МОДЕЛИ КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные системы)
1997 год Выпуск 158

УДК 517.12

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНСТРУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ [1]

С.П.Одинцов

Введение

Настоящая работа посвящена изучению подхода к конструктивности формальных систем, предложенному К. Ф. Самохваловым [1]. Традиционные конструктивные семантики, например, реализуемость [3] и близкие к ней подходы [4,5], редуцируют конструктивный смысл формулы к конструктивному смыслу её конституентов, что сопряжено с неизбежными техническими затруднениями. В [1] конструктивный смысл каждой формулы определяется в терминах дедуктивного аппарата формальной системы. Конструктивность формальной системы в целом определяется с помощью простого условия второго порядка, т.е. условия на множества формул. Система конструктивна, если класс теорем данной системы содержится в классе формул, конструктивно истинных относительно данной системы. Система называется точной конструктивной, если классы конструктивных и доказуемых формул совпадают. Если система конструктивна, то, как показано в [2], для нее можно построить семантику, аналогичную реализуемости по Клини, тем самым, подход к конструктивности, предложенный в [1], хорошо согласуется с традиционными подходами.

[1] Работа поддержана РФФИ, грант № 96-01-01552.

Основные определения работы [1] даны для языка первого порядка. В данной статье эти определения будут ограничены на пропозициональный язык. Главный результат состоит в описании и исследовании класса формул, которые конструктивны во всех точных конструктивных системах. Этот класс формул является логикой, т.е. замкнут относительно правил подстановки и *modus ponens*, которую мы обозначим EK. Логика EK является пересечением максимальных расширений минимальной логики Lj, которых всего два: классическая логика Lk и максимальная негативная логика Lmn, получающаяся присоединением к Lj всех формул вида $\neg\varphi$ и $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \supset \varphi$. Логика EK обладает рядом интересных свойств. Например, в EK верны закон исключённого третьего $\varphi \vee \neg\varphi$, закон противоречия $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ и законы Де Моргана $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ и $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, что показывает близость EK к классической логике. Тем не менее, эта логика не является промежуточной, так как EK $\subset$ Lmn и, тем самым, паранепротиворечива. Логика EK является пересечением двух конечно-аксиоматизируемых расширений минимальной логики, что позволяет немедленно получить её аксиоматизацию. В статье построена характеристическая модель логики EK, а также доказано, что EK удовлетворяет свойству максимальности, которое состоит в следующем. Любое нетривиальное расширение EK является либо максимальной негативной, либо классической логикой. Ранее пример паранепротиворечивой логики P^1, удовлетворяющей аналогичному свойству максимальности был построен Сетте [6]. Присоединение к P^1 любой классической тавтологии, недоказуемой в P^1, дает классическую логику. Очевидно, свойство максимальности логики EK значительно сильнее. Присоединение к EK новой классической тавтологии дает классическую логику, а присоединение новой максимальной негативной тавтологии — максимальную негативную логику, при этом, других расширений у EK нет.

1. Предварительные замечания и результаты

В этой статье мы рассматриваем только логики и дедуктивные системы в пропозициональном языке $\{\wedge, \vee, \supset, \bot\}$, где $\bot$ — константа "противоречие". Отрицание считаем определяемым символом, $\neg\varphi \rightleftharpoons \varphi \supset \bot$. Как обычно, логика — это множество формул, замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens, а дедуктивная система — совокупность аксиом и правил вывода. Всякую логику можно рассматривать как дедуктивную систему с пустым множеством правил вывода.

Если L — дедуктивная система, то Thm(L) обозначает множество теорем этой дедуктивной системы. Дедуктивная система L называется *формальной*, если множество Thm(L) рекурсивно перечислимо; L называется *непротиворечивой*, если $\bot \notin$ Thm(L), и *слабо непротиворечивой*, если найдется формула φ такая, что $\varphi \notin$ Thm(L). Наконец, будем говорить, что дедуктивная система L *противоречива*, если $L \vdash \varphi$ для любой формулы φ.

Ниже будут использоваться такие обозначения пропозициональных логик:

Lp — позитивная логика;

Lj — минимальная логика, или логика Иогансона;

Li — интуиционистская логика;

Lk — классическая логика;

Ln — негативная логика.

Дедуктивные системы гильбертовского типа для логик Lp, Lj, Li, Lk, Ln будут обозначаться LP, LJ, LI, LK, LN соответственно.

Введенные логики связаны между собой следующим образом:

$\mathrm{Lj} = \mathrm{Lp} + \{(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)\}$,

$\mathrm{Li} = \mathrm{Lj} + \{\neg p \supset (p \supset q)\}$,

$\mathrm{Lk} = \mathrm{Li} + \{\neg\neg p \supset p\}$,

$\mathrm{Ln} = \mathrm{Lj} + \{\neg p\}$.

