МОДЕЛИ КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные системы)
1997 год Выпуск 158

УДК 517.11:518.5

ИТЕРИРОВАННАЯ КЛИНИЕВСКАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ С ДВУМЕСТНЫМИ ОРАКУЛАМИ

Р.В.Ганова

В статьях [3–5] был указан некоторый способ построения двуместных оракулов, опирающийся на ординальную нумерацию ν. Это построение являлось некоторым трансфинитным процессом, распадающимся на отдельные "макротакты". Поэтому фактически такой оракул можно рассматривать как трансфинитную последовательность оракулов. Построение итерированной клиниевской вычислимости [1] тоже распадается в трансфинитную последовательность оракулов, "нанизанных" на некоторую нумерацию. Возникает вопрос, как будут соотноситься между собой эти оракулы, если мы их построим на одной и той же нумерации ν?

Двуместные оракулы можно считать модификацией концепции частичного оракула, исходным пунктом которой является ситуация неполучения ответа. В отличие от обычной версии оракульной вычислимости, допускается, что в некоторых, строго регламентированных, ситуациях машина, не получившаяся от оракула ответа на свой вопрос, тем не менее, продолжает работу (воспринимая отсутствие ответа как своего рода ответ). В принципе, подобную ситуацию можно рассматривать и для обычных одноместных оракулов, но по техническим причинам оказалось удобным определять сам оракул как двуместную функцию: "реакция" оракула на заданный вопрос зависит не только от самого вопроса, но и от задающей его машины. Впервые оракулы такого вида рассматривались Л.Н.Побединым [2-4]. Его оракулы могли отвечать на вопросы, смысл которых был приближен к джамп-операции, и использовались для моделирования итерированной гиперарифметической вычислимости. Кроме того, Победин ввел для таких оракулов некоторые специальные приемы программирования, которые естественно было называть остановкой времени и страховкой. Позднее Побединым был разработан более общий вариант "двуместного" аналога итерированной клиниевской вычислимости. Несколько видоизмененный такой вариант был представлен в работе автора [5]. Введенное там понятие перевоплощения машин оказалось удобным при исследовании одноместных оракулов. И этот вариант мы и будем сопоставлять с иерархией, построенной в [1].

В основу этого сопоставления будут положены следующие наблюдения. В процессе построения двуместного оракула F существенную роль играют критические точки, означающие начало очередного макротакта (мы будем обозначать их δ'_τ). И тот оракул, что был построен к моменту δ'_τ, будем теперь обозначать F^τ_ν и сравним его с оракулом H^τ_ν итерированной клиниевской вычислимости [1]. Однако, в исходном определении итерированной клиниевской вычислимости подобных точек не было, но ее определение можно легко видоизменить так, чтобы каждому τ в пределах длины ν соответствовала тоже некоторая характерная точка, которую обозначим δ_τ. Последовательности δ_τ и δ'_τ не обязаны совпадать, но позднее мы покажем, что $\delta'_\tau = \delta_\tau$.

Подробности, касающиеся построения рассматриваемых здесь двуместных оракулов, можно найти в работе [5]. Мы лишь подчеркнем здесь, что число допустимых отказов при работе с F не фиксируется раз и навсегда, а просто особо оговаривается применительно к каждому вычислению.

Отметим некоторые важные свойства оракулов F_ν^τ. Во-первых, естественно было бы ожидать наличия свойства слабой фундированности. Напомним, что слабая фундированность — это перечислимость кодов вычислимых ординалов. Однако, кодами вычислимых ординалов в этом случае лучше считать инициальные машины, так как оракул F был построен в расчете именно на них. Переход к неинициальным машинам был бы затруднен в силу наличия допустимых отказов и их неконтролируемого накопления при переходе от одного аргумента к другому. С другой стороны, бесконечно работающую инициальную машину можно, в принципе, воспринимать как вычисляющую некоторую функцию. Конечно, тем самым накладываются более сильные ограничения по сравнению с обычным определением вычислимой функции (допустимое число отказов относится ко всем аргументам, поэтому на большей части аргументов машина не должна получать отказов). Но в данном случае это не столь важно. Вычислимые деревья интересуют нас как коды ординалов, и любой ординал $\sigma < \delta_\tau'$ обязательно получит F_ν^τ-код. Множество таких кодов будет F_ν^τ-перечислимым (это легко доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [1]). Таким образом, оракулы F_ν^τ слабо фундированы.

