

# СПЛАЙН-ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ (Вычислительные системы)

1997 год

Выпуск 159

УДК 519.65

## ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОБОБЩЕННЫМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ КЛАССА $S^2$ С ПЕРЕМЕНАМИ НАПРАВЛЕНИЯ МОНОТОННОСТИ ИЛИ ВЫПУКЛОСТИ<sup>1</sup>

Ю.С.Завьялов

### В в е д е н и е

Настоящая статья продолжает цикл работ автора [1-3] о монотонной и выпуклой интерполяции обобщенными кубическими сплайнами. В случае сплайнов класса  $S^2$  задача была поставлена В.Л.Мирошниченко [4]. Она делится на две части: первое — это обеспечение неотрицательности (или неположительности) значений первой  $m_i$  или второй  $M_i$  производной сплайна в узлах сетки, второе — обеспечение этих требований на интервалах между узлами. То и другое должно выполняться за счет выбора свободных параметров базовых функций сплайна.

Первая часть опирается на лемму [4] о достаточных условиях неотрицательности решения системы уравнений для определения  $m_i$  или  $M_i$  с трехдиагональной матрицей с неотрицательными элементами и диагональным преобладанием. В случае чисто кубических сплайнов, где нет свободных параметров, условия неотрицательности

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 97-01-00824

решения сводятся к ограничениям на исходные данные задачи интерполяции [4-5].

Для этих сплайнов В.Л.Мирошниченко предложил прием для установления ограничений и при смене направления монотонности или выпуклости при условии, что они имеют место в отдельных точках (не опубликовано). Такой случай изображен на рис.1, где имеется две перемены направления монотонности и одна перемена направления выпуклости.

Задача в случае обобщенных сплайнов рассматривалась И.И.Верланом [6], но автор смог найти только весьма сложный вариант достаточных условий, мало пригодный для практического применения.

В настоящей работе построены более простые схемы, вполне приемлемые на практике. При построении сплайнов с переменами направления монотонности используется их традиционное представление [1, 2, 4, 6], а при переменых выпуклости новое представление [3,7]. Знаки  $m_i$  или  $M_i$  задаются в зависимости от исходных данных. Они обеспечиваются путем использования теоремы автора [8] (здесь лемма 1 в § 1)

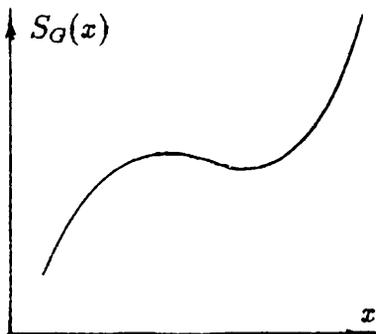


Рис. 1

о неотрицательности решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей с диагональным преобладанием, но, в отличие от случая В.Л.Мирошниченко, не обязательно с неотрицательными элементами, а только подчиняющимися нестрогим условиям Якоби.

Обеспечение монотонности или выпуклости сплайна между узлами интерполяции приводит к ограничениям

на характер базовых функций и их параметры [2,3]. Для интерполяции с переменными направления монотонности потребовались некоторые усложнения схемы работы [2]. В случае перемены выпуклости сколько-нибудь существенных изменений результатов [3] не потребовалось. Более того, удалось упростить изложение в случае кубических сплайнов с дополнительными узлами, а в случае рациональных сплайнов получить новый результат, позволяющий отказаться от одной "некрасивой" схемы в [3].

Пример практического применения предлагаемой теории в случае интерполяции с переменными направления выпуклости дан в публикуемой в настоящем сборнике статье В.В.Богданова [9].

### § 1. Свойства решения системы уравнений с нестрогой якобиевой матрицей

Рассматривается система уравнений

$$Az = d, \quad (1)$$

где  $A$  — квадратная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & & & & c_N & a_N \end{bmatrix}.$$

При этом выполняются нестрогие условия Якоби

$$b_i c_{i+1} \geq 0, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (2)$$

имеет место строгое диагональное преобладание

$$a_i > |b_i| + |c_i|, \quad i = 0, \dots, N, \quad c_0 = b_N = 0, \quad (3)$$

и компоненты вектора правой части неотрицательны

$$d_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, N. \quad (4)$$

К системе такого типа в [8] предложено приводить системы для определения значений  $m_i$  или  $M_i$  при интерполяции с переменными направления монотонности или выпуклости. В [8] нами получены более простые по сравнению с [8] достаточные условия неотрицательности решения системы (1). Идея заключалась в том, чтобы построить матрицу  $G$  такую, что после умножения уравнения (1) слева на  $G$ ,  $GAz = Gd$ , матрица  $GA$  была бы монотонной. Это значит, что из условия  $Gd \geq 0$  следовало бы  $z \geq 0$ . Эта идея реализована в предельно сильном варианте, а именно: матрица  $GA$  оказалась не просто монотонной, но  $M$ -матрицей как имеющей строгое диагональное преобладание по строкам и неположительные недиагональные элементы [10].

Сформулируем результат работы [8] в виде леммы.

ЛЕММА 1. Для того, чтобы решение системы (1) было  $z \geq 0$ , достаточно, чтобы

$$d_i - (c_i)_+ \frac{|U_d^i|}{|U^i|} - (b_i)_+ \frac{|V_d^i|}{|V^i|} \geq 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (5)$$

где  $(e)_+ = \max(0, e)$ ;  $|U^i|$  и  $|V^i|$  — положительные, а  $|U_d^i|$  и  $|V_d^i|$  — неотрицательные определители.

Неравенства (5) — это и есть упоминавшееся выше условие  $Gd \geq 0$ . Если  $c_i \leq 0$ ,  $b_i \leq 0$ , то они совпадают с (4). Если  $c_i > 0$  и/или  $b_i > 0$ , то (5) — дополнительные ограничения на элементы матрицы и  $d_i$ .

Опишем определители, фигурирующие в формулировке леммы 1. Матрица

$$U^i = \begin{bmatrix} a_{k_i} & c_{k_i+1} & & & & & 0 \\ b_{k_i} & a_{k_i+1} & c_{k_i+2} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & b_{i-3} & a_{i-2} & c_{i-1} & \\ 0 & & & & b_{i-2} & a_{i-1} & \end{bmatrix}$$

имеет столько элементов  $c_j < 0$  выше главной диагонали, сколько их расположено между  $c_i > 0$  и ближайшим к нему элементом  $c_{k_i} \geq 0$ ,  $k_i < i$ . Такой элемент всегда

имеется, во всяком случае  $c_0 = 0$ . Матрица  $U_d^i$  получается из  $U^i$  заменой последней строки элементами вектора  $(d_{k_i}, \dots, d_{i-1})$ .

Матрица

$$V^i = \begin{bmatrix} a_{i+1} & c_{i+2} & & & & 0 \\ b_{i+1} & a_{i+2} & c_{i+3} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & b_{l_i-2} & a_{l_i-1} & c_{l_i} \\ 0 & & & & b_{l_i-1} & a_{l_i} \end{bmatrix}$$

под главной диагональю содержит столько элементов  $b_j$ , сколько их находится между  $b_i > 0$  и ближайшим к нему элементом  $b_{l_i} \geq 0$ ,  $l_i > i$ . Такой элемент всегда имеется, например,  $b_N = 0$ . Матрица  $V_d^i$  образуется из  $V^i$  заменой первой строки элементами вектора  $(d_{i+1}, \dots, d_{l_i})$ . Если условия Якоби строгие, то  $U^i = V^{k_i-1}$ ,  $V^i = U^{l_i+1}$ .

Матрицы  $U^i$ ,  $V^i$  — монотонные вследствие того, что они транспонированы к монотонным  $M$ -матрицам  $\bar{U}^i$ ,  $\bar{V}^i$ . Как и у  $M$ -матриц, все их угловые миноры положительны, в том числе  $|U^i|$  и  $|V^i|$ .

Обозначим через  $\Delta_{j-k_i}$  миноры левого верхнего угла матрицы  $U^i$  порядка  $j-k_i$ ,  $j = k_i+1, \dots, i$ . В частности,  $\Delta_{i-k_i} = |U^i|$ . Аналогично, через  $\bar{\Delta}_{l_i-j}$  обозначаем угловые миноры правого нижнего угла матрицы  $V^i$  порядка  $l_i-j$ . В частности,  $\bar{\Delta}_{l_i-i} = |V^i|$ . Принимается  $\Delta_0 = \bar{\Delta}_0 = 1$ .

Разложим определители  $|U_d^i|$  и  $|V_d^i|$  по элементам последней и первой строк соответственно. Получаем

$$\left. \begin{aligned} |U_d^i| &= \sum_{r=k_i}^{i-2} |c_{r+1} \dots c_{i-1}| \Delta_{r-k_i} d_r + \\ &\quad + \Delta_{i-k_i-1} d_{i-1}, \\ |V_d^i| &= \bar{\Delta}_{l_i-i-1} d_{i+1} + \sum_{r=i+2}^{l_i} |b_{i-1} \dots b_{r-1}| \bar{\Delta}_{l_i-r} d_r. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Входящие в эти формулы миноры положительны. Поэтому определители неотрицательны и равны нулю, если только все входящие в них значения  $d_j$  равны нулю.

Лемма 1 справедлива также для системы уравнений с трехдиагональной циклической матрицей

$$A_c = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ b_N & & & & c_N & a_N \end{bmatrix},$$

если к условиям (2)-(5) добавить  $b_N c_1 \geq 0$ . Следует иметь в виду, что при построении матриц  $U^i, V^i$  строки с индексами  $i = 1, N$  могут оказаться внутренними, если  $c_1 < 0$  или  $b_N < 0$ . Системы с такими матрицами возникают при рассмотрении интерполяции периодическими сплайнами. В отличие от работ о монотонной или выпуклой интерполяции здесь учет этого случая вполне уместен.

В задачах интерполяции лемма 1 используется для получения  $m_i$  или  $M_i$  требуемых знаков в узлах сетки. При этом достаточные условия (5) неотрицательности вектора  $z$  зависят от элементов матрицы  $A$ , которые в свою очередь имеют сложную структуру. Возникает задача заменить отношения определителей их оценками сверху, не зависящими от элементов матрицы  $A$ . В конкретных примерах целям получения оценок будет служить

**ЛЕММА 2.** В условиях леммы 1 отношения определителей в (5),  $|U_d^i|/|U^i|$  и  $|V_d^i|/|V^i|$  суть монотонно убывающие функции  $b_j$  и  $c_{j+1}$  для  $j = k_i, \dots, i-2$  и  $j = i+1, \dots, l_i-1$  соответственно и монотонно возрастающие функции величин  $d_j$  для  $j = k_i, \dots, i-1$  и  $j = i+1, \dots, l_i$  соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем использовать тождества для угловых миноров трехдиагональных невырожденных матриц [11]:

$$\Delta_{j-k_i} = a_{j-1} \Delta_{j-k_i-1} - b_{j-2} c_{j-1} \Delta_{j-k_i-2}, \quad (7)$$

$$\tilde{\Delta}_{l_i-j} = a_{j+1} \tilde{\Delta}_{l_i-j-1} - b_{j+1} c_{j+2} \tilde{\Delta}_{l_i-j-2}. \quad (7a)$$

Рассмотрим отношения определителей, отличающихся на один порядок. Из (7) получаем

$$\frac{\Delta_{j-k_i-1}}{\Delta_{j-k_i}} = \frac{1}{a_{j-1} - b_{j-2}c_{j-1} \frac{\Delta_{j-k_i-2}}{\Delta_{j-k_i-1}}}.$$

Очевидно, дробь справа монотонно возрастает по  $b_{j-2}c_{j-1}$ . Продолжая процес, на каждом шаге можно делать заключение о монотонном возрастании дроби по новой паре  $b, c_{\tau+1}$ ,  $\tau = j-3, \dots, k_i$ . На финише получаем конечную цепную дробь.