Исчерпывающую информацию об алгебраической семантике выше перечисленных логик можно найти в монографиях [7,8]. Ниже приводятся лишь некоторые необходимые определения и факты.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра в сигнатуре $\langle \wedge, \vee, \supset, \bot, 1 \rangle$. Отображение $V: \{p_0, p_1, \ldots\} \to A$ из множества пропозициональных переменных в основное множество алгебры $\mathbf{A}$ называем $\mathbf{A}$-*оценкой*. Каждая $\mathbf{A}$-оценка очевидным образом распространяется на множество всех пропозициональных формул. Формула φ *истинна* в $\mathbf{A}$, или является *тождеством* алгебры $\mathbf{A}$, символически $\mathbf{A} \models \varphi$, если $V(\varphi) = 1$ для любой $\mathbf{A}$-оценки V.

Множество формул $\mathrm{L}\mathbf{A} = \{\varphi | \mathbf{A} \models \varphi\}$ является логикой, которую мы назовем *логикой алгебры* $\mathbf{A}$. *Логика класса алгебр* $\mathcal{K}$ — это пересечение логик алгебр из класса $\mathcal{K}$, $\mathrm{L}\mathcal{K} = \bigcap\{\mathrm{L}\mathbf{A} | \mathbf{A} \in \mathcal{K}\}$.

Алгебра $\mathbf{A}$ называется *моделью* логики L, если $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}\mathbf{A}$. Если же $\mathrm{L} = \mathrm{L}\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}$ называется *характеристичекой моделью* логики L.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [7,гл.III, § 3]. *Любая логика имеет характеристическую модель.*

Решетка $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, 1 \rangle$ с наибольшим элементом 1 называется *импликативной*, если для любых $a, b \in A$ существует супремум $\bigvee\{x | a \wedge x \leq b\}$. Импликативные решетки образуют многообразие. Позитивная логика Lp является логикой этого многообразия [8,теорема X.2.1].

Будем называть j-*алгебрами* импликативные решетки, рассматриваемые в сигнатуре $\langle \wedge, \vee, \supset, \bot, 1 \rangle$, где $\bot$ интерпретируется как произвольный элемент решетки. Многообразию j-алгебр соответствует минимальная логика Lj [8, теорема XI.2.2]. Класс j-алгебр можно определить также как класс импликативных решеток $\mathbf{A}$ с операцией отрицания, удовлетворяющей свойству $a \supset \neg b = b \supset \neg a$. Эти эквивалентные определения связаны между собой следующим образом $\neg a = a \supset \bot$, $\bot = \neg 1$.

Алгебра Гейтинга — это j-алгебра, в которой противоречие $\bot$ является наименьшим элементом. Логика Li — это логика многообразия алгебр Гейтинга [8,теорема XI.8.2].

Негативная j-алгебра — это j-алгебра с условием $\bot = 1$. Очевидно, что негативные j-алгебры выделяются в многообразии j–алгебр тождеством $\neg p$. Таким образом, негативная логика Ln — это логика многообразия негативных j–алгебр.

Импликативная решетка, удовлетворяющая тождеству $((p \supset q) \supset p) \supset p$ называется *алгеброй Пирса*. Пусть X — множество и 2^X — его множество-степень. Тогда алгебра множеств $\langle 2^X, \cap, \cup, \supset, X\rangle$, где $Y \supset Z = (X - Y) \cup Z$, для любых $Y, Z, \in 2^X$, а $\cup$ и $\cap$ — обычные объединение и пересечение множеств, является алгеброй Пирса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [8, упр.III.4]. *Пусть* **A** *— произвольная алгебра Пирса. Найдется множество X такое, что алгебра* **A** *изоморфно вкладывается в алгебру множеств* $\langle 2^X, \cup, \cap, \supset, X\rangle$.

Фильтр алгебры Пирса определяется также, как фильтр импликативной решетки (см.[8, § IV.2]).

Пусть $\mathbf{2}^P = \langle\{0,1\}, \wedge, \vee, \supset, 1\rangle$ — двухэлементная алгебра Пирса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\mathrm{L}\mathbf{2}^P = \mathrm{Lp} + \{((p \supset q) \supset p) \supset p\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\mathrm{Lp} + \{((p \supset q) \supset p) \supset p\} \subseteq \mathrm{L}\mathbf{2}^P$. Как известно, всякое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми алгебрами. Поэтому для доказательства обратного включения достаточно проверить, что $\mathbf{2}^P$ — единственная подпрямо неразложимая алгебра Пирса.

Воспользуемся следующим критерием разложимости (см., например, [9, теорема 19.1]).