Свойство парной селекции предопределено самим построением двуместного оракула и выполняется в нужном нам виде для каждого оракула F_ν^τ [5]. А так как число допустимых отказов заранее не фиксируется и оракул может давать информацию о машинах, работающих в "разных режимах", то без каких-либо проблем проходит и переход от парной селекции к счетной (см.[8]).

Теперь обратимся к оракулам итерированной клиниевской вычислимости. Эта иерархия оракулов H_ν^τ строилась трансфинитным процессом, каждый шаг которого представлял собой трансфинитный процесс. Очередной оракул строился как бы заново, начиная с пустого множества. Теперь мы устанавливаем "единый счет времени" и строим единую последовательность оракулов $\dot{H}_{\nu}^{\gamma}$. Прежние H_{ν}^{τ} при этом будут соответствовать упомянутым выше характерным точкам δ_{τ}. Это удобнее, поскольку примерно так же строились и двуместные оракулы.

Сначала отметим, что так как двуместные оракулы регулярны по построению, то имеет смысл взять такой вариант итерированной клиниевской вычислимости, который обеспечивал бы регулярность оракулов H_{ν}^{τ} (иначе сравнение оракулов F_{ν}^{τ} и H_{ν}^{τ} не имело бы разумного смысла). В работе [1], упоминались различные возможные модификации, мы воспользуемся одной из них: введем дополнительные вопросы вида 13^{w}, тогда, как было показано в [7], оракулы H_{ν}^{τ} будут автоматически регулярны.

Опишем теперь как можно построить оракулы $\dot{H}_{\nu}^{\gamma}$. Так как мы хотим вести это построение аналогично построению F_{ν}^{γ}, то здесь полезно будет заметить следующее обстоятельство: F_{ν}^{γ} представлялись в виде таблиц T_{γ}, строки которых были частично заполнены и значения $F_{\nu}^{\gamma}(z, y)$ записывались в клетке (z, y) на пересечении z-й строки и y-го столбца. Соответственно, оракул $\dot{H}_{\nu}^{\gamma}$ удобно представлять в виде строки, где на x-й позиции записан ответ оракула на вопрос x, если он имеется. Так же, как при построении F_{ν}^{γ}, процедура перехода от γ к $\gamma+1$ состоит, вообще говоря, в последовательном выполнении двух этапов. Эти этапы можно считать аналогами операций P_1, P_2 из [5]. Нам понадобится следующее определение. Будем говорить, что некоторое j из номерного множества $K[\nu]$ нумерации ν упоминается в $\dot{H}_{\nu}^{\gamma}$, если существует число x вида $3^{<t,j>}$ такое, что x-я позиция в соответствующей строке запонена (оракул умеет отвечать на вопрос такого вида).

Получаем следующее модифицированное определение итерированной клиниевской вычислимости. На очередном шаге γ рассматриваем $\bigcup\limits_{\sigma<\gamma} \dot{H}_{\nu}^{\sigma}$. Оракул $\dot{H}_{\nu}^{\gamma+1}$ определяется из описания следующих двух этапов.