Далее построим рекуррентные формулы  $E_0 = 1$ ,  $F_0 = 0$ ,  $E_r = E_{r-1}a_{i-r} - F_{r-1}$ ,  $F_r = E_{r-1}b_{i-r-1}c_{i-r}$ ,  $r = 1, \dots, i-j$ .

Рассмотрим тождество (7) для  $j = i$ . К определителю старшего порядка справа применим это тождество еще  $i-j-1$  раз. Получаем  $\Delta_{i-k_i} = E_{i-j}\Delta_{j-k_i} - F_{j-i}\Delta_{i-k_i-1}$ . Так как  $\Delta_{i-k_i} > 0$ , то  $E_r > 0$ ,  $F_r > 0$ . На  $r$ -м шаге в  $F_r$  добавляется новое произведение  $b_{i-r-1}c_{i-r}$ , т.е.  $F_r$  монотонно возрастает по этому произведению. В  $E_r$  через  $F_{r-1}$  добавляется произведение  $b_{i-r-2}c_{i-r-1}$ , и  $E_r$  монотонно убывает по этому произведению.

По аналогии с предыдущим можно записать

$$\frac{\Delta_{j-k_i}}{\Delta_{i-k_i}} = \frac{1}{E_{i-j} - F_{i-j} \frac{\Delta_{j-k_i-1}}{\Delta_{j-k_i}}}, \quad j = k_i, \dots, i-1.$$

Согласно установленным свойствам  $E_{i-j}, F_{i-j}$  дробь справа есть монотонно возрастающая функция произведений  $b, c_{\tau+1}$ ,  $\tau = k_i, \dots, i-2$ . Но, так как здесь  $b, c_{\tau+1} < 0$ , то отношение определителей монотонно убывает по этим параметрам.

Аналогично доказывается такое свойство для другого отношения определителей с использованием тождества (7а).

Далее подставляем разложение (6) в отношения определителей. Каждое слагаемое будет монотонно убывающей функцией  $b_j, c_{j+1}$  и монотонно возрастающей функцией  $d_j$  для указанных в формулировке леммы индексов. Лемма доказана.

Для решения системы (1) при выполнении (5) можно указать оценки сверху.

**ЛЕММА 3.** В условиях леммы 1 справедливы оценки

$$z_i \leq Z_i = \begin{cases} \frac{d_i}{a_i}, & \text{если } b_i \geq 0, c_i \geq 0; \\ \frac{|U_d^{i+1}|}{|U^{i+1}|}, & \text{если } b_i \geq 0, c_j < 0, \\ & j = k_i + 1, \dots, i, \quad c_{k_i} \geq 0; \\ \frac{|V_d^{i-1}|}{|V^{i-1}|}, & \text{если } c_i \geq 0, b_j < 0, \\ & j = i, \dots, l_i - 1, \quad b_{l_i} \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое неравенство (8) непосредственно следует из  $i$ -го уравнения системы (1).

Для вывода второго неравенства (8) рассматривается система уравнений

$$\tilde{U}^{i+1} Z^1 = d^1, \quad (9)$$

где  $\tilde{U}^{i+1}$  — матрица, описанная при рассмотрении леммы 1, а векторы  $Z^1 = (Z_{k_i}, \dots, Z_i)$ ,  $d^1 = (d_{k_i}, \dots, d_i)$ . В силу монотонности матрицы  $Z^1 \geq 0$ . В частности,  $Z_i^1 = |U_d^{i+1}|/|U^{i+1}|$ .

Уравнения системы (1) с теми же индексами, что в (9), можно представить в виде системы  $\tilde{U}^{i+1} z = d^1 - d'$ , где  $d' = (c_{k_i} z_{k_i-1}, 0, \dots, 0, b_i z_{i+1})$ . Ее решение представляем в виде  $z = Z^1 - z'$ . Вследствие того, что  $d' \geq 0$  имеем  $z' \geq 0$  и  $z \leq Z^1$ , т.е. второе неравенство доказано.

Аналогично доказывается третье неравенство (8) с использованием систем вида

$$\tilde{V}^{i-1} Z^2 = d^2, \quad (9a)$$

где снова матрица  $\tilde{V}^{i-1}$  описана при рассмотрении леммы 1, а векторы  $Z^2 = (Z_i, \dots, Z_{i_i})$ ,  $d^2 = (d_i, \dots, d_{i_i})$ .

Строки матрицы  $A$  с элементами  $b_j < 0$ ,  $c_j < 0$ , если они имеются, входят в матрицы  $\tilde{U}^{i+1}$  ( $i > j$ ) или  $\tilde{V}^{i-1}$  ( $i < j$ ). Для  $z_j$  справедливы оценки вида (8), где векторы  $d^1$  или  $d^2$  стоят в тех строках определителей  $|U_d^{i+1}|$  или  $|V_d^{i-1}|$ , которые соответствуют индексу  $j$ . Если  $b_i < 0$ ,  $c_i < 0$  для всех  $i$ , то системы (9)–(9a) совпадают с системой (1), и об оценках, не требующих решения системы (1), речь идти не может.

Задачи интерполяции сплайнами класса  $C^2$  связаны с заданием граничных условий. Среди используемых типов условий есть такие, для которых неравенства (2)–(4) выполняются при  $i = 0, N$ . Но есть и такие, для которых хотя бы часть из них не выполняется. Тем не менее свойство неотрицательности решения системы (1) в ряде случаев удается сохранить.

**ЛЕММА 4.** Для того, чтобы решение системы (1) было неотрицательным, достаточно, чтобы выполнялись неравенства: (2) для  $i = 1, \dots, N-2$ , (3) для  $i = 1, \dots, N-1$ , (4), (5) и  $c_1 \geq 0, b_{N-1} \geq 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} b_0 &< \frac{a_0 a_1}{|b_1| + c_1}, \\ c_N &< \frac{a_N a_{N-1}}{b_{N-1} + |c_{N-1}|} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ввиду предположения  $c_1 \geq 0$ ,  $b_{N-1} \geq 0$  матрицы  $U^i$ ,  $V^i$  не могут содержать нестандартные элементы  $b_0$ ,  $c_N$ .

а) Пусть  $b_0 \geq 0, c_N \geq 0$ . В доказательстве леммы 1 [8] это обеспечивает неположительность недиагональных элементов матрицы  $GA$  при  $i = 0, N$ . Диагональное преобладание для этой матрицы для индексов

$i = 2, \dots, N - 2$  обеспечивается условиями (3), а для индексов  $i = 0, 1, N - 1, N$  условиями (10), и лемма для этого случая справедлива.

б) Пусть далее  $b_0 < 0, c_N < 0$  (комбинация этих ограничений и предыдущих рассматривается аналогично). Исключим из (1)  $z_0$  и  $z_N$ . Имеем

$$z_0 = \frac{d_0 - b_0 z_1}{a_0}, \quad z_N = \frac{d_N - c_N z_{N-1}}{a_N}. \quad (11)$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем систему порядка  $N - 1$ :

$$\bar{A}z = \bar{d} \quad (12)$$

с граничными уравнениями

$$\bar{a}_1 z_1 + b_1 z_2 = \bar{d}_1,$$

$$c_{N-1} z_{N-2} + \bar{a}_{N-1} z_{N-1} = \bar{d}_{N-1},$$

где

$$\bar{a}_1 = a_1 - \frac{c_1 b_0}{a_0},$$

$$\bar{d}_1 = d_1 - \frac{c_1 d_0}{a_0},$$

$$\bar{a}_{N-1} = a_{N-1} - \frac{b_{N-1} c_N}{a_N},$$

$$\bar{d}_{N-1} = d_{N-1} - \frac{b_{N-1} d_N}{a_N}.$$

Для системы (12) неравенства (2) выполняются по условию. В граничных условиях  $\bar{a}_1 \geq a_1 > 0$ ,  $\bar{a}_{N-1} \geq a_{N-1} > 0$ , и неравенства типа (3) для индексов  $i = 1, N - 1$  выполняются в силу (10). Условия типа (4) для индексов  $i = 1, N - 1$  суть следствия неравенств (5) для этих индексов, а в целом  $0 \leq \bar{d}_1 \leq d_1$ ,  $0 \leq \bar{d}_{N-1} \leq d_{N-1}$ . Итак, мы находимся в условиях леммы 1 для системы (12), и если удастся показать, что условия типа (5) для нее выполняются, то  $z_i \geq 0, i = 1, \dots, N - 1$ , а согласно (11) и  $z_0 \geq 0, z_N \geq 0$ .

По крайней мере, в одной из матриц, которую обозначаем  $\bar{U}^i$ , в качестве  $a_{k_i}$  будет стоять элемент  $\bar{a}_1$ , а в одной из матриц  $\bar{V}^i$  в качестве  $a_{l_i}$  — элемент  $\bar{a}_{N-1}$ . В соответствующих им матрицах  $\bar{U}_2^i, \bar{V}_2^i$  вместо  $d_1$  и  $d_{N-1}$  будут стоять  $\bar{d}_1$  и  $\bar{d}_{N-1}$ . Заменяем в последних матрицах  $\bar{d}_1, \bar{d}_{N-1}$  на  $d_1$  и  $d_{N-1}$  соответственно. Тогда отношения определителей  $\bar{\Theta}_i = |\bar{U}_2^i|/|\bar{U}^i|$  и  $\bar{\kappa}_i = |\bar{V}_2^i|/|\bar{V}^i|$  согласно лемме 2 не уменьшаются.

Покажем, что они не уменьшаются и при замене  $\bar{a}_1, \bar{a}_{N-1}$  на  $a_1, a_{N-1}$ . Действительно, производную, например  $\bar{\Theta}_i$  по  $\bar{a}_1$  можно представить в виде  $d\bar{\Theta}_i/d\bar{a}_1 = (\bar{\Theta}_{i0} - \bar{\Theta}_i)|\bar{U}_2^i|_0/|\bar{U}^i|_0$ , где индекс "0" означает, что в  $|\bar{U}^i|$  и  $|\bar{U}_2^i|$   $b_1 = d_1 = 0$ . Но тогда согласно лемме 2  $\bar{\Theta}_{i0} \leq \bar{\Theta}_i$  и  $d\bar{\Theta}_i/d\bar{a}_1 \leq 0$ , и при замене  $\bar{a}_1$  на  $a_1 \leq \bar{a}_1$  значение  $\bar{\Theta}_i$  не уменьшается. Аналогично, при замене  $\bar{a}_{N-1}$  на  $a_{N-1}$  не уменьшается  $\bar{\kappa}_i$ . В результате имеем  $\bar{\Theta}_i \leq \Theta_i, \bar{\kappa}_i \leq \kappa_i$ . Но тогда, из предположения леммы о выполнении условий (5) для системы (1) следует выполнение подобных условий для системы (12), и она имеет неотрицательное решение. Лемма доказана.

В упомянутой во введении работе В.Л.Мирошниченко [4] в связи с монотонной или выпуклой интерполяцией рассматривался частный случай лемм 1 и 4, когда вместо нестрогих условий Якоби выполнялись условия  $b_i \geq 0, c_i \geq 0, i = 1, \dots, N-1$ . В этом случае в матрицах  $U^i, V^i$   $k_i = i-1, l_i = i+1$  и условия (5) имеют особенно простой вид:

$$d_i - c_i \frac{d_{i-1}}{a_{i-1}} - b_i \frac{d_{i+1}}{a_{i+1}} \geq 0, \quad i = 0, \dots, N. \quad (13)$$

## § 2. Базовые функции

Сплайны рассматриваются на сетке  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  с шагами  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . На отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  вводится локальная переменная  $t = (x - x_i)/h_i$ . Звено сплайна строится как линейная комбинация базовых функций  $\varphi_i(t), \psi_i(t)$  класса  $C^2[0, 1]$  и полиномов пер-

вой степени (традиционное представление обобщенного сплайна) или второй степени (новое представление [3,7]).