> Алгебра Пирса **A** подпрямо разложима тогда и только тогда, когда найдется семейство фильтров $\{F_i | i \in I\}$ алгебры **A** такое, что $\bigcap_{i \in I} F_i = \{1\}$, но $F_i \neq \{1\}$ для любого $i \in I$.

Пусть **A** — алгебра Пирса, носитель которой содержит более двух элементов. Покажем, что для любого $a \in \mathbf{A}$ найдется фильтр $F_a \neq \{1\}$ такой, что a не принадлежит F_a.

Пусть $1 \neq a \in \mathbf{A}$. Найдется $b \in \mathbf{A}$ такой, что $1 \neq b \neq a$. Если $b \nleq a$, то $a \notin F(b)$, где $F(b) = \{x | x \geq b\}$ — фильтр, порожденный элементом b. Допустим $b \leq a$, тогда рассмотрим элемент $a \supset b$. Из предложения 2 легко следует, что $a \supset b \nleq a$ и $a \supset b \neq 1$, т.е. элемент a не принадлежит фильтру $F(a \supset b)$ и $F(a \supset b) \neq \{1\}$.

Таким образом из приведенного выше критерия следует, что всякая алгебра Пирса, носитель которой содержит более двух элементов, не является подпрямо неразложимой. Предложение доказано.

Пусть $\mathbf{2} = \langle\{0,1\}, \wedge, \vee, \supset, 0, 1\rangle$ — двухэлементная алгебра Гейтинга, которая, как известно, является характеристической моделью классической логики $\mathbf{L2}$=Lk.

Пусть $\mathbf{2}' = \langle\{0,1\}, \wedge, \vee, \supset, 1, 1\rangle$ — двухэлементная негативная j-алгебра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [7, гл.V,§ 3, упр.1]. *Логика* Lj *имеет в точности два максимальных расширения,* Lk *и* $\mathbf{L2}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L — произвольное расширение логики Lj, и $\mathbf{A}$ — характеристическая модель логики L, L=L$\mathbf{A}$. Если $\neg 1_{\mathbf{A}} = 1_{\mathbf{A}}$, то для любого $1 \neq a \in \mathbf{A}$ множество $\{a, 1_{\mathbf{A}}\}$ является носителем подалгебры, которая изоморфна алгебре $\mathbf{2}'$. Следовательно, L$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{L2}'$. Если же $\perp_{\mathbf{A}} \neq 1_{\mathbf{A}}$, то подалгебра $\{\perp_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{A}}\}$ изоморфна алгебре $\mathbf{2}$. Тем самым, L$\mathbf{A} \subseteq$ Lk. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. $\mathbf{L2}' = \mathrm{Lj} + \{\neg p, ((p \supset q) \supset p) \supset p\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, формулы $\neg p$ и $((p \supset q) \supset p) \supset p$ являются тождествами алгебры $\mathbf{2}'$, поэтому $\mathbf{L2}' \supseteq \mathrm{Lj} + \{\neg p, ((p \supset q) \supset p) \supset p\}$. Обратное включение доказывается так же, как и в предложении 3.

Предложение доказано.

Логику $\mathbf{L2}'$ назовем максимальной негативной логикой и обозначим Lmn.

2. Точные конструктивные системы

Сначала напомним некоторые определения из [1], ограничив их на пропозициональный язык.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для любой формальной системы L в пропозициональном языке $\{\vee, \wedge, \supset, \perp\}$, множество формул C(L) определим следующим образом:

если p — пропозициональная переменная, то $p \in C(L)$ тогда и только тогда, когда $L \vdash p$;

если φ имеет вид $\varphi_0 \wedge \varphi_1$, то $\varphi \in C(L)$ тогда и только тогда, когда $L \vdash \varphi_0$ и $L \vdash \varphi_1$;

если φ имеет вид $\varphi_0 \vee \varphi_1$, то $\varphi \in L$ тогда и только тогда, когда $L \vdash \varphi_0$ или $L \vdash \varphi_1$;

если φ имеет вид $\varphi_0 \supset \varphi_1$, то $\varphi \in L$ тогда и только тогда, когда существует эффективное (частичное, в общем случае) отображение $A_{\varphi_0 \supset \varphi_1}$ множества всех доказательств в L в себя такое, что если x есть доказательство формулы φ_0 в L, то $A_{\varphi_0 \supset \varphi_1}$ определено на x и значение $A_{\varphi_0 \supset \varphi_1}(x)$ есть доказательство формулы φ_1 в L.

Формулы из множества C(L) будем называть *конструктивно истинными относительно* формальной системы L (L–*истинными*).