Первый этап. Если z есть код тотальной $\dot{H}_\nu^\gamma$- вычислимой функции β_z, то для всех таких z полагаем

$$\dot{H}_\nu^{\gamma+1}(5^z) = \begin{cases} 0, \text{ если для некоторого } t \ \ \beta_z(t) = 0, \\ 1, \text{ в противном случае }. \end{cases}$$

Если в результате получился более широкий оракул, то построение $\dot{H}_\nu^{\gamma+1}$ завершено. В противном случае переходим ко второму этапу. Такие моменты перехода мы будем называть "характерными" точками и обозначать $\delta_0, \delta_1, \ldots$

Второй этап состоит в том, что мы добавляем ответы на вопросы вида $3^{<i,j>}$ и 13^w (если они имеются), согласно следующей процедуре.

Второй этап. Берем первое i из нумерации ν, которое еще не упоминалось в $\dot{H}_\nu^\gamma$, и для каждого t полагаем

$$\dot{H}_\nu^{\gamma+1}(3^{<t,j>}) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \text{ принадлежит графику } \dot{H}_\nu^\gamma, \\ 1, \text{ в противном случае}. \end{cases}$$

Далее мы определяем ответы на вопросы вида 13^w. В соответствии с работой [7], для каждой неинициальной машины w ищем первое $\delta < \gamma$, для которого выполняются следующие три условия:

1) в точке δ процедура соответствующая первому этапу, не приводит к расширению оракула;

2) если j есть тот номер из $K[\nu]$, который впервые упомянут в $\dot{H}_\nu^{\delta+1}$, то существует хотя бы одна машина z, которая с оракулом $\dot{H}_\nu^\delta$ разрешает множество $K_j(\nu) = \{l : \nu l < \nu j\}$;

3) машина w на любом таком аргументе z с оракулом $\dot{H}_\nu^\delta$ останавливается.

Соответствующий этому δ номер j (если мы такой δ найдем) и будет ответом на вопрос 13^w.

На предельном шаге γ полагаем $\dot{H}_\nu^\gamma = \bigcup\limits_{\sigma<\gamma} \dot{H}_\nu^\sigma$.

Легко видеть, что оракул $\dot{H}_\nu^\tau$ (как он был определен в [1]) фактически совпадает с оракулом $\dot{H}_\nu^{\gamma_\tau}$.

Следует заметить, что то, что мы назвали характерными точками, это, прежде всего, предельные ординалы. Конечно, далеко не всякий предельный ординал будет характерной точкой. Пусть γ — предельный. Если на шаге γ "сработал" первый этап, то существенных отличий между предельным и непредельным случаями не возникает, γ не будет характерной точкой. Для характерной точки γ следует различать два случая: то самое i, которое вводится при выполнении второго этапа, имеет непосредственного предшественника в нумерации ν, либо такового не существует. В первом случае у данного γ имеется ближайшая снизу характерная точка δ_τ, в которой был упомянут этот предшественник; такому γ соответствует оракул $H_\nu^{\tau+1}$. Во втором случае данная характерная точка является пределом последовательности предыдущих характерных точек, и $\dot{H}_\nu^\gamma = H_\nu^{\nu i} = \bigcup_{\sigma<\nu i} H_\nu^\sigma$. Согласно определению из [1], это будет точка насыщения. С точки зрения метарекурсии, это соответствует понятию конструктивно недостижимого ординала, точнее, его аналогу, отнесенному к данной нумерации ν.

Покажем теперь, что одноместные оракулы H_ν^τ из построенной выше иерархии и двуместные оракулы F_ν^τ будут взаимновычислимы.

ТЕОРЕМА 1. *Оракул F_ν^τ вычислим с H_ν^τ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже говорилось, при построении оракула F_ν^γ мы работали не с самими частичными функциями, а с таблицами T_γ, где вместо неопределенного значения могла стоять двойка (см.[5]). Других различий между ними нет, поэтому достаточно будет доказать вычислимость таких, немного доопределенных, функций T_γ. Доказательство будет проводиться с помощью леммы Роджерса [9], поэтому сразу примем индукционное предположение: пусть уже доказано, что оракулы F_ν^σ вычислимы с H_ν^σ для всех $\sigma < \tau$ равномерно по ν–номерам σ. С помощью леммы Роджерса нетрудно показать также, что для всех $\gamma < \delta_\tau$ графики T_γ разрешимы с H_ν^τ равномерно по H_ν^τ-кодам γ. Доказательство этого факта носит рутинный характер, поэтому мы его опускаем. Тогда сама таблица T_{δ_τ} тоже будет представлять собой H^τ_ν-вычислимую двуместную функцию.