Исходя из соображений удобного выполнения условий интерполяции, на базовые функции налагаются ограничения:

$$\varphi_i(1) = \psi_i(0) = 1, \quad \varphi_i^{(r)}(0) = \psi_i^{(r)}(1) = 0, \quad r = 0, 1, 2; \quad (14)$$

$$\varphi_i'(1) > 2, \quad \psi_i'(0) < -2; \quad (14a)$$

$$\varphi_i''(1) > 0, \quad \psi_i''(0) > 0. \quad (14б)$$

Для интерполяции с соблюдением требований монотонности используется традиционное представление сплайна. Это, во-первых. Во-вторых, более удобные в приложениях результаты получаются, если предполагать, что базовые функции либо принадлежат классу  $C^3[0, 1]$ , либо являются сплайнами класса  $C^2$  на сетке  $\delta: 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$ . В последнем случае звенья сплайна принадлежат классу  $C^3[t_k, t_{k+1}]$ . При этом должны выполняться условия [1,2]:

$$\varphi_i^{(r)}(t) \geq 0, \quad (-1)^r \psi_i^{(r)}(t) \geq 0, \quad r = 0, 1, 2, 3. \quad (15)$$

При выборе тех или иных функций в качестве базовых достаточно требовать, чтобы выполнялись (14)–(14б), а из (15) только неравенства при  $r = 3$ . Действительно, из  $\varphi_i''(0) = 0$ ,  $\varphi_i''(1) > 0$ ,  $\varphi_i'''(t) \geq 0$  следует, что функция  $\varphi_i''(t)$  может равняться нулю только при  $t \in [0, t_k]$ ,  $t_k < 1$  (напри-

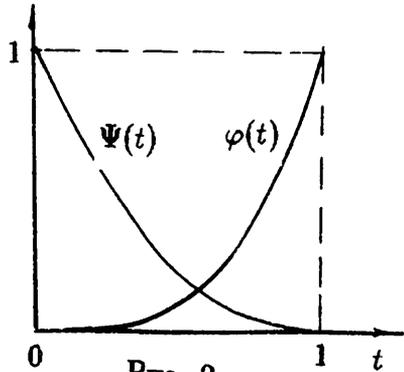


Рис. 2

мер, если  $\varphi_i(t)$  есть сплайн на сетке  $\delta$ ). При  $t > t_k$  функция  $\varphi_i''(t) > 0$  и монотонно возрастающая. Аналогично,  $\psi_i''(t)$  есть монотонно убывающая функция и возможно

$\psi_i''(t) = 0$  при  $t \in [t_i, 1]$ ,  $t_i > 0$  ( $\psi_i(t)$  — сплайн на сетке  $\delta$ ). Продолжая подобные рассуждения, приходим к выводам, что  $\varphi_i'(t)$ ,  $\varphi_i(t)$ ,  $\psi_i'(t)$  — монотонно возрастающие, а  $\psi_i(t)$  — монотонно убывающая функции, и все условия (15) выполняются. Из них следует, что  $\varphi_i(t)$ ,  $\varphi_i'(t)$ ,  $\psi_i(t)$  — выпуклые вниз, а  $\psi_i'(t)$  — выпуклая вверх функции. Пример базовых функций приведен на рис.2.

Кроме выполнения условий (15), требуется также, чтобы функция

$$Q_i(t) = [\psi_i'(t) + 1]\varphi_i''(t) - [\varphi_i'(t) - 1]\psi_i''(t) \geq 0, \quad (16)$$

причем равенство имело бы место только там, где  $\varphi_i''(t) = \psi_i''(t) = 0$ . Например, если  $\varphi_i(t)$ ,  $\psi_i(t)$  — сплайны на сетке  $\delta$ , то возможно  $Q_i(t) = 0$  при  $t \in [t_i, t_k]$ ,  $t_i \leq t_k$ . В остальных случаях должно быть  $Q_i(t) > 0$ .

Для интерполяции с соблюдением требований выпуклости используется новое представление обобщенного сплайна. Специфика этих задач, вообще говоря, не требует каких-либо дополнительных ограничений на базовые функции, кроме выполнения условий (14)–(14б).

#### ПРИМЕРЫ базовых функций.

а) Базовые функции *кубических сплайнов* имеют вид

$$\varphi_i(t) = t^3, \quad \psi_i(t) = (1-t)^3. \quad (17)$$

Условия (14)–(14б) и (15) для них выполняются, причем  $\varphi_i'(1) = -\psi_i'(0) = 3$ ,  $\varphi_i''(1) = \psi_i''(0) = 6$ . Функция  $Q_i(t) = 6[1-3t(1-t)] > 0$ . Другие базовые функции, применяемые на практике, содержат в своих выражениях функции (17) как частные случаи.

б) *Кубические сплайны с двумя дополнительными узлами* на промежутках  $[x_i, x_{i+1}]$ , не являющимися узлами интерполяции, с координатами  $t = p_i < 1$ ,  $t = q_i > 0$  в простейшем случае генерируются базовыми функциями — кубическими сплайнами

$$\varphi_i(t) = \frac{(t-p_i)_+^3}{(1-p_i)^3}, \quad \psi_i(t) = \frac{(q_i-t)_+^3}{q_i^3}. \quad (18)$$

Формулы (17) получаются отсюда при  $p_i = 0$ ,  $q_i = 1$ .

Условия (14)–(146) и (15) для функций (18) выполняются, причем

$$\begin{aligned}\varphi_i'(1) &= \frac{3}{1-p_i}, & \psi_i'(0) &= -\frac{3}{q_i}, \\ \varphi_i''(1) &= \frac{6}{(1-p_i)^2}, & \psi_i''(0) &= \frac{6}{q_i^2}.\end{aligned}$$

Функция

$$\begin{aligned}Q_i(t) &= 6 \left\{ \frac{(t-p_i)_+}{(1-p_i)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q_i-t)_+}{q_i^3} - \frac{3(t-p_i)_+(q_i-t)_+}{(1-p_i)^3 q_i^3} [(t-p_i)_+ + (q_i-t)_+] \right\},\end{aligned}$$

согласно (16), должна быть неотрицательной. Если  $p_i < q_i$ , то  $Q_i(t) > 0$  для всех  $t$ . Действительно, при  $t \leq p_i$  и  $t \geq q_i$  это очевидно, а при  $p_i < t < q_i$   $Q_i(t)$  есть квадратный трехчлен. Его дискриминант имеет вид:

$$D_i = -(1-p_i)^{-3} q_i^{-3} W^+(p_i, q_i) W^-(p_i, q_i),$$

где

$$W^\pm(p_i, q_i) = 3(q_i - p_i)^2 - \left( \sqrt{(1-p_i)^3} \pm \sqrt{q_i^3} \right)^2.$$

Нетрудно видеть, что  $W^+(p_i, q_i) < -\frac{1}{2}$ . Если  $W^-(p_i, q_i) > 0$ , то  $D_i > 0$  и  $Q_i(t)$  не имеет нулей на отрезке  $[p_i, q_i]$  и потому  $Q_i(t) > 0$ .

Пусть  $W^-(p_i, q_i) = w^+(p_i, q_i) w^-(p_i, q_i) \leq 0$ , где

$$w^\pm(p_i, q_i) = 3(q_i - p_i) \pm \left( \sqrt{(1-p_i)^3} - \sqrt{q_i^3} \right).$$

Пусть, например,  $w^+(p_i, q_i) > 0$ ,  $w^-(p_i, q_i) \leq 0$ . Тогда нетрудно показать, что  $Q_i'(t) < 0$  при  $t = p_i, q_i$ , и значит корни квадратного трехчлена  $t^{1,2} > q_i$ . Если же  $w^+(p_i, q_i) \leq 0$ ,  $w^-(p_i, q_i) > 0$ , то  $Q_i'(t) > 0$ , при  $t = p_i, q_i$  и  $t^{1,2} < p_i$ . В обоих случаях  $Q_i(t) > 0$  на отрезке  $[p_i, q_i]$ , что и требовалось доказать.

Если  $p_i \geq q_i$ , то  $Q_i(t) > 0$  при  $t < q_i$  и  $t > p_i$ , и  $Q_i(t) = 0$  при  $q_i \leq t \leq p_i$ . Таким образом, базовые функции (18) пригодны для построения монотонных кубических сплайнов.

В практике построения выпуклых сплайнов их оказалось недостаточно. Но возможности использования кубических сплайнов можно расширить, беря в качестве базовых функций [3]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(t) &= (1 - r_i)t^3 + r_i \frac{(t - p_i)_+^3}{(1 - p_i)^3}, \\ \psi_i(t) &= (1 - s_i)(1 - t)^3 + s_i \frac{(q_i - t)_+^3}{q_i^3}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $r_i, s_i$  — дополнительные параметры, т.е. здесь их по два для каждой базовой функции, тогда как в (18) только по одному. Функции (18) получаются из (19) при  $r_i = s_i = 1$ , а функции (17) — при  $r_i p_i = 0, s_i(1 - q_i) = 0$ .

Условия (14) для функций (19) выполняются с очевидностью. Подсчитываем

$$\begin{aligned} \varphi_i'(1) &= 3 \left[ 1 + \frac{r_i p_i}{1 - p_i} \right], \\ \varphi_i''(1) &= 6 \left[ 1 + \frac{r_i p_i (2 - p_i)}{(1 - p_i)^2} \right]; \\ \psi_i'(0) &= -3 \left[ 1 + \frac{s_i (1 - q_i)}{q_i} \right], \\ \psi_i''(0) &= 6 \left[ 1 + \frac{s_i (1 - q_i^2)}{q_i^2} \right]. \end{aligned}$$

Выполнение (14а) приводит к неравенствам

$$r_i > -\frac{1 - p_i}{3p_i}, \quad s_i > -\frac{q_i}{3(1 - q_i)}, \quad (20)$$

а выполнение (14б) — к неравенствам

$$r_i > -\frac{(1 - p_i)^2}{p_i(2 - p_i)}, \quad s_i > -\frac{q_i^2}{1 - q_i^2}. \quad (20а)$$

Объединяя (20) и (20а), получаем

$$\tau_i > -\frac{1-p_i}{p_i} - \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1-p_i}{2-p_i}\right), s_i > -\frac{q_i}{1-q_i} \min\left(\frac{1}{3}, \frac{q_i}{1+q_i}\right). \quad (21)$$

Это ограничения на дополнительные параметры  $\tau_i, s_i$ .

Требование выполнения условий (15) приводит к более сильным ограничениям на  $\tau_i, s_i$  [3], нежели (21), что снижает эффект от введения этих параметров. Поэтому для решения задач с соблюдением требований монотонности применяем функции (18), а функции (19) используем только в задачах выпуклой интерполяции, где они расширяют возможности метода [3].

Аналогичным образом можно строить базовые функции с большим числом дополнительных узлов, добавляя справа в (19) новые слагаемые и считая сумму всех коэффициентов равной 1.

в) *Рациональные сплайны* порождаются базовыми функциями

$$\varphi_i(t) = \frac{t^3}{1+p_i(1-t)}, \quad \psi_i(t) = \frac{(1-t)^3}{1+q_i t}, \quad (22)$$

где свободные параметры  $p_i > -1, q_i > -1$ . При  $p_i = q_i = 0$  получаются формулы (17).