Замечание. В приведенном определении ничего не говорится о конструктивности формулы $\perp$. Определив её конструктивность так же, как для пропозициональных переменных, т.е. $\perp \in C(L) \Longleftrightarrow \perp \in \mathrm{Thm}(L)$, мы бы сразу ограничили наше рассмотрение системами, которые не являются непротиворечивыми, что представляется неестественным. Можно дать определение конструктивности $\perp$ в терминах отношения следования $X \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, задаваемого формальной системой L. Импликация также допускает естественное определение в терминах отношения следования, которое существенно отличается от приведенного выше. Однако, подобные модификации понятия конструктивной формулы не являются предметом рассмотрения настоящей статьи. Они будут изучены в дальнейших работах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть τ — произвольный непустой класс формальных систем. Множество $L(\tau)$, состоящее из тех и только тех формул, которые конструктивно истинны во всех системах из класса τ, называется *конструктивной логикой класса* τ, или просто τ–*логикой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть τ — некоторый класс формальных систем.

Множество формул S такое, что $S \subseteq L(\tau)$, называется *фрагментом* τ–логики $L(\tau)$.

Формальная система K такая, что множество теорем K является фрагментом конструктивной логики (является конструктивной логикой) класса τ, называется (тотальным) формальным представлением τ–логики $L(\tau)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Формальная система L называется *(точной) конструктивной системой*, короче, *k–системой* (*ek–системой*), если L является (тотальным) формальным представлением $\{L\}$–логики.

Другими словами, формальная система L является конструктивной, если всякая доказуемая в L формула конструктивно истинна относительно L, и точной конструктивной, если множества $C(L)$ и $\mathrm{Thm}(L)$ совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *В любой ek-системе L допустимы аксиомы и правила вывода дедуктивной системы LJ минимальной логики. Если L, к тому же, непротиворечива, в L допустимы аксиомы и правила вывода системы LI интуиционистской логики высказываний.*

В [1] аналогичное предложение доказано для точных конструктивных систем, определяемых в языке первого порядка. Очевидно, это доказательство годится и в нашем случае.

Прежде чем приступить к дальнейшим рассмотрениям, отметим ряд простых свойств точных конструктивных систем.

ЛЕММА 1. *Пусть L — некоторая точная конструктивная система, а φ_0, φ_1 — формулы, тогда верны следующие эквивалентности:*

1) $L \vdash (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$ тогда и только тогда, когда $L \vdash \varphi_0$ и $L \vdash \varphi_1$;

2) $L \vdash (\varphi_0 \vee \varphi_1)$ тогда и только тогда, когда $L \vdash \varphi_0$ или $L \vdash \varphi_1$;

3) $L \vdash (\varphi_0 \supset \varphi_1)$ тогда и только тогда, когда $L \vdash \varphi_0$ влечет $L \vdash \varphi_1$.

Все утверждения леммы легко следуют из определений, а п.3 также из того факта, что множество теорем формальной системы рекурсивно перечислимо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *В любой непротиворечивой ek-системе допустимы аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний* LK.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L — некоторая непротиворечивая *ek*-система. В L допустимы аксиомы и правила вывода LI, согласно предложению 6, поэтому нам остается проверить, что в L допустима схема $\neg\neg\varphi \supset \varphi$, т.е. $((\varphi \supset \perp) \supset \perp) \supset \varphi$.

Если $L \vdash \varphi$, то, очевидно, формула $((\varphi \supset \perp) \supset \perp) \supset \varphi$ конструктивно истинна относительно L. Поскольку L точна, имеем $L \vdash ((\varphi \supset \perp) \supset \perp) \supset \varphi$. Предположим, что φ не выводима в L. По условию, в L не выводимо противоречие $\perp$, значит формула $\varphi \supset \perp$ конструктивно истинна и выводима в L. Далее, $(\varphi \supset \perp) \supset \perp$ не лежит в C(L), так как посылка импликации доказуема в L, а заключение нет. Тем самым, $L \nvdash (\varphi \supset \perp) \supset \perp$. Следовательно, $((\varphi \supset \perp) \supset \perp) \supset \varphi \in C(L)$, и, в виду точности L, $L \vdash ((\varphi \supset \perp) \supset \perp) \supset \varphi$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *В слабо непротиворечивой ek-системе* L, *которая не является непротиворечивой, допустимы аксиомы и правила вывода дедуктивной системы* LMN *максимальной негативной логики.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию, $L \vdash \perp$. Следовательно, для любой формулы φ, $\varphi \supset \perp \in C(L)$. Система L точна, поэтому все формулы $\neg\varphi$ доказуемы в L.

