq k$, то $\beta(x_i, a^j) < k$. Предположим, что это не так: $\beta(x_i, a^j) \geq k$, $a^j \equiv_k a^\infty \Rightarrow x_i \equiv_k a^\infty$ и $\gamma(x_i) \geq k$. Противоречие с условием. Если $\beta(x_i, a^j) < k$, то $\beta(x_i, a^j) = \beta(x_i, a^\infty) = \gamma(x_i)$, так как $a^j \equiv_k a^\infty$. По аналогичным соображениям (так как $\gamma(x'_i) = \gamma(x_i) < k$) при $j \geq k$ выполняется равенство $\beta(x'_i, b^j) = \gamma(x'_i)$, и случай с $\beta(x_i, a^j)$ разобран. Варианты $\beta(x_i, b^j)$, $\beta(y_i, a^j)$ и $\beta(y_i, b^j)$ анализируются подобным образом.

По лемме 9 существует $f : D \to D$, переводящая первую последовательность во вторую и имеющая нужные свойства, взяв f'', получим искомый автоморфизм, в чем нетрудно убедиться. □

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{a}_t$ для $t \in \mathbf{N}$ — наборы одинаковой длины в модели $\mathcal{N}$. Будем говорить, что $\bar{a}_t \to \bar{a}$ при $t \to \infty$ в $\mathcal{N}$, если для любой формулы $\phi(\bar{x})$ найдется t_o такое, что для всех $t \geq t_o$ верно: $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}_t) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$. Несложно доказать, что $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ атомная, если для любого $\bar{a}$ из $\mathcal{N}$ существует последовательность $\{\bar{a}_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ такая, что $\bar{a}_t \to \bar{a}$ в $\mathcal{N}$ и $\bar{a}_t$ — атомные наборы для $t \in \mathbf{N}$. Опираясь на это, докажем атомность теории построенной модели.

ЛЕММА 15. *Теория* $\mathrm{Th}(\breve{\mathcal{M}})$ *является атомной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{a}$ — некий набор элементов из M. Покажем, что если для $\bar{a}$ существует последовательность атомных наборов, сходящаяся к ней, и b выражается через $\bar{a}$, то такая последовательность есть и для $(\bar{a}, b)$. Пусть $\bar{a}_t \to \bar{a}$ при $t \to \infty$, $\bar{a}_t$ атомные, и $\xi(\bar{x}, y)$ — формула такая, что $\breve{\mathcal{M}} \models (\forall \bar{x} \exists ! y)\xi(\bar{x}, y)$ и $\breve{\mathcal{M}} \models \xi(\bar{a}, b)$. Для каждого $t \in \mathbf{N}$ найдем b_t такое, что $\breve{\mathcal{M}} \models \xi(\bar{a}_t, b_t)$, и покажем, что $(\bar{a}_t, b_t) \to (\bar{a}, b)$. Пусть $\psi(\bar{x}, y)$ такая формула, что $\breve{\mathcal{M}} \models \psi(\bar{a}, b)$. Положим $\phi(\bar{x}) =$ "$(\exists y)(\psi(\bar{x}, y) \wedge \xi(\bar{x}, y))$". Тогда

$\check{\mathcal{M}} \models \phi(\bar{a})$ и существует t_o такое, что $\check{\mathcal{M}} \models \phi(\bar{a}_t)$ для $t \geq t_o$, и, очевидно, $\check{\mathcal{M}} \models \psi(\bar{a}_t, b_t)$ в силу свойств ξ. Нужное свойство доказано.