Докажем теперь, что, по крайней мере, $\delta'_\tau \le \delta_\tau$, т.е. убедимся, что к моменту δ_τ таблица T_{δ_τ} стабилизировалась. Для этого покажем, что любая хорошо работающая с оракулом F^τ_ν машина уже упомянута в T_{δ_τ}. Пусть инициальная машина z хорошо работает с T_{δ_τ} в режиме k, получая, стало быть не более k отказов. Для простоты положим $k = 1$ и пусть y — отказной вопрос машины z. По такой z всегда можно построить машину $\hat{z}$, которая, не задавая вопроса y, сама себе дает отказ, а все остальные вопросы машины z машина $\hat{z}$ задает дважды для страховки (мы используем этот прием аналогично тому, как это было сделано в работах [3–5]). Предположим от противного, что машина z только сейчас начала хорошо работать, тогда и $\hat{z}$ будет такой же. Действительно, если z с таблицей T_γ для $\gamma < \delta_\tau$ застревала, то она получала два отказа. Если один из отказных вопросов был до y, то в силу страховки $\hat{z}$ тоже будет застревать, так как дважды задаст вопрос, на который заведомо нет ответа. Если y был первым отказным вопросом, значит, z получает второй отказ где-то позже и застревает, но тогда застрянет и $\hat{z}$ (в силу тех же причин). Таким образом, если в таблице T_{δ_τ} впервые появится такая машина z, то в этой таблице впервые появится и машина $\hat{z}$, получающая те же ответы на те же вопросы, что и z, но работающая вообще без отказов. Так как T_{δ_τ} является H^τ_ν-перечислимой и оракул H^τ_ν регулярен, то машину $\hat{z}$ можно промоделировать с H^τ_ν. Следовательно, анализируя работу $\hat{z}$, мы можем извлечь конфинальную δ_τ вычислимую последовательность ординалов. Это невозможно, стало быть, мы получили противоречие. Таким образом, к моменту δ_τ таблица T_{δ_τ} уже стабилизировалась. В силу индукционного предположения, теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Оракул H^τ_ν вычислим с оракулом F^τ_ν.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим по индукции, что для всех $\sigma < \tau$ оракулы H_ν^σ вычислимы с F_ν^τ равномерно по ν–номерам σ. Как теперь с помощью F_ν^τ вычислить ответ на произвольный вопрос y? Пусть y имеет вид $3^{<j,t>}$ или 13^w. По индукционному предположению графики H_ν^σ разрешимы с оракулами F_ν^σ равномерно по ν–номерам σ. Графики F_ν^σ разрешимы с F_ν^τ по построению. Следовательно, графики H_ν^σ можно разрешить с оракулом F_ν^τ равномерно по ν–номерам σ и найти ответы на вопросы вида $3^{<j,t>}$ (так как они относятся к предыдущим оракулам), либо выяснить, что ответа нет. Причем, процесс нахождения ответа можно организовать так, чтобы в последнем случае наступало застревание. Чтобы найти ответы на вопросы вида 13^w, воспользуемся регулярностью оракула F_ν^τ. Тогда для любого $\sigma < \delta_\tau$ можно определить, удовлетворяет ли оно условиям 1–3 из описания второго этапа построения H_ν^τ. Совокупность всех таких σ будет F_ν^τ–перечислимой, поэтому, если такие σ существуют, то мы непременно найдем одно из них (не обязательно минимальное). Далее, перебирая все σ, меньшие найденного, можно найти минимальное такое σ и, следовательно, правильный ответ на вопрос 13^w. А если такого σ не существует, то мы застрянем. Пусть теперь $y = 5^z$, где z — неинициальная машина. Зафиксируем машину m, которая с оракулом F_ν^τ вычисляет джамп в следующем смысле. Если мы имеем машину u, работающую с оракулом F_ν^τ без отказов и вычисляющую функцию β, то m применительно к u вычислит джамп $E(\beta)$. Теперь любую машину z можно переделать в инициальную машину z^* так, чтобы z^* с оракулом F_ν^τ адекватно воспроизводила работу z с оракулом H_ν^τ. Для этого пусть z^* последовательно осуществляет работу z на аргументах $0, 1, \ldots$, и каждый раз, когда машина z задает вопрос вида 5^v, z^* дважды задает вопрос $2^{<v^*,1>}$ (см. [5]). Затем z^* применяет к v^* машину m. Если z задает любой другой вопрос, z^* либо находит на него ответ, либо застревает, согласно вышеописанной процедуре. Построение z^* на этом завершается. Очевидно, что переход от z к z^* представляет собой рекурсивную процедуру, и машина z^* рассчитана на работу с оракулом F^{τ}_{ν} без отказов. Если машина z с оракулом H^{τ}_{ν} вычисляет тотальную функцию, то z^* с оракулом F^{τ}_{ν} будет вычислять ту же функцию. Доказательство этого утверждения мы опускаем из-за рутинности. Убедимся, что при моделировании на "плохой" вопрос 5^v не может появиться хорошего ответа. Для этого достаточно проверить, что если машина z была "плохой", то и z^* будет плохой. От противного предположим, что z^* оказалась хорошей, и, следовательно, имеет ранг относительно F^{τ}_{ν}. Если отказной вопрос машины z не имел вида 5^v, то z^* не могла стать хорошо работающей (по построению). Значит, z получила отказ на вопрос вида 5^v и застряла, а z^* на вопрос $2^{<v^*,1>}$ получила какой-то ответ. Следовательно, машина v^* тоже хорошая, и ее ранг меньше ранга z^*. Продолжая это рассуждение, мы бы получили бесконечную цепочку убывающих ординалов, что невозможно. Значит, каким бы ни был вопрос вида 5^v — хорошим или плохим — z^* получит на него тот ответ или отказ, который требуется. Таким образом, с оракулом F^{τ}_{ν} можно найти правильный ответ на любой вопрос, задаваемый оракулу H^{τ}_{ν}. Теорема доказана.