Рассмотрим теперь формулу $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \supset \varphi$. Если $L \vdash \varphi$, то формула $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \supset \varphi$ конструктивно истинна относительно L по лемме 1 и, тем самым, доказуема в L. Если же $L \nvdash \varphi$, то, опять используя лемму 1, получаем $L \vdash \varphi \supset \psi$, далее $L \nvdash (\varphi \supset \psi) \supset \varphi$, и, наконец, $L \vdash ((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \supset \varphi$.

Система LMN включает все аксиомы и правила системы LJ, а также схемы аксиом $\neg\varphi$ и $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \supset \varphi$, поэтому нам остается сослаться на предложение 6.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Если* L — *непротиворечивая* ek-*система, то* L *не является структурной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В виду предложения 7, $L \vdash p \vee \vee \neg p$. По условию система L конструктивна, следовательно, либо $L \vdash p$, либо $L \vdash \neg p$. В каждом из этих двух случаев структурность противоречит предположению о непротиворечивости системы L.

Предложение доказано.

Как видно из этого предложения, множество формул, конструктивных относительно данной конструктивной системы, не обязательно является логикой. Ниже будет показано, что τ–логики для некоторых естественных классов формальных систем действительно являются логиками, т.е. замкнуты относительно подстановки и modus ponens. В дальнейшем, $\tau_{con.ek}$ обозначает класс всех непротиворечивых ek–систем; $\tau_{w.con.ek}$ — класс всех слабо непротиворечивых ek–систем, не являющихся непротиворечивыми; наконец, τ_{ek} обозначает класс всех ek–систем.

Следующая теорема описывает τ–логики перечисленных классов ek–систем.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие равенства:*

1) $L(\tau_{con.ek}) = Lk$,

2) $L(\tau_{w.con.ek}) = Lmn$,

3) $L(\tau_{ek}) = Lk \cap Lmn$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Рассмотрим произвольную непротиворечивую ek–систему L. Определим отображение $V : \{p_0, p_1, ...\} \to \to \{0,1\}$, полагая $V(p_i) = 1$, если $L \vdash p_i$, и $V(p_i) = 0$, в противном случае.

Если рассматривать $\{0,1\}$ как двух-элементную импликативную решетку, то с помощью леммы 3.2 несложно доказать,что для любой формулы φ в языке $\{\wedge, \vee, \supset\}$ верна эквивалентность $V(\varphi) = 1 \iff L \vdash \varphi$. Определим $V(\bot) = 0$. Имеем $V(\neg\varphi) = V(\varphi \supset \bot) = 1$ тогда и только тогда, когда $V(\varphi) = 0$. Последнее равенство эквивалентно невыводимости φ в L, а значит, поскольку L непротиворечива по условию, формула $\varphi \supset \bot$ конструктивно истинна относительно L, т.е. выводима в L. Таким образом, если рассматривать V как **2**-оценку, то справедливо равенство $\mathrm{Thm}(\mathrm{L}) = \{\varphi | V(\varphi) = 1\}$.

С другой стороны, для любой **2**-оценки V множество формул $\mathrm{L}_V \rightleftharpoons \{\varphi | V(\varphi) = 1\}$ образует непротиворечивую ek-систему. Это легко проверить с помощью леммы 1.

Очевидно, $\mathrm{Lk} = \mathrm{L}\mathbf{2} = \bigcap\{\mathrm{L}_V | V - \mathbf{2}\text{-оценка}\}$, что и доказывает первое равенство.

2. Пусть $\mathrm{L} \in \tau_{w.con.ek}$. Определим $\mathbf{2}'$-оценку V, полагая $V(p_i) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{L} \vdash p_i$. Заметим, что $V(\bot) = 1$ для любой $\mathbf{2}'$-оценки. Поэтому $V(\neg\varphi) = 1$ для любой φ, при этом любая формула $\neg\varphi$ выводима в L, по предложению 8. Используя этот факт и лемму 1, несложно доказать, что $V(\varphi) = 1 \iff \mathrm{L} \vdash \varphi$ для любой формулы φ. Заметим, как и выше, что любая $\mathbf{2}'$-оценка V определяет слабо непротиворечивую ek-систему $\mathrm{L}_V \rightleftharpoons \rightleftharpoons \{\varphi | V(\varphi) = 1\}$. Осталось заметить, что $\mathrm{Ln} = \mathrm{L}\mathbf{2}' = \bigcap\{\mathrm{L}_V | V - \mathbf{2}'\text{-оценка}\}$.

3. Равенство $\mathrm{L}(\tau_{ek}) = \mathrm{Lk} \cap \mathrm{Lmn}$ является непосредственным следствием двух предыдущих.

Теорема доказана.

Обозначим $\mathrm{EK} \rightleftharpoons \mathrm{L}(\tau_{ek})$. Множество формул EK образует логику, так как это пересечение классической и максимальной негативной логик. Изучению этой логики будет посвящен следующий параграф.