Поэтому, как и в лемме 14, мы можем без ограничения общности считать, что $\bar{a} = (a, b, x_o, \ldots, x_m, y_o, \ldots, y_m, a^\infty)$, где $x_i \in D_a$, $y_i \in D_b$ при $i = 0, \ldots, m$, $a^\infty \in D_a$, $x_i = a^i$, $y_i = b^i$ для $i < k$, $x_i, y_i \notin A \cup B$ при $i = k, \ldots, m$ (в этом доказательстве вновь считаем, что A, B подмножества $2^{\mathbf{N}}$), для $i, j \leq m, i \neq j$ верно $x_i \not\equiv x_j$ и $y_i \not\equiv y_j$, для $i, j \leq m$ верно $x_i \not\equiv y_j$ и для $i \leq m$ выполняются неравенства $\gamma(x_i) < k$, $\gamma(y_i) < k$. Положим $\bar{a}_t = (a, b, x_o, \ldots, x_m, y_o, \ldots, y_m, a^t)$ и покажем, что $\bar{a}_t \to \bar{a}$ (этого будет достаточно для завершения леммы, так как уже доказано, что $\bar{a}_t$ атомные наборы). Ясно, что если для каждого $\check{\Sigma}_o \subseteq_f \check{\Sigma}$ мы построим автоморфизмы $\check{\mathcal{M}}|_{\check{\Sigma}_o}$, переводящие $\bar{a}_t$ в $\bar{a}$, для всех $t \geq t_o = t_o(\check{\Sigma}_o)$, то получим нужное. Можно считать, что $\check{\Sigma}_o = \{P, H, F\} \cup \{P_o, \ldots, P_n\} \cup \{S_o, \ldots, S_n\}, n \geq k$, возьмем $t > n$. В силу ранее доказанного достаточно построить биекцию D с нужными свойствами, а для этого достаточно указать две последовательности. Сделаем это, для наглядности просто перечислив члены: $(a, b, x_o, \ldots, x_m, y_o, \ldots, y_m, a^o, \ldots, a^{t-1}, a^t, a^\infty, b^o, a^{t+1}, b^1, a^{t+2}, \ldots)$ и $(a, b, x_o, \ldots, x_m, y_o, \ldots, y_m, a^o, \ldots, a^{t-1}, a^\infty, a^t, b^o, a^{t+1}, b^1, a^{t+2}, \ldots)$.

Нужно показать, что среди соответствующих пар членов этой последовательности сохраняются отношения "$=$" и "$\equiv_l$" для $l = 0, \ldots, n$. Сделать это можно совершенно аналогично соответствующей части доказательства леммы 14. Отметим лишь, что $\beta(x_i, a^t) = \gamma(x_i) = \beta(x_i, a^\infty)$, аналогично для $\beta(y_i, a^t)$. Существует биекция $f : D \to D$, сохраняющая $\equiv_l$ для $l = 0, \ldots, n$ и переводящая первую последовательность во вторую. Взяв f', легко показать, что это будет нужным автоморфизмом. □

Отметим некоторые свойства $\check{\mathcal{M}}$. Ясно, что $(\check{\mathcal{M}}, a) \equiv (\check{\mathcal{M}}, b)$ (более сильное утверждение фактически было уже обосновано в доказательстве леммы 14: для каждого $n \in \mathbf{N}$ была построена биекция $f : M \to M$, которая сохраняет $\{H, P, F, S_o, \dots, S_n, P_o, \dots, P_n\}$ и переводит a в b). Верны также следующие утверждения о модели $\check{\mathcal{M}}$:

$\check{\mathcal{M}} \models H(a, a^\infty)$,

$\check{\mathcal{M}} \models P_k(a^\infty)$ для всех $k \in \mathbf{N}$.

Пусть $\theta(x, y, z, t) =$ "$F(x, z) \wedge F(y, t)$", тогда

$$\check{\mathcal{M}} \models (\forall x \forall y \forall z \forall t)[P_n(x) \wedge P_n(y) \wedge \theta(x, y, z, t) \to \\ \to S_n(z, t)],$$

$$\check{\mathcal{M}} \models (\forall x \forall y \forall z \forall t)[\theta(x, y, z, t) \to \neg P(z, t)],$$

$$\check{\mathcal{M}} \models (\forall x)[P_o(x) \to (\exists y) F(x, y)].$$

Простота σ относительно $\hat{\Sigma}$ в $\hat{\mathcal{M}}$ может быть обоснована почти дословно так же, как и в предыдущем разделе, с заменой $\{Q_\epsilon : \epsilon \in E\}$ на $\{P_k : k \in \mathbf{N}\}$. Кроме того, из связи $\hat{\mathcal{M}}$ с прошлым примером следует, что если $p(u, v)$ — тип $\hat{\Sigma}$, реализацией которого в $\hat{\mathcal{M}}$ является множество $P^{\hat{\mathcal{M}}}$, то верно: $\mathrm{Th}(\hat{\mathcal{M}}),\ S_o(u, v),\ S_1(u, v), \dots \vdash p(u, v)$.