Легко проверяются условия (14). Для проверки остальных подсчитываем производные базовых функций. Вместо  $p_i, q_i$  вводим  $\bar{p}_i = 1+p_i, \bar{q}_i = 1+q_i$ , и значит  $\bar{p}_i > 0, \bar{q}_i > 0$ . Имеем

$$\varphi'_i(t, \bar{p}_i) = t^2[2t + (3-2t)\bar{p}_i][t + (1-t)\bar{p}_i]^{-2},$$

$$\varphi''_i(t, \bar{p}_i) = 2t[t^2 + t(3-2t)\bar{p}_i + (3-3t+t^2)\bar{p}_i^2][t + (1-t)\bar{p}_i]^{-3},$$

$$\varphi'''_i(t, \bar{p}_i) = 6\bar{p}_i^3[t + (1-t)\bar{p}_i]^{-4},$$

$$\psi_i^{(r)}(t, \bar{q}_i) = (-1)^r \varphi_i^{(r)}(1-t, \bar{q}_i), \quad r = 1, 2, 3$$

Отсюда

$$\varphi'_i(1, \bar{p}_i) = 2 + \bar{p}_i, \quad \psi'_i(0, \bar{q}_i) = -2 - \bar{q}_i;$$

$$\varphi''_i(1, \bar{p}_i) = 2(1 + \bar{p}_i + \bar{p}_i^2), \quad \psi''_i(0, \bar{q}_i) = 2(1 + \bar{q}_i + \bar{q}_i^2),$$

и, очевидно, (14а), (14б) выполняются. Так как  $\varphi'''_i(t, \bar{p}_i) > 0$ ,  $\psi'''_i(t, \bar{q}_i) < 0$ , то по-предыдущему все неравенства (15) выполняются. Кроме того,  $\varphi^{IV}_i(t, \bar{p}_i) > 0$ ,  $\psi^{IV}_i(t, \bar{q}_i) > 0$ , и  $\varphi''_i(t)$ ,  $\psi''_i(t)$  – выпуклые вниз функции. Осталось исследовать  $Q_i(t)$ .

Условие  $Q_i(t) > 0$  используется для построения областей монотонности звеньев сплайна. В [1,2] для конкретных значений  $p_i$ ,  $q_i$  строились примеры таких областей и из их существования следовало, что  $Q_i(t) > 0$ . Здесь покажем это для любых значений  $p_i$ ,  $q_i$ .

Подставляя выражения  $\varphi_i^{(\tau)}(t, \bar{p}_i)$ ,  $\psi_i^{(\tau)}(t, \bar{q}_i)$ ,  $\tau = 1, 2$ , в формулу  $Q_i(t)$  (16), получаем

$$Q_i(t) = 2[t + (1-t)\bar{p}_i]^{-3}(1-t+t\bar{q}_i)^{-3} \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{kl}(t) \bar{p}_i^k \bar{q}_i^l,$$

где  $a_{lk}(t) = a_{kl}(1-t)$ . При этом

$$a_{00} = a_{10} = a_{11} = a_{33} = 0,$$

$$a_{20} = t^3(1-t)^3,$$

$$a_{21} = t^3(1-t)^2(1+2t),$$

$$a_{22} = t(1-t)[3-9t(1-t)+2t^2(1-t)^2],$$

$$a_{30} = (1-t)^6,$$

$$a_{31} = (1-t)^5(1+2t),$$

$$a_{32} = (1-t)^4(1+t+t^2).$$

Очевидно, что все коэффициенты двойной суммы неотрицательны, а значения  $a_{3l}$  и  $a_{l3}$ ,  $l = 0, 1, 2$ , одновременно в нуль не обращаются. Поэтому двойная сумма, а вместе с нею и функция  $Q_i(t)$  больше нуля.

г) Основные свойства рациональных сплайнов сохраняются для сплайнов экспоненциальных (см. например, [1,7]), базовые функции которых суть

$$\varphi_i(t, p_i) = t^3 \exp(-p_i(1-t)),$$

$$\psi_i(t, q_i) = (1 - t)^3 \exp(-q_i, t).$$

Рациональные функции (22) являются первыми членами разложения экспоненциальных функций по степеням  $-p_i(1 - t)$ ,  $-q_i t$ .

Теперь становится возможным перейти непосредственно к теме данной работы.

### §3. Интерполяция с переменами направления монотонности

1. Будем использовать представление звена интерполяционного сплайна на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  в виде линейной комбинации базовых функций и полинома первой степени [1,2]:

$$S_G(x) = f_{i+1}t + f_i(1 - t) + h_i[\Phi_{1i}(t)(\tilde{m}_i - \delta_{i+1/2}) + \Psi_{1i}(t)(\tilde{m}_{i+1} - \delta_{i+1/2})], \quad (23)$$

где  $\{f\}_0^N$  — исходные данные,  $\delta_{i+1/2} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$  — разделенные разности,  $\tilde{m}_i = S'_G(x_i)$ . В силу условий (14)–(146), как показано в [2],

$$\Phi_{1i}(t) = \{-\varphi_i(t) + t + [\varphi'_i(1) - 1][\psi_i(t) - 1 + t]\} \Delta_{1i}^{-1};$$

$$\Psi_{1i}(t) = \{[\psi'_i(0) + 1][\varphi_i(t) - t] + \psi_i(t) - 1 + t\} \Delta_{1i}^{-1};$$

$$\Delta_{1i} = \varphi'_i(1)\psi'_i(0) + \varphi'_i(1) - \psi'_i(0) < 0.$$

Представление (23) обеспечивает непрерывность первой производной сплайна в узлах сетки  $\Delta$ . Непрерывность второй производной обеспечивается выполнением условий  $S''_G(x_i - 0) = S''_G(x_i + 0)$  и граничных условий на концах отрезка  $[a, b]$ . Это дает систему уравнений:

$$\tilde{A}\tilde{m} = \tilde{d}, \quad (24)$$

где матрица  $\tilde{A}$  имеет такую же структуру, что и матрица  $A$  в (1). Ее элементы и элементы вектора  $\tilde{d}$  суть

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_i &= -\mu_i \psi_i''(0)/2\Delta_{1i}, \\ \tilde{c}_i &= -\lambda_i \varphi_{i-1}''(1)/2\Delta_{1,i-1}, \\ \tilde{a}_i &= \tilde{b}_i[\varphi_i'(1) - 1] - \tilde{c}_i[\psi_{i-1}'(0) + 1], \\ \tilde{d}_i &= \tilde{b}_i \varphi_i'(1)\delta_{i+1/2} - \tilde{c}_i \psi_{i-1}'(0)\delta_{i-1/2}, \\ & i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где  $\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}$ ,  $\mu_i = 1 - \lambda_i$ . Согласно (14)-(146)  $\tilde{b}_i > 0$ ,  $\tilde{c}_i > 0$ ,  $\tilde{a}_i > \tilde{b}_i + \tilde{c}_i$ .

Значения величин  $\tilde{b}_0$ ,  $\tilde{a}_0$ ,  $\tilde{d}_0$  и  $\tilde{c}_N$ ,  $\tilde{a}_N$ ,  $\tilde{d}_N$  зависят от вида граничных условий. В [2] они выведены для условий типа I:  $S'_G(x_0) = f'_0$ ,  $S'_G(x_N) = f'_N$ ,

$$\tilde{b}_0 = \tilde{c}_N = 0, \quad \tilde{a}_0 = \tilde{a}_N = 2, \quad \tilde{d}_0 = 2f'_0, \quad \tilde{d}_N = 2f'_N. \quad (26)$$

и условий типа II:  $S''_G(x_0) = f''_0$ ,  $S''_G(x_N) = f''_N$ ,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_0 &= -\psi_0''(0)/2\Delta_{10}, \\ \tilde{a}_0 &= \tilde{b}_0[\varphi_0'(1) - 1], \\ \tilde{d}_0 &= \tilde{b}_0 \varphi_0'(1)\delta_{1/2} - h_0 f''_0/2, \\ \tilde{c}_N &= -\varphi_{N-1}''(1)/2\Delta_{1,N-1}, \\ \tilde{a}_N &= -\tilde{c}_N[\psi'_{N-1}(0) + 1], \\ \tilde{d}_N &= -\tilde{c}_N \psi'_{N-1}(0)\delta_{N-1/2} + h_{N-1} f''_N/2. \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

В обоих случаях выполняются условия диагонального преобладания в первой и последней строках матрицы  $\tilde{A}$ . В случае интерполяции периодическими сплайнами с матрицей  $\tilde{A}_c$  (см. § 1) число уравнений в системе равно  $N$ , и все элементы матрицы имеют стандартный вид (25). В общем случае граничных условий элементы матрицы должны удовлетворять условиям леммы 4.

В [2] разработана методика построения монотонно-го на отрезке  $[a, b]$  сплайна, если  $\delta_{i+1/2} > 0$  ( $\delta_{i+1/2} < 0$ ),  $i = 0, \dots, N-1$ , за счет выбора его свободных параметров. Если допускать  $\delta_{i+1/2} = 0$ , то должно быть  $\bar{m}_i = 0$ ,  $\bar{m}_{i+1} = 0$ . Однако, теория неотрицательных решений системы (24) обеспечивает, вообще говоря, только  $\bar{m}_i \geq 0$ ,  $\bar{m}_{i+1} \geq 0$ . Здесь мы будем учитывать и этот случай, но уже как пример, когда на  $[x_i, x_{i+1}]$  происходят перемены знака у  $S'_G(x)$ .

В рассматриваемых задачах прежде всего следует решить вопрос о знаках  $\bar{m}_i$ . Учитывая условия леммы 1, которую мы намерены использовать, естественно принимать их совпадающими со знаками величин  $\bar{d}_i$ , т.е.  $\epsilon_i = \text{sign} \bar{m}_i = \text{sign} \bar{d}_i$ . Знак  $\bar{d}_i$  согласно (25), (26)–(26a) через  $\delta_{i-1/2}$ ,  $\delta_{i+1/2}$ ,  $f'_i$ ,  $f''_i$  зависит от исходных данных, а через базовые функции от свободных параметров сплайна. В одних случаях согласно системе (14)–(14б) он определяется однозначно, в других, например, при  $\delta_{i-1/2}$  и  $\delta_{i+1/2}$  разных знаков за счет выбора свободных параметров он может быть сделан как тем, так и другим. Мы принимаем условие  $\text{sign} \bar{d}_i = \text{sign} \bar{d}_i^0$ , где  $\bar{d}_i^0 = 3(\lambda_i \delta_{i-1/2} + \mu_i \delta_{i+1/2})$  — значение  $\bar{d}_i$  в случае базовых функций (17) кубических сплайнов. Если  $\bar{d}_i^0 = 0$ , то выбор знака  $\bar{d}_i$  остается в нашем распоряжении.

Рассмотрим типичные ситуации. Начнем с замечания о том, что если  $\varphi''_i(t)$ ,  $\psi''_i(t)$  не равны нулю одновременно на целом подинтервале  $[t_i, t_k] \subset [0, 1]$ , то функция  $S_G(x)$  не может иметь на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  более двух экстремумов. Действительно, согласно (14а), (15)  $\Phi'''_{1i} \geq 0$ ,  $\Psi'''_{1i}(t) \geq 0$ . Величины  $m_i - \delta_{i+1/2}$  и  $m_{i+1} - \delta_{i+1/2}$  могут иметь одинаковые или разные знаки. В первом случае  $S'''_G(x)$  — знакопостоянная на  $[x_i, x_{i+1}]$  функция, и значит,  $S'_G(x)$  — выпуклая функция и может иметь на этом отрезке не более двух нулей. Во втором случае  $S'_G(x)$  есть разность двух выпуклых неотрицательных функций, которые пересекаются не более, чем в двух точках, являющихся нулями разности. В обоих случаях  $S_G(x)$  имеет на  $[x_i, x_{i+1}]$  не более двух экстремумов.

Теперь о возможных ситуациях.

1)  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = \text{sign} \delta_{i+1/2}$ . На отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  будем добиваться монотонности звена сплайна, т.е. чтобы  $S'_G(x)$  имела здесь не более одного нуля (точка перегиба функции  $S_G(x)$ .)