3. Логика EK

Пусть даны два конечно-аксиоматизируемых расширения минимальной логики, $\mathrm{L}_0 = \mathrm{Lj} + \{\varphi_i | i \in I\}$ и $\mathrm{L}_1 = = \mathrm{Lj} + \{\psi_j | j \in J\}$. Тогда их пересечение $\mathrm{L}_0 \cap \mathrm{L}_1$ также конечно-аксиоматизируемо, $\mathrm{L}_0 \cap \mathrm{L}_1 = \mathrm{Lj} + \{\varphi_i \vee \psi_j^1 | i \in I, j \in J\}$, где формула ψ_j^1 получена из ψ_j заменой пропозициональных переменных так, что φ_i и ψ_j^1 не имеют общих вхождений пропозициональных переменных. Аналогичный результат является общеизвестным для расширений интуиционистской логики [10], однако не составляет труда убедиться, что он остается верным и для расширений минимальной логики. По определению, логика ЕК является пересечением двух конечно-аксиоматизируемых расширений логики Lj, $\mathrm{Lmn} = \mathrm{Lj} + \{\neg p, ((p \supset q) \supset p) \supset p\}$ и $\mathrm{Lk} = \mathrm{Lj} + \{\neg p \supset (p \supset q), \neg\neg p \supset p\}$. Учитывая, что $((p \supset q) \supset p) \supset p \in \mathrm{Lk}$, получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{EK} = \mathrm{Lj} + \{((p \supset q) \supset p) \supset p, \neg p \vee (\neg\neg q \supset q), \neg p \vee (\neg q \supset (q \supset r))\},$$

означающее, что ЕК *— конечно-аксиоматизируемое расширение минимальной логики.*

Пока остается открытым вопрос о более естественной аксиоматизации для логики ЕК.

ЛЕММА 2. *Следующие формулы выводимы в* ЕК :

1) $p \vee \neg p$,
2) $\neg(p \wedge \neg p)$,
3) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$,
4) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$.

Все перечисленные формулы являются классическими тавтологиями, которые, очевидным образом, выводимы и в максимальной негативной логике с помощью схемы $\neg\varphi$.

ЛЕММА 3. *В логике* ЕК *невыводимы формулы:*

1) $\neg\neg p \supset p$,
2) $\neg p \supset (p \supset q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Если $\mathrm{EK} \vdash \neg\neg p \supset p$, то эта формула выводима и в Lmn. Но $\mathrm{Lmn} \vdash \neg\neg p$, следовательно, $\mathrm{Lmn} \vdash p$ и, в виду структурности, в Lmn выводима любая формула, что противоречит нетривиальности Lmn.

2. Опять имеем $\mathrm{Lmn} \vdash \neg p \supset (p \supset q)$. Формула $\neg p$ доказуема в Lmn, значит $\mathrm{Lmn} \vdash p \supset q$. Заменяя p на $\neg p$ в последней формуле, получаем $\mathrm{Lmn} \vdash q$. Противоречие.

Отметим несколько важных свойств логики ЕК.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.

1) *Логика* ЕК *разрешима;*
2) *логика* ЕК *не является* k*-системой;*

3) *в любой k-системе* L, *расширяющей* EK, *отрицание конструктивно в следующем смысле:*

если $\mathrm{L} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$, *то* $\mathrm{L} \vdash \neg\varphi$ *или* $\mathrm{L} \vdash \neg\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Формула φ доказуема в EK тогда и только тогда, когда φ истинна в двух конечных моделях, $\mathbf{2}$ и $\mathbf{2}'$. Следовательно, выводимость $\mathrm{EK} \vdash \varphi$ проверяется эффективно.

2. Логика EK не конструктивна, так как она не удовлетворяет дизъюнктивному свойству. Имеем $\mathrm{EK} \vdash p \vee \neg p$, но формулы p и $\neg p$ не выводимы в EK. Выводимость p противоречит нетривиальности EK, а выводимость $\neg p$ — неравенству $\mathrm{EK} \neq \mathrm{Lmn}$.

3. Это утверждение немедленно следует из определения k-системы и того факта, что в EK выводима формула $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$. Предложение доказано.