Литература

1. БЕЛЯКИН Н.В. Итерированная клиниевская вычислимость //Сиб.мат.журн. - 1989. - Т. 30, №6. - С. 26-41.

2. ПОБЕДИН Л.Н. Некоторые вопросы обобщенной вычислимости //Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, №2.

3. ПОБЕДИН Л.Н. Проблема остановки и теория иерархий //Алгебра и логика. — 1975. — Т.14, №2.

4. ПОБЕДИН Л.Н. Вычислимость с двуместным оракулом //Сиб.мат.журн. — 1994. — Т. 35, №5. С. 1138-1147.

5. ГАНОВА Р.В. Обобщенные вычисления с двуместными оракулами //Алгебра и логика. — 1993. — Т. 32, №5.

6. GANOVA R.V. On a Certain Nontraditional Version of Computations with Oracles //Siberian Adv. Math. — 1995. — Vol.5, №2. — P.38–47.

7. НИКИФОРОВА Е.Г. Рекурсивные иерархии, регулярные по построению //Ред."Сиб.мат.журн." — М., 1986. — Деп. в ВИНИТИ №5637-В86.

8. ГАНОВ В.А., БЕЛЯКИН Н.В. Общая теория вычислений с оракулами. — Новосибирск, 1989 (ИМ СО АН СССР).

9. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функкий и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972

Поступила в редакцию
24 декабря 1996 года