2)  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$  и  $\varepsilon_i = \text{sign}(-\delta_{i+1/2})$  или  $\delta_{i+1/2} = 0$ . Это случай, когда  $S_G(x)$  имеет на  $[x_i, x_{i+1}]$  два локальных экстремума. Такой пример изображен на рис. 3.

3)  $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ . Каким бы ни было  $\delta_{i+1/2}$ , в этом случае  $S_G(x)$  всегда имеет на  $[x_i, x_{i+1}]$  один экстремум. Такой пример приведен на рис.4. Это главный для нас случай перемены направления монотонности сплайна.

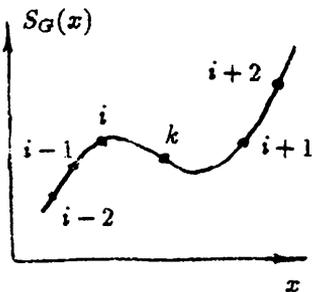


Рис. 3

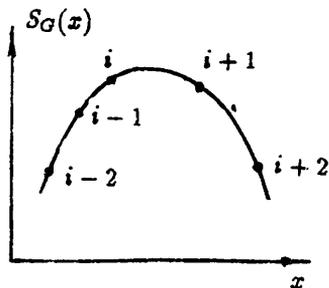


Рис. 4

4) Пусть теперь  $\delta_{j-1/2} = 0$ ,  $j = i, \dots, i + \nu$ ,  $\nu \geq 1$ . Тогда величинам  $\bar{d}_j$  следует придавать чередующиеся знаки, т.е.  $\varepsilon_{i-1} = -\varepsilon_i = \dots = (-1)^\nu \varepsilon_{i+\nu-1}$ . При этом, если  $\varepsilon_{i+\nu-1} = -\varepsilon_{i+\nu}$ , то  $S_G(x)$  имеет на интервалах  $[x_j, x_{j+1}]$  из отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+\nu+1}]$  по одному экстремуму чередующихся типов, как на рис.3, если считать точку  $k$  узлом интерполяции.

Если  $\varepsilon_{i+\nu-1} = \varepsilon_{i+\nu}$ , то указанный способ не проходит. Чтобы не исключать этот случай из рассмотрения, можно предложить такой прием. На отрезке горизонтальной прямой, проходящей через узлы интерполяции с номера-

ми  $i-1, \dots, i+\nu$ , вводим еще один узел, отличный от заданных. Тогда вновь оказываемся в условиях предыдущей схемы и цель достигается.

Особый случай — это, если  $\varphi_i''(t) = \psi_i''(t) = 0$  на  $[t_i, t_k] \subset [0, 1]$ , что, например, имеет место для базовых функций (18) при  $p_i > q_i$ . Здесь возможно  $S'_G(x) = 0$  на  $[t_i, t_k]$  и такой интервал в силу (16) может быть только один. В схемах 1,3,4 точки экстремумов могут заменяться на целые подинтервалы.

Этих рассуждений достаточно, чтобы читатель мог ориентироваться в возникающих ситуациях.

После установления знаков  $\bar{d}_i$  умножим  $i$ -е уравнение системы (24) на  $\varepsilon_i$ . Будем обозначать

$$\left. \begin{aligned} m_i &= \bar{m}_i \varepsilon_i, & a_i &= \bar{a}_i, & d_i &= \bar{d}_i \varepsilon_i, \\ b_i &= \bar{b}_i \varepsilon_i \varepsilon_{i+1}, & c_i &= \bar{c}_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i, & i &= 0, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Здесь  $\bar{b}_N = \bar{c}_0 = 0$ .

В результате получается система типа (1), для которой необходимые для применения леммы 1 условия типа (2)-(4) выполняются. При этом условия Якоби строгие для индексов  $i = 1, \dots, N-2$ . Они строгие и для индексов  $i = 0, N-1$  в случае граничных условий типа II, а для условий типа I они нестрогие.

2. Первая часть решения задачи состоит в нахождении неотрицательного решения системы (1) с коэффициентами (27). Требуется обеспечить выполнение неравенств (5). Свободные параметры сплайна входят в них весьма сложным образом. Поэтому, используя лемму 2, попытаемся заменить их более сильными неравенствами, но такими, у которых отношения определителей не зависели бы от свободных параметров сплайна, а только от исходных данных.

Для этого на базовые функции налагаем ограничения, а именно: при варьировании свободных параметров наименьшие значения  $\varphi_i'(1)$ ,  $-\psi_i'(0)$  одинаковы. Для функций (18) и (22) таким значением является 3, отвечающее кубическим сплайнам.

Из (25) следует, что  $\tilde{b}_i < \frac{1}{2}a_i$ ,  $\tilde{c}_i < \frac{1}{2}a_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ . Так как в определителях в (5) стоят  $b_i < 0$ ,  $c_i < 0$ , то, очевидно,

$$b_i > -\frac{1}{2}a_i, \quad c_i > -\frac{1}{2}a_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (28)$$

Значительно сложнее обстоит дело с оценками для  $d_i$ .

Чтобы при использовании оценок (28) отношения определителей в (5) не зависели от свободных параметров сплайна, очевидно, достаточно найти оценки типа  $d_i \leq \frac{1}{2}d_i^* a_i$ , где  $d_i^* > 0$  зависят только от исходных данных. Тогда величины  $a_i$  после вынесения их за знаки определителей взаимно сокращаются и цель будет достигнута.

Из предположений о базовых функциях следует, что

$$\left. \begin{aligned} 1 < \xi_i = \frac{\varphi_i'(1)}{\varphi_i'(1) - 1} \leq \frac{3}{2}, \\ 1 < \eta_i = \frac{\psi_i'(0)}{\psi_i'(0) + 1} \leq \frac{3}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

причем правые равенства соответствуют кубическим сплайнам.

Далее вводим

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} < \zeta_i = \frac{\varphi_i''(1)}{2[\varphi_i'(1) - \eta_i]}, \\ \frac{3}{2} < \chi_i = -\frac{\psi_i''(0)}{2[\psi_i'(0) + \xi_i]}. \end{aligned} \right\} \quad (29a)$$

Для базовых функций (18), (22), которые чаще всего здесь используются, при уклонении свободных параметров от их значений для кубических сплайнов величины  $\varphi_i''(1) \geq 6$ ,  $\psi_i''(0) \geq 6$  растут быстрее, чем  $\varphi_i'(1)$ ,  $-\psi_i'(0)$ , при ограниченных  $\xi_i, \eta_i$ . Левые неравенства в (29a) суть следствия подстановки в формулы  $\zeta_i, \chi_i$  нижних границ  $\xi_i, \eta_i$ , равных единице. Для функций (17)  $\zeta_i = \chi_i = 2$ .

В выражениях  $\bar{b}_i$ ,  $\bar{c}_i$  (25) представим

$$\Delta_{1i} = [\psi'_i(0) + 1][\varphi'_i(1) - \eta_i] = [\varphi'_i(1) - 1][\psi'_i(0) + \xi_i].$$

Тогда из (25) получаем тождества

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_i[\varphi'_i(1) - 1] &= \mu_i \chi_i, \\ -\bar{c}_i[\psi'_{i-1}(0) + 1] &= \lambda_i \zeta_{i-1}, \\ \bar{a}_i &= \lambda_i \zeta_{i-1} + \mu_i \chi_i, \\ \bar{d}_i &= \lambda_i \eta_{i-1} \zeta_{i-1} \delta_{i-1/2} + \mu_i \xi_i \chi_i \delta_{i+1/2}, \\ & i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Имея ввиду, что  $d_i = \varepsilon_i \bar{d}_i$ , и учитывая (29), при  $\text{sign} \delta_{i-1/2} = \text{sign} \delta_{i+1/2}$  получаем

$$d_i \leq \frac{3}{2} \varepsilon_i (\mu_i \chi_i \delta_{i+1/2} + \lambda_i \zeta_{i-1} \delta_{i-1/2}) \equiv \frac{3}{2} D_i. \quad (31)$$

Если  $\text{sign} \delta_{i-1/2} = \text{sign}(-\delta_{i+1/2})$ , то, полагая

$$\varphi'_i(1) = -\psi'_{i-1}(0), \quad (32)$$

снова получаем (31).

Для получения оценок величин  $d_i$  представим  $D_i$  в виде  $D_i = \frac{1}{3} d_i^* a_i - R_i$  и потребуем, чтобы  $R_i \geq 0$ . Тогда из (31) следуют желаемые оценки:

$$d_i \leq \frac{1}{2} d_i^* a_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (33)$$

Естественно было бы взять  $d_i^* = |d_i^0|$ . Но при  $d_i^0 = 0$  в общем случае нельзя будет выполнить неравенство (5) для соответствующих индексов. Поэтому полагаем

$$d_i^* = 3(\lambda_i |\delta_{i-1/2}| + \mu_i |\delta_{i+1/2}|), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Такая формула обеспечивает  $d_i^* \geq 0$ , если  $\delta_{i-1/2}$  и  $\delta_{i+1/2}$  одновременно не равны нулю. Если они одного знака, то  $d_i^* = |d_i^0|$ . О случае, когда обе разделенные разности равны нулю, будет сказано ниже.

При выбранном  $d_i^*$  условие  $R_i \geq 0$  сводится к

$$R_i \equiv \mu_i \chi_i \left( \frac{1}{3} d_i^* - \varepsilon_i \delta_{i+1/2} \right) + \lambda_i \zeta_{i-1} \left( \frac{1}{3} d_i^* - \varepsilon_i \delta_{i-1/2} \right) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (34)$$

Остановимся на граничных условиях, рассматривая только такие из них, для которых выполняются условия  $0 \leq \tilde{b}_0 \leq \frac{\tilde{a}_0}{2}$ ,  $0 \leq c_N \leq \frac{a_N}{2}$ . Тогда для неположительных  $b_0$ ,  $c_N$  выполняются оценки (28). В частности, это имеет место для граничных условий типа I и типа II. Принимаем в этих случаях

$$d_0^* = 2|f_0'|, \quad d_N^* = 2|f_N'|; \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} d_0^* &= 3 \left( |\delta_{1/2}| + \frac{h_0 |f_0''|}{6} \right), \\ d_N^* &= 3 \left( |\delta_{N-1/2}| + \frac{h_{N-1} |f_N''|}{6} \right). \end{aligned} \right\} \quad (35a)$$

Выражения (35) всегда совпадают с  $|d_0^0|$ ,  $|d_N^0|$ , а (35a) только при  $\delta_{1/2} f_0'' \leq 0$ ,  $\delta_{N-1/2} f_N'' \geq 0$ .

Для формул (35), (26) оценки (33) очевидны и

$$R_0 \equiv 0, \quad R_N \equiv 0. \quad (36)$$

Для формул (35a), (26a) оценки имеют место, если

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \chi_0 \left( \frac{1}{3} d_0^* - \varepsilon_0 \delta_{1/2} \right) + \frac{1}{3} \varepsilon_0 h_0 f_0'' \geq 0, \\ R_N &= \zeta_{N-1} \left( \frac{1}{3} d_N^* - \varepsilon_N \delta_{N-1/2} \right) - \frac{1}{3} \varepsilon_N h_{N-1} f_N'' \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (36a)$$

При выполнении (34), (36)–(36a) можно использовать оценки (28), (33). Если в отношения определителей в (5) вместо  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$  подставить их оценки, то, после вынесения из столбцов определителей  $a_j/2$  и сокращения на эти величины, по лемме 2 получаем:

$$\frac{|U_d^i|}{|U^i|} \leq \frac{|U_d^i|_0}{|U^i|_0} = C_i, \quad \frac{|V_d^i|}{|V^i|} \leq \frac{|V_d^i|_0}{|V^i|_0} = B_i, \quad (37)$$

где в определителях с индексом "о" по сравнению с исходными определителями осуществлены замены:  $a_j \rightarrow 2$ ,  $b_j \rightarrow -1$ ,  $c_j \rightarrow -1$ ,  $d_j \rightarrow d_j^*$ . Очевидно, что  $C_i$ ,  $B_i$  — конечные величины.