Теперь мы перейдём к изучению свойств моделей логики EK.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Пусть* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \supset, 0, 1\rangle$ — j-*решетка, являющаяся моделью логики* EK, *т.е.* $\mathrm{EK} \subset \mathrm{L}\mathbf{A}$. *Тогда справедливо следующее:*

1) $\mathbf{A}$, *рассматриваемая как импликативная решетка, является алгеброй Пирса;*

2) интервал $[0,1]_{\mathbf{A}}$ *является подалгеброй* $\mathbf{A}$ *в сигнатуре* $\langle \vee, \wedge, \supset, \neg\rangle$;

3) подалгебра $[0,1]_{\mathbf{A}}$ *является булевой алгеброй;*

4) для любого $a \in A, a \leq 0$ *имеем* $\neg a = 1$;

5) если $0 \neq 1$ *и* $[0,1]_{\mathbf{A}} \neq A$, *то в* $\mathbf{A}$ *существует элемент несравнимый с 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Этот пункт следует из того, что $((p \supset q) \supset p) \supset p \in$ $\in \mathrm{EK}$.

2. Любая j-решетка является импликативной решеткой, поэтому для любых $a, b \in A$ выполнено $a \leq b \supset a$. Отрицание в j-решетке удовлетворяет тождеству $\neg a = a \supset 0$, поэтому для любого $0 \leq b \in A$ имеем $\neg b \geq 0$ и $a \supset b \geq 0$.

Таким образом, интервал $[0,1]_{\mathbf{A}}$ действительно является подалгеброй $\mathbf{A}$.

3. Согласно лемме 2, для любого $a \in A$ имеем $a \vee \neg a = 1$. По определению импликации, $a \wedge \neg a \leq 0$. Учитывая, что $[0,1]_{\mathbf{A}}$ — подалгебра, имеем $a \wedge \neg a = 0$. Мы доказали, что отрицание на интервале $[0,1]_{\mathbf{A}}$ является отрицанием булевой алгебры.

Проверим, что импликация выражается через дизъюнкцию и отрицание, т.е. $a \supset b = \neg a \vee b$ для любых $a, b \in [0,1]_{\mathbf{A}}$.

Пусть $a, b \geq 0$. Импликативная решетка дистрибутивна, поэтому $a \wedge (\neg a \vee b) = (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \leq b$. Следовательно, $\neg a \vee b \leq a \supset b$. Проверим обратное неравенство. По определению, $a \wedge (a \supset b) \leq b$, следовательно, $\neg a \vee (a \wedge (a \supset b)) = (\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee (a \supset b)) = \neg a \vee (a \supset b) \leq \neg a \vee b$. По доказанному $\neg a \leq \neg a \vee b \leq a \supset b$, откуда $a \supset b = \neg a \vee (a \supset b) \leq \neg a \vee b$.

Таким образом, интервал $[0,1]_{\mathbf{A}}$ действительно является булевой алгеброй.

3. Пусть $b \leq 0$, тогда $b \wedge x \leq 0$ для любого $x \in A$, следовательно, $\neg b = b \supset 0 = 1$.

4. Предположим, что все элементы решетки $\mathbf{A}$ сравнимы с 0. В тождестве $\neg p \vee (\neg\neg q \supset q)$ положим $p = 1$, а q — элемент, который строго меньше 0. Тогда $\neg p = 0$ и $\neg\neg q = 0$. По предположению, $0 \wedge x = x$ или $0 \wedge x = 0$ для любого $x \in A$, следовательно, $0 \supset q = \bigvee\{x \; 0 \wedge x \leq q\} = q$. Окончательно имеем $\neg 1 \vee (\neg\neg q \supset q) = 0 \vee q = 0$. Тождество $\neg p \vee (\neg\neg q \supset q)$ не выполняется в $\mathbf{A}$, т.е. $\mathbf{A}$ не является моделью логики EK. Противоречие.

Предложение полностью доказано.

Рассмотрим решетку $\mathbf{4}' = \langle\{0, 1, -1, a\}, \leq\rangle$, где $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq 0 \leq 1$, а элементы a и 0 не сравнимы.

Это импликативная решетка. Операция $\neg x \rightleftharpoons x \supset 0$ превращает её в j-решетку, которая, легко видеть, удовлетворяет всем свойствам, перечисленным в предложении 12. Прямая проверка показывает, что тождества $\neg p \vee (\neg\neg q \supset q)$ и $\neg p \vee (\neg q \supset (q \supset r))$ выполнены в j-решетке $\mathbf{4}'$. Следовательно, $\mathbf{4}'$ дает пример модели логики EK. На самом деле, $4'$ является характеристической моделью для EK, $L4' = EK$. Но для доказательства этого факта нам придется установить, что EK не имеет других расширений кроме Lmn и Lk.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Пусть j-решетка* **A** *является моделью логики* EK, *тогда либо* **A** *является моделью* Lmn, *либо* **A** — *модель* Lk, *либо* $L\mathbf{A} \subset EK$, *т.е.* **A** — *характеристическая модель* EK.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть **A** — j-решетка и $EK \subseteq L\mathbf{A}$. Если $0 = \neg 1 = 1$, то $\neg a = 1$ для любого $a \in \mathbf{A}$, по предложению 12 пункт 3. Поскольку **A** модель логики EK, формула $((p \supset q) \supset p) \supset p$ истинна в **A**. Таким образом, **A** — модель логики Lmn.