Следующая лемма окончательно доказывает теорему 3. Пусть $\mathcal{M}^*$ — модель Σ^*, существующая по теореме 1, и $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}^*)^1$ — модель Σ'.

ЛЕММА 16. *У модели $\mathcal{M}'$ нет стандартных однородных элементарных расширений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}' \preceq \mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}'$ — однородная модель. Докажем, что она не стандартна. Имеем: $M \subseteq M^* = |\mathcal{M}^*|$, $\mathrm{Id}_M : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}^*$ и $\mathrm{Id}_M : \check{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}'$ — специальные вложения. Нетрудно доказать, что из $(\check{\mathcal{M}}, a) \equiv (\check{\mathcal{M}}, b)$ следует$(\mathcal{M}', a) \equiv (\mathcal{M}', b)$, поэтому $(\mathcal{N}', a) \equiv (\mathcal{N}', b)$. Для каждой формулы $\phi(\bar{x})$ языка $\check{\Sigma}$ существует $\phi'(\bar{x})$ — формула Σ' такая, что $\phi_{\bar{x}}(\check{\mathcal{M}}) = \phi'_{\bar{x}}(\mathcal{M}')$, и свойства операции $'$(штрих) уже были рассмотрены в предыдущем разделе, поэтому ограничимся замечанием, что для $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{N}'$ будут верны свойства, аналогичные указанным для $\check{\mathcal{M}}$, с заменой всех формул ψ на ψ':

$\mathcal{M}' \models H'(a, a^\infty)$,

$\mathcal{M}' \models P'_k(a^\infty)$ для всех $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{M}' \models (\forall x \forall y \forall z \forall t)[P'_n(x) \wedge P'_n(y) \wedge \theta'(x, y, z, t) \to \\ \to S'_n(z, t)],$$

$\mathcal{M}' \models (\forall x \forall y \forall z \forall t)[\theta'(x,y,z,t) \to \neg P'(z,t)]$,

$\mathcal{M}' \models (\forall x)[P'_o(x) \to (\exists y)F'(x,y)]$,

где $\theta'(x,y,z,t) =$ "$F'(x,z) \wedge F'(y,t)$" и $P' \in \Sigma'$.

В силу однородности $\mathcal{N}'$ существует $b^\infty \in N = |\mathcal{N}'|$ такое, что $\mathcal{N}' \models H'(b, b^\infty)$ и $\mathcal{N}' \models P'_k(b^\infty)$ для $k \in \mathbf{N}$. Найдутся $d, e \in N$ такие, что $F'(a^\infty, d)$ и $F'(b^\infty, e)$, тогда $\mathcal{N}' \models \theta'(a^\infty, b^\infty, d, e)$, $\mathcal{N}' \models S'_n(d,e)$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и $\mathcal{N}' \models \neg P'(d,e)$. Аналогично случаю с прошлым примером можно показать, что $\mathrm{Th}(\mathcal{M}'), S'_o(x,y), S'_1(x,y), \ldots \models p'(x,y)$, где $p'(x,y)$ — тип Σ^*, соответствующий P', и из этого с очевидностью будет следовать, что $\mathcal{N}'$ не стандартна. □

ЛИТЕРАТУРА

1. BARVISE J. Admissible sets and structures. — Berlin a.o.: Springer, 1975. — 394 p.

2. КЕЙСЛЕР Г., ЧЭН Ч.Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977. — 614 с.

3. ГОНЧАРОВ С.С., ПУРМАХДИАН М. Итерированные обогащения счетных теорий и их применение //Алгебра и логика. — 1995. — Т.34, N 6. — С. 623-645 (НИИ МИОО НГУ, Новосибирск).

4. MORLY M., VAUGHT R. Homogeneous universal models //Math. Scand. — 1962. — Vol. 11. - P. 37-57.

Поступила в редакцию
5 января 1996 года