Неравенства (5) принимают в данном случае вид:

$$d_i \geq (\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i)_+ \tilde{c}_i C_i + (\varepsilon_i\varepsilon_{i+1})_+ \tilde{b}_i B_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (38)$$

где

$$(\varepsilon_j\varepsilon_{j+1})_+ = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}, \\ 0, & \text{если } \varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}. \end{cases}$$

Мы доказали утверждение, являющееся следствием лемм 1 и 2.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Если

а)  $\delta_{i-1/2}\delta_{i+1/2} \geq 0$  или

б)  $\delta_{i-1/2}\delta_{i+1/2} < 0$  и выполняется (32), то для того, чтобы система (1), порождаемая системой (24), имела неотрицательное решение  $m \geq 0$ , достаточно, чтобы выполнялись неравенства (34), из граничные аналоги и (38). Тогда компоненты вектора  $\tilde{m}$  имеют заранее обусловленные знаки.

3. Выполнение условий следствия 1 обеспечивает для  $\tilde{m}_i$  знаки, обусловленные в п.1. В соответствии с принятыми там соглашениями, мы должны еще обеспечить монотонность сплайна на тех отрезках  $[x_i, x_{i+1}]$ , которым отвечают  $\tilde{d}_i$ ,  $\tilde{d}_{i+1}$ ,  $\delta_{i+1/2}$  одного знака, т.е.  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = \text{sign} \delta_{i+1/2}$ . Того же знака будут и  $\tilde{m}_i$ ,  $\tilde{m}_{i+1}$ . На остальных отрезках будет иметь место одна или две перемены знаков у  $S'_G(x)$ .

Для решения этой задачи, как показано в [2], требуются оценки сверху для  $m_i$ ,  $m_{i+1}$ . Они получаются с помощью леммы 3. В ней оценки (8) зависят от знаков  $b_i$ ,  $c_i$ , которые в данном случае определяются знаками  $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}$  и  $\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i$  соответственно. Учитывая еще оценки (33), (37), получаем

**СЛЕДСТВИЕ 2.** В условиях следствия 1 справедливы оценки:

$$m_i \leq m_i^0 = \begin{cases} d_i^0/2, & \text{если } \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}, \\ C_{i+1}, & \text{если } -\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}, \\ B_{i-1}, & \text{если } \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}, \\ i = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (39)$$

Обозначим  $\bar{m}_i = m_i/|\delta_{i+1}/2|$ ,  $\bar{m}_{i+1} = m_{i+1}/|\delta_{i+1}/2|$  и будем рассматривать их как некоторые переменные. Пусть  $\bar{m}_i^0$ ,  $\bar{m}_{i+1}^0$  — их значения для эрмитова интерполяционного сплайна, относительно которого в [1] выведено условие монотонности. Сформулируем его в виде леммы.

**ЛЕММА 5.** Для того, чтобы звено обобщенного интерполяционного эрмитова сплайна было монотонным на  $[x_i, x_{i+1}]$ , необходимо и достаточно, чтобы в плоскости  $(\bar{m}_i, \bar{m}_{i+1})$  точка  $E(\bar{m}_i^0, \bar{m}_{i+1}^0) \in G_i$ , где  $G_i$  — выпуклая область, ограниченная отрезками осей координат  $OA$  и  $OB$ , причем  $A(0, \varphi_i'(1))$ ,  $B(-\psi_i'(0), 0)$ , и кривой  $\Gamma_i$  (рис. 5).

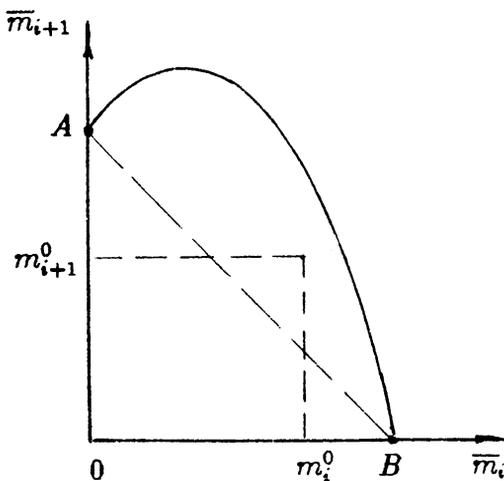


Рис. 5

Если  $Q_i(\tau) > 0$  ( $Q_i(\tau)$  определено в (16)), то  $\Gamma_i$  представляется параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_i &= 1 - \{[\psi_i'(0) + 1]\varphi_i''(\tau) + \psi_i''(\tau)\}Q_i^{-1}(\tau), \\ \bar{m}_{i+1} &= 1 - \{\varphi_i''(\tau) - [\varphi_i'(1) - 1]\psi_i''(\tau)\}Q_i^{-1}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Если для некоторых  $t \in [t_i, t_k] \subset [0, 1]$   $\varphi''(t) = \psi''(t) = 0$ , и значит,  $Q_i(t) = 0$ , то  $\Gamma_i$  есть прямая

$$\varphi_i'(1)\bar{m}_i - \psi_i'(0)\bar{m}_{i+1} + \varphi_i''(1)\psi_i''(0) = 0, \quad (40a)$$

проходящая через точки  $A$  и  $B$ .

Примеры областей монотонности приведены в [2].

Суммируя следствия 1, 2 и лемму 5, окончательно получаем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 1.** Для того, чтобы обобщенный интерполяционный сплайн класса  $C^2$  в узлах сетки  $\Delta$  имел значения  $\bar{m}_i$  заданных знаков и был монотонным на отрезках, для которых  $\epsilon_i = \epsilon_{i+1} = \text{sign} \delta_{i+1/2}$ , достаточно, чтобы прямоугольники  $P_i$  с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(\bar{m}_i^0, 0)$ ,  $(0, \bar{m}_{i+1}^0)$ ,  $(\bar{m}_i^0, \bar{m}_{i+1}^0)$  принадлежали областям  $G_i$ , определенным в лемме 5.

В случае монотонного звена сплайна теорема 1 сводит задачу к эрмитовой интерполяции при заданных  $\bar{m}_i^0$ ,  $\bar{m}_{i+1}^0$ . Для нее условия леммы 5 являются необходимыми и достаточными. Для исходной задачи лагранжевой интерполяции условия теоремы только достаточны, но не необходимы, ибо таков характер условий следствий 1 и 2.

4. Согласно теореме 1 возникает две ситуации в зависимости от выполнения условия  $\epsilon_i = \epsilon_{i+1} = \text{sign} \delta_{i+1/2}$ . Если оно не выполняется, то при данном  $i$  выбором свободных параметров сплайна достаточно удовлетворить условия следствия 1. Если выполняется, то требуется также удовлетворить условия следствия 2 и леммы 5. Этому вопросу посвящается данный пункт.

Начнем с анализа условий, входящих в следствие 1, дополняя их исследованием условий леммы 5.

В случае граничных условий типа I  $\bar{b}_i = \bar{c}_i = 0$ ,  $i = 0, N$  и неравенства (38) сводятся к очевидным  $d_0 \geq 0$ ,  $d_N \geq 0$ . Тривиальны и (34), сводящиеся к (36). Для условий типа II  $\bar{b}_0 > 0$ ,  $\bar{c}_N > 0$  и неравенства (38) нетривиальны. В дальнейшем, чтобы не загромождать изложения, будем предполагать, что имеют место граничные условия типа I или сплайн периодический.

После подстановки в (38)  $\bar{d}_i$  из (25) получаем

$$\bar{b}_i K_i + \bar{c}_i L_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (41)$$

где

$$K_i = \varphi'_i(1)\varepsilon_i \delta_{i+1/2} - (\varepsilon_i \varepsilon_{i+1})_+ B_i, \\ L_i = -\psi'_{i-1}(0)\varepsilon_i \delta_{i-1/2} - (\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i)_+ C_i.$$

Подставляя в (41)  $\bar{b}_i$ ,  $\bar{c}_i$  из (30), находим

$$\frac{\mu_i \chi_i K_i}{\varphi'_i(1) - 1} - \frac{\lambda_i \zeta_{i-1} L_i}{\psi'_{i-1}(0) + 1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (42)$$

В каждой паре неравенств (34) и (41), или (42), соответствующих индексу  $i$ , присутствуют производные базовых функций с индексами  $i-1, i$ , т.е. имеем систему  $2(N-1)$  нелинейных неравенств (в периодическом случае  $2N$ ) относительно  $2N$  неизвестных параметров сплайна. Если удастся указать способ выполнения пар неравенств, то тем самым будет решен вопрос о существовании решения системы.

Анализ можно проводить, перебирая пары неравенств либо в порядке возрастания индексов либо в порядке их убывания. Принимаем первое. Тогда, казалось бы, (34) есть линейное неравенство относительно  $\chi_i$ , а при выбранном  $\chi_i$  (42) есть тоже линейное неравенство относительно  $\varphi'_i(1)$ . Но дело в том, что получаемые таким образом ограничения могут противоречить исходным ограничениям  $\chi_i > 3/2$ ,  $\varphi'_i(1) \geq 3$ , а при  $\delta_{i-1/2}$  и  $\delta_{i+1/2}$  разных знаков также равенствам (32). Поэтому в общем случае приходится рассматривать все неравенства и равенства совместно. По найденным  $\chi_i$  и  $\varphi'_i(t)$  для конкретных базовых функций

можно будет найти параметры функции  $\psi_i(t)$ , в частности,  $-\psi'_i(0)$ .

Рассмотрим типичные ситуации, придерживаясь принятой в п.1 их классификации.

1)  $\epsilon_i = \epsilon_{i+1} = \text{sign} \delta_{i+1/2}$ , и значит,  $\epsilon_i \delta_{i+1/2} = |\delta_{i+1/2}|$ . Как условились, звено сплайна здесь строится как монотонное. Рассмотрим два случая.

а) Пусть  $\text{sign} \delta_{i-1/2} = \text{sign} \delta_{i+1/2}$ . Как в [2], будем выполнять (41), полагая  $K_i \geq 0$ ,  $L_i \geq 0$ , т.е.

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_i(1) &\geq (\epsilon_i \epsilon_{i+1})_+ B_i / |\delta_{i+1/2}|, \\ -\psi'_{i-1}(0) &\geq (\epsilon_{i-1} \epsilon_i)_+ C_i / |\delta_{i-1/2}|. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Неравенство (34) переходит в неравенство

$$(\chi_i - \zeta_{i-1})(|\delta_{i-1/2}| - |\delta_{i+1/2}|) \geq 0.$$

Оно было получено в [2] при изучении монотонной интерполяции. Очевидно,

$$\chi_i > 3/2, \text{ если } |\delta_{i-1/2}| = |\delta_{i+1/2}|, \quad (44)$$

$$\chi_i \geq \zeta_{i-1}, \text{ если } |\delta_{i-1/2}| > |\delta_{i+1/2}|, \quad (44a)$$

$$\chi_i \leq \zeta_{i-1}, \text{ если } |\delta_{i-1/2}| < |\delta_{i+1/2}|, \quad (44b)$$

Исходные ограничения, а также (43), (44), (44a) суть оценки снизу на параметры сплайна и их выполнение не представляет труда. Иное дело — неравенство (44b). Его можно рассматривать как оценку сверху на параметры функции  $\psi_i(t)$ , в частности, на  $-\psi'_i(0)$ . Если такого рода оценка была получена на предыдущем шаге, то она может оказаться несовместной с (43), а сама оценка (44b) может оказаться несовместной с оценкой снизу для  $-\psi'_i(0)$  на последующем шаге. Положение спасает то, что для всех  $\varphi'_i(1)$  имеют место только оценки снизу. Поэтому всегда можно увеличить  $\zeta_{i-1}$ , не меняя в ее формуле  $\eta_{i-1}$ , что позволяет увеличить  $\chi_i$  до необходимого значения.