Предположим $0 \neq 1$, тогда интервал $[0,1]_{\mathbf{A}}$ является нетривиальной булевой алгеброй. Если $[0,1]_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$, то **A** является моделью классической логики.

Рассмотрим последний случай, $0 \neq 1$ и $[0,1]_{\mathbf{A}} \neq \mathbf{A}$. Тогда **2** является подалгеброй, следовательно, $L\mathbf{A} \subseteq L\mathbf{2} = Lk$. Далее, рассмотрим фильтр $F(0)$, порожденный элементом 0, и фактор-решетку по этому фильтру. В решетке $A/F(0)$ выполнено тождество $\neg p = 1$, так как $\neg a \geq 0$ для любого $a \in \mathbf{A}$. Значит, $L(\mathbf{A}/F(0)) \supseteq Ln$. Кроме того, в **A**, а значит и в $\mathbf{A}/F(0)$ выполняется тождество $((p \supset q) \supset p) \supset p$, следовательно, $L(\mathbf{A}/F(0)) = Lmn$. Таким образом, $L\mathbf{A} \subseteq Lk \cap Lmn = EK$.

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Решетка* $4'$ *является характеристической моделью логики* EK, $L4' = EK$.

Выше было замечено, что $4'$ является моделью EK. Так как $0 \neq 1$, решетка $4'$ не является моделью Lmn. В то же время $L4' \neq Lk$, поскольку $[0,1]_{4'} \neq 4'$. Следовательно, $L4' = EK$, по предложению 13.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решетка $4'$ является самой простой характеристической моделью для EK. Из предложений 12 и 13 легко следует, что в характеристической модели **A** логики EK должно быть не менее четырех элементов. Действительно, единица отлична от нуля, в **A** есть элемент, который строго меньше нуля. Наконец, **А** должна содержать четвертый элемент, не сравнимый с нулем.

Теперь мы можем сформулировать результат о максимальности логики ЕК.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть φ — некоторая формула, не выводимая в* ЕК. *Возможны следующие три случая:*

1) логика $EK + \{\varphi\}$ *противоречива;*

2) $\mathrm{EK} + \{\varphi\} = \mathrm{Lmn}$;

3) $\mathrm{EK} + \{\varphi\} = \mathrm{Lk}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что логика $\mathrm{EK} + \{\varphi\}$ непротиворечива. Пусть **А** — характеристическая модель для $\mathrm{EK}+\{\varphi\}$. Поскольку φ не выводима в ЕК, включение $\mathbf{LA} \subseteq \mathrm{EK}$ не верно. Следовательно по предложению 13, $\mathbf{LA} = \mathrm{Lk}$ или $\mathbf{LA} = \mathrm{Lmn}$.

Теорема доказана.

Литература

1. САМОХВАЛОВ К.Ф. Относительно конструктивные системы//Языки спецификаций и логическое программирование.– Новосибирск, 1988.–Вып.124: Вычислительные системы.– С. 99–113.

2. ОДИНЦОВ С.П. О связи относительно конструктивных систем с традиционными подходами//Теория алгоритмов и ее приложения.– Новосибирск, 1989.– Вып.129: Вычислительные системы.–С. 172–182.

3. КЛИНИ С.В. Введение в метаматематику.– М.: Ин.лит–ра, 1957.– 526 с.

4. ПЛИСКО В.Е. Абсолютная реализуемость предикатных формул.// Изв. АН СССР.– Сер.мат.– 1983. – Т.47, № 2.– С.315–334.

5. ВОРОНКОВ А.А. Конструктивная семантика для теории моделей.// Всесоюз. конф. по прикл. логике, тез.докл.– Новосибирск, 1985.–С. 42–44.

6. SETTE A.M. On the propositional calculus P^1// Mathematica Japonicae.–1973.– Vol.18, № 3.– P.173–180.

7. RAUTENBERG W. Klassische und nichtklassische Aussagenlogik.–BRaunschweig: Friedr.Vieweg und Sohn, 1979. 362 p.

8. RASIOWA H. An algebraical approach to non-classical logics.- Amsterdam:North-Holland, 1974. 404 p.

9. СМИРНОВ Д.М. Многообразия алгебр.- Новосибирск: Наука, 1992. 205 с.

10. MIURA S. A remark on the intersection of two logics.// Nagoja Math. J.- 1966.- Vol.26, № 2.- P.167-171.

Поступила в редакцию
27 ноября 1996 года