б) Пусть  $\text{sign} \delta_{i-1/2} = \text{sign}(-\delta_{i+1/2})$  и выполняется (32). Из (42), (34) получаем

$$\mu_i \chi_i K_i + \lambda_i \zeta_{i-1} L_i \geq 0, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \mu_i \chi_i (|\delta_{i-1/2}| - |\delta_{i+1/2}|) + \\ & + \zeta_{i-1} \left( (1 + \lambda_i) |\delta_{i-1/2}| + \mu_i |\delta_{i+1/2}| \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (45a).$$

В (45)  $L_i \leq 0$ , и значит, должно быть  $K_i \geq 0$ . Если  $|\delta_{i-1/2}| \geq |\delta_{i+1/2}|$ , то (45a) выполняется при любом  $\chi_i > > 3/2$ . Тогда значения  $\varphi'_i(1)$  и  $\chi_i$  выбираются так, чтобы выполнялись  $K_i \geq 0$  и (45).

Если  $|\delta_{i-1/2}| < |\delta_{i+1/2}|$ , то для совместности (45) и (45a) должно быть

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_i L_i}{K_i} & \leq \frac{\mu_i \chi_i}{\zeta_{i-1}} \leq \\ & \leq \frac{(1 + \lambda_i) |\delta_{i-1/2}| + \mu_i |\delta_{i+1/2}|}{|\delta_{i+1/2}| - |\delta_{i-1/2}|}. \end{aligned} \quad (46)$$

Отсюда находим

$$\varphi'_i(1) = -\psi'_{i-1}(0) \geq \frac{\Theta_{1i}}{\omega_i},$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_{1i} & = \lambda_i (|\delta_{i+1/2}| - |\delta_{i-1/2}|) (\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i) + C_i + \\ & + \left( (1 + \lambda_i) |\delta_{i-1/2}| + \mu_i |\delta_{i+1/2}| \right) (\varepsilon_i \varepsilon_{i+1}) + B_i, \end{aligned}$$

$$\omega_i = \lambda_i |\delta_{i-1/2}|^2 + |\delta_{i-1/2}| |\delta_{i+1/2}| + \mu_i |\delta_{i+1/2}|^2.$$

При этом выполняется  $K_i \geq 0$ . Значение  $\chi_i$  находится согласно (46). При этом по-прежнему следует иметь ввиду возможность увеличения  $\zeta_{i-1}$ .

А теперь об условиях леммы 5. Они требуют попадания прямоугольника  $P_i$  в выпуклую область  $G_i$  плоскости  $(\bar{m}_i, \bar{m}_{i+1})$ .

Укажем такие ситуации, из повторения которых строится монотонная интерполяция, рассмотренная в [2].

Если  $\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+2}$  и  $\text{sign} \delta_{i-1/2} = \text{sign} \delta_{i+1/2} = \text{sign} \delta_{i+3/2}$ , то согласно (37)  $B_i = \frac{d_{i+1}^*}{2}$ ,  $C_{i+1} = \frac{d_i^*}{2}$ . Из

(39) находим  $m_i^0 = \frac{d_i^*}{2}$ ,  $m_{i+1}^0 = \frac{d_{i+1}^*}{2}$ . Неравенства (41)

для индексов  $i$ ,  $i+1$  можно выполнять в виде (43), т.е.

$$\varphi'_i(1) \geq \frac{d_{i+1}^*}{2|\delta_{i+1/2}|}, \quad -\psi'_i(0) \geq \frac{d_i^*}{2|\delta_{i+1/2}|}.$$

Эти формулы обеспечивают попадание в  $G_i$ , по крайней мере, трех вершин прямоугольника  $P_i$ . В [2] предложены способы выбора  $\varphi'_i(1)$ ,  $-\psi'_i(0)$  в соответствии с указанными неравенствами, обеспечивающие попадание в  $G_i$  и четвертой вершины  $E(\bar{m}_i^0, \bar{m}_{i+1}^0)$ .

Для других случаев монотонности звена сплайна мы ограничиваемся рекомендацией универсального приема, а именно: добавить к выполняемым неравенствами еще два:  $\varphi'_i(1) \geq 2\bar{m}_{i+1}^0$ ,  $-\psi'_i(0) \geq 2\bar{m}_i^0$ . Это обеспечивает попадание  $P_i$  в треугольник ОАВ (рис.5).

Для схем, где на  $[x_i, x_{i+1}]$  происходят перемены знака  $S'_G(x)$ , выполнения условий леммы 5 не требуется и достаточно выполнения условий следствия 1. Это схемы 2-4.

2)  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ ,  $\varepsilon_i = \text{sign}(-\delta_{i+1/2})$  или  $\delta_{i+1/2} = 0$ . В этом случае на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  имеется два локальных экстремума сплайна. Несмотря на такую особенность, аналитически он симметричен случаю монотонности "б". Это есть следствие того, что  $\varepsilon_i = \text{sign} \delta_{i-1/2}$ . Из (42), (34) снова получаем (45), где  $K_i \leq 0$  и, следовательно,  $L_i \geq 0$ , и неравенство

$$\lambda_i \zeta_{i-1} (|\delta_{i+1/2}| - |\delta_{i-1/2}|) + \chi_i \left[ (1 + \mu_i) |\delta_{i+1/2}| + \lambda_i |\delta_{i-1/2}| \right] \geq 0. \quad (47)$$

Если  $|\delta_{i+1/2}| \geq |\delta_{i-1/2}|$ , то это неравенство выполняется при любом  $\chi_i > 3/2$ . Значения  $-\psi_{i-1}(0)$  и  $\chi_i$  выбираются так, чтобы выполнялись  $L_i \geq 0$  и (45).

Если  $|\delta_{i+1/2}| < |\delta_{i-1/2}|$ , то для совместности (45) и (47) должно быть

$$-\frac{\mu_i K_i}{L_i} \leq \frac{\lambda_i \zeta_{i-1}}{\chi_i} \leq \leq \frac{(1 + \mu_i)|\delta_{i+1/2}| + \lambda_i|\delta_{i-1/2}|}{|\delta_{i-1/2}| - |\delta_{i+1/2}|}. \quad (48)$$

Отсюда находим  $\varphi'_i(1) = -\psi'_{i-1}(0) = \frac{\Theta_{2i}}{\omega_i}$ , где

$$\Theta_{2i} = \mu_i(|\delta_{i-1/2}| - |\delta_{i+1/2}|)(\varepsilon_i \varepsilon_{i+1})_+ B_i + \\ + \left[ (1 + \mu_i)|\delta_{i+1/2}| + \lambda_i|\delta_{i-1/2}| \right] (\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i)_+ C_i.$$

При этом выполняется  $L_i \geq 0$ . Значение  $\chi_i$  находится согласно (48).

3)  $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ . При любом  $\delta_{i+1/2}$  это случай одного экстремума сплайна на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ . Возможны три подслучая.

а)  $\varepsilon_i = \text{sign} \delta_{i+1/2} = \text{sign} \delta_{i-1/2}$ . Неравенства (34), (41) выполняются так же, как и в случае 1а при  $(\varepsilon_i \varepsilon_{i+1})_+ = 0$ .

б)  $\varepsilon_i = \text{sign} \delta_{i+1/2} = \text{sign}(-\delta_{i-1/2})$ . Неравенства (34), (42) выполняются, как в случае 1б.

в)  $\varepsilon_i = \text{sign}(-\delta_{i+1/2}) = \text{sign} \delta_{i-1/2}$ . Неравенства (34) и (42) выполняются по схеме случая 2.

4)  $\delta_{j-1/2} = 0$ ,  $j = i, \dots, i + \nu$ ,  $\nu \geq 1$ . Придавая величинам  $\bar{d}_i$  чередующиеся знаки, приходим к схеме с чередованием экстремумов сплайна на отрезках  $[x_j, x_{j+1}]$ . При этом в формулах (38)  $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1})_+ = 0$  и они выполняются с очевидностью.

5. В заключение параграфа остановимся на выводах изложенной теории применительно к *кубическим сплайнам* с базовыми функциями (17), которые не содержат свободных параметров. Здесь элементы (25) матрицы  $A$  суть  $\bar{b}_i = \mu_i$ ,  $\bar{c}_i = \lambda_i$ ,  $\bar{a}_i = 2$ , а вектора  $\bar{d} - \bar{d}_i = d_i^0$  и в (5) нет необходимости заменять  $b_j$ ,  $c_j$  их оценками (28). Формулы (5) используются в виде:

$$d_i \geq (\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i)_+ \lambda_i \frac{|U_{d_i}^i|}{|U^i|} + (\varepsilon_i \varepsilon_{i+1})_+ \mu_i \frac{|V_{d_i}^i|}{|V^i|}, \quad (49)$$

$$i = 0, \dots, N,$$

где в определителях стоят  $b_j = -\mu_j$ ,  $c_j = -\lambda_j$ ,  $a_j = 2$ , и только  $d_j^0$  заменены на  $d_j^*$ . Поскольку в этих неравенствах свободных параметров нет, то они представляют собой ограничения на исходные данные, при выполнении которых существует неотрицательное решение системы (1), порожденной системой (24).

Согласно (29а) в данном случае  $\chi_i = \zeta_i = 2$ . Поэтому ограничения другой группы (34) сводятся к  $d_i^* - \varepsilon_i d_i^0 \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , и, очевидно, выполняются. В проверке будут нуждаться только неравенства (36а), возникающие в случае граничных условий типа П.

Граница  $G_i$  (40) области монотонности  $G_i$  в плоскости  $(\bar{m}_i, \bar{m}_{i+1})$  (рис.5) есть дуга эллипса с центром в точке  $O(2,2)$ , проходящего через точки  $A(0,3)$ ,  $F(3,3)$ ,  $B(3,0)$  и касающегося осей координат в точках  $A$  и  $B$  [1,2]. В область  $G_i$  вписывается квадрат со стороной, равной 3. Поэтому, чтобы в соответствии с леммой 5  $E(\bar{m}_i^0, \bar{m}_{i+1}^0) \in G_i$ , должно быть

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_i^0 &= \frac{m_i^0}{|\delta_{i+1/2}|} \leq 3, \\ \bar{m}_{i+1}^0 &= \frac{m_{i+1}^0}{|\delta_{i+1/2}|} \leq 3, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где величины  $m_i^0$ ,  $m_{i+1}^0$  определяются из (8) формулами типа

$$m_i^0 = \begin{cases} \frac{d_i^*}{2}, & \text{если } \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}, \\ \frac{|U_{d^*}^{i+1}|}{|U^{i+1}|}, & \text{если } -\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}, \\ \frac{|V_{d^*}^{i-1}|}{|V^{i-1}|}, & \text{если } \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}. \end{cases}$$

Мы доказали

**СЛЕДСТВИЕ 3.** Для того, чтобы интерполяционный кубический сплайн класса  $S^2$  имел значения  $\bar{m}_i$  заданных знаков и был монотонным на интервалах, для которых  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} =$

$= \text{sign} b_{i+1/2}$ , достаточно, чтобы выполнялись (49), а для участков монотонности также и (50).

#### §4. Интерполяция с переменами направления выпуклости

1. Используем представление звена сплайна на  $[x_i, x_{i+1}]$  в виде линейной комбинации базовых функций и полиномов второй степени [3]:

$$S_G(x) = f_{i+1}t + f_i(1-t) + h_i^2[\Phi_{2i}(t)M_i + \Psi_{2i}(t)M_{i+1}], \quad (51)$$

где

$$M_i = S_G''(x_j),$$

$$\Phi_{2i} = \bar{u}_i[\varphi_i(t) - t^2] - \bar{v}_i[\psi_i(t) - (1-t)^2] + u_i t(1-t),$$

$$\Psi_{2i} = -\Phi_{2i}(t) - \frac{1}{2}t(1-t).$$

Здесь  $u_i, \bar{u}_i, \bar{v}_i$  - константы. С константой  $u_i$  связана константа  $v_i$  соотношением

$$u_i + v_i = -\frac{1}{2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (52)$$

Константы  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  выражаются через  $u_i, v_i$  формулами

$$\bar{u}_i = [1 + u_i \psi_i''(0)] \Delta_{2i}^{-1}, \quad \bar{v}_i = [1 + v_i \varphi_i''(1)] \Delta_{2i}^{-1},$$

где по предположению

$$\Delta_{2i} = \frac{1}{2} \varphi_i''(1) \psi_i''(0) - \varphi_i''(1) - \psi_i''(0) > 0. \quad (53)$$

Вследствие (52)  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  связаны соотношением:

$$\bar{u}_i \varphi_i''(1) + \bar{v}_i \psi_i''(0) = -1, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (54)$$

Представление (51) обеспечивает непрерывность второй производной сплайна в узлах сетки  $\Delta$ . Непрерывность первой производной обеспечивается выполнением

условий  $S'_G(x_i - 0) = S'_G(x_i + 0)$ . Это дает систему уравнений [3]:

$$\tilde{A}\tilde{M} = \tilde{d}, \quad (55)$$

где матрица  $\tilde{A}$  имеет такую же структуру, что и матрица  $A$  в (1). Ее элементы и элементы вектора  $\tilde{d}$  следующие.

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= [\varphi'_i(1) - 2] \Delta_{2i}^{-1}, \quad \beta_i = -[\psi'_i(0) + 2] \Delta_{2i}^{-1}, \\ \rho_i &= \alpha_i \psi''_i(0) - 1, \quad \sigma_i = \beta_i \varphi''_i(1) - 1. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Согласно (14a)-(14б) и (53)  $\alpha_i > 0$ ,  $\beta_i > 0$ .

В этих обозначениях

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_i &= \lambda_i [\beta_i + (\sigma v)_i], \\ \tilde{c}_i &= \mu_i [\alpha_{i-1} + (\rho u)_{i-1}], \\ \tilde{a}_i &= \frac{1}{2} - \tilde{b}_i - \tilde{c}_i, \\ \tilde{d}_i &= \delta_i^2, \\ & i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

где  $\delta_i^2 = (\delta_{i+1/2} - \delta_{i-1/2}) / (h_{i-1} + h_i)$  — вторые разделенные разности.

Значения величин  $\tilde{b}_0$ ,  $\tilde{a}_0$ ,  $\tilde{d}_0$  и  $\tilde{c}_N$ ,  $\tilde{a}_N$ ,  $\tilde{d}_N$  зависят от вида граничных условий. В [3] они получены для условия типа I:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_0 &= \beta_0 + (\sigma u)_0, \\ \tilde{a}_0 &= \frac{1}{2} - \tilde{b}_0, \\ \tilde{d}_0 &= \delta_0^2 = \frac{\delta_{1/2} - f'_0}{h_0}, \\ \tilde{c}_N &= \alpha_{N-1} + (\rho u)_{N-1}, \\ \tilde{a}_N &= \frac{1}{2} - \tilde{c}_N, \\ \tilde{d}_N &= \delta_N^2 = \frac{f'_N - \delta_{N-1/2}}{h_{N-1}} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

и типа II:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_0 &= \tilde{c}_N = 0, \quad \tilde{a}_0 = \tilde{a}_N = 1/2, \\ \tilde{d}_0 &= \delta_0^2 = f''_0/2, \quad \tilde{d}_N = \delta_N^2 = f''/2. \end{aligned} \right\} \quad (58a)$$

В периодическом случае число уравнений  $N$  и все их коэффициенты стандартного вида (57).

Предполагается, что  $\bar{b}_i \geq 0$ ,  $\bar{c}_i \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Тогда условия диагонального преобладания матрицы  $\bar{A}$  суть

$$\bar{a}_i > \frac{1}{4}, \quad \bar{b}_i + \bar{c}_i < \frac{1}{4}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (59)$$

В выражениях  $\bar{b}_i$ ,  $\bar{c}_i$  (57) заменим  $u_i$ ,  $v_i$  на  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$ . Получаем

$$\Delta_{2i} \sigma_i \bar{v}_i + 1 = \bar{b}_i \varphi_i''(1), \quad \Delta_{2i} \rho_i \bar{u}_i + 1 = \bar{c}_{i+1} \psi_i''(0), \\ i = 1, \dots, N - 2. \quad (60)$$

где  $\bar{b}_i = \bar{b}_i / \lambda_i$ ,  $\bar{c}_{i+1} = \bar{c}_{i+1} / \mu_{i+1}$ .

Такие же неравенства можно получить для индексов  $i = 0, N - 1$  в случае граничных условий типа I. В случае условий типа II мы добавляем их для единообразия, вводя фиктивные  $\bar{b}_0$ ,  $\bar{c}_N$ , которые можно использовать во всех конструкциях, кроме уравнений (55).

Если  $\rho_i = \sigma_i = 0$ , то равенства (60) не зависят от  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$ . Если  $\rho_i \neq 0$ ,  $\sigma_i \neq 0$ , то исключая  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$  из (54), (60), получаем [3]:

$$F[\varphi_i] G[\psi_i] - 1 + \Delta_{2i} (\bar{b}_i \rho_i + \bar{c}_{i+1} \sigma_i) = 0, \quad (61) \\ i \in \{0, \dots, N - 1\},$$

где обозначено

$$F[\varphi_i] = \frac{1}{2} \varphi_i''(1) - \varphi_i'(1) + 1, \quad G[\psi_i] = \frac{1}{2} \psi_i''(0) + \psi_i'(0) + 1.$$

2. В [3] рассмотрена выпуклая интерполяция, которой отвечают  $\bar{d}_i > 0$  ( $\bar{d}_i < 0$ ),  $i = 0, \dots, N$ . Если допускать  $\bar{d}_i = \delta_i^2 = 0$ , то должно быть  $\bar{M}_{i-1} = \bar{M}_i = \bar{M}_{i+1} = 0$ , что не гарантируется теорией неотрицательных решений системы (55). Такой случай можно рассматривать лишь как пример того, когда на  $[x_i, x_{i+1}]$  происходят перемены знака  $S_G''(x)$ .

Подобно соглашению в §3, будем принимать  $\epsilon_i = \text{sign } \bar{M}_i = \text{sign } \bar{d}_i$ . По сравнению с ситуацией в §3, здесь  $\bar{d}_i$

не зависит от параметров базовых функций, что упрощает дело. Если  $\bar{d}_i = 0$ , то выбор знака  $\bar{d}_i$  остается в распоряжении исследователя.

Из (51), принимая во внимание, что  $\Phi_{2i}''(t) + \Psi_{2i}''(t) = 1$ , получаем

$$S_G''(x) = \bar{M}_i + (\bar{M}_{i+1} - \bar{M}_i)\Psi_{2i}''(t), \quad (62)$$

где согласно (52)–(54)

$$\Psi_{2i}''(t) = -\bar{u}_i\varphi_i''(t) - \bar{v}_i[\psi_i''(0) - \psi_i''(t)]. \quad (63)$$

причем  $\Psi_{2i}''(0) = 0$ ,  $\Psi_{2i}''(1) = 1$ .

Из-за наличия у  $\Psi_{2i}''(t)$ , кроме параметров базовых функций, также дополнительных параметров  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$ , связанных равенствами (54), возможны качественно различные реализации функции  $\Psi_{2i}''(t)$ , а значит, и  $S_G''(x)$  (62).

Пусть выполняются условия (15), причем  $\varphi_i'''(t)$ ,  $\psi_i'''(t)$  не равны нулю одновременно на целом подинтервале  $[t_i, t_k] \subset [0, 1]$ . Тогда, если  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$  одного знака (минус согласно (54)), то  $S_G''(x)$  не может иметь на  $[x_i, x_{i+1}]$  более одного нуля (точка перегиба графика функции  $S_G(x)$ ). Действительно, в этом случае  $\varphi_i''(t)$  и  $\psi_i''(0) - \psi_i''(t)$  суть монотонно возрастающие функции, причем в окрестности любого  $t$ , по крайней мере, одна из них строго монотонна. Вследствии этого функция  $\Psi_{2i}''(t)$  тоже строго монотонно возрастает от 0 до 1. Отсюда функция  $S_G''(x)$  является строго монотонной на  $[x_i, x_{i+1}]$ , изменяется от  $\bar{M}_i$  до  $\bar{M}_{i+1}$  и не может иметь здесь более одного нуля.

Если  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$  разных знаков, то что-либо априори сказать о функции  $\Psi_{2i}''(t)$  нельзя. Однако, если добавить, что существуют  $\varphi_i^{IV}(t) \geq 0$ ,  $\psi_i^{IV}(t) \geq 0$ , как например в случае базовых функций (22) рациональных сплайнов, то существует знакопостоянная функция  $\Psi_{2i}^{IV}(t)$ , и значит,  $\Psi_{2i}''(t)$  — выпуклая функция. В этом случае она, а значит, и  $S_G''(x)$  не могут иметь на интервале более двух нулей.

Если при выполнении (15)  $\varphi_i'''(t) = \psi_i'''(t) = 0$  на подинтервале  $[t_i, t_k]$ , (это может быть в случаях базовых функций (18), (19)), то  $\Psi_{2i}''(t)$  и  $S_G''(x)$  на нем — константы, причем возможно  $S_G''(x) = 0$ , и такой элемент может быть

частью звена этой функции, в том числе в случае ее монотонности или выпуклости.

Если условия (15) не выполняются, то классификацию функций  $S''_G(x)$  не на чем основывать.

Рассмотрим возможные ситуации со знаками величин  $\bar{d}_i$ .

1)  $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$ . Звено сплайна будем строить выпуклым, отдавая предпочтение вариантам с монотонной функцией  $S''_G(x)$ .

2)  $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$ . На отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  происходит перемена направления выпуклости. Снова будем стараться использовать схемы с монотонными функциями  $S''_G(x)$ , и значит, одной переменной направления выпуклости. Даже, если такая функция немонотонная, но выпуклая, то, все равно, у нее возможна только одна перемена знака.

3)  $\delta_j^2 = 0$ ,  $j = i, \dots, i + \nu$ ,  $\nu \geq 0$ . Тогда величинам  $\bar{d}_j$  следует придавать чередующиеся знаки, т.е.  $\epsilon_{i-1} = -\epsilon_i = \dots = (-1)^{\nu+1} \epsilon_{i+\nu}$ . Если при этом  $\epsilon_{i+1} = -\epsilon_{i+\nu+1}$ , то на каждом из отрезков  $[x_j, x_{j+1}] \subset [x_{i-1}, x_{i+\nu+1}]$  функция  $S''_G(x)$  имеет по одной перемене знака, как в случае 2. Если  $\epsilon_{i+\nu} = \epsilon_{i+\nu+1}$ , то, как в §3, можно рекомендовать на отрезке прямой, соединяющей узлы интерполяции с номерами  $i-1, \dots, i+\nu+1$ , ввести еще один новый узел. Тогда снова оказываемся в условиях случая 2.

После установления знаков  $\bar{d}_i$  умножим каждое уравнение системы (55) на  $\epsilon_i$  и введем обозначения по аналогии с (27). В результате получается система типа (1), для которой выполняются условия (2) и (4). При этом условия Якоби (2) строгие для индексов  $i = 1, \dots, N-2$ . Они строгие и для индексов  $i = 0, N-1$  в случае граничных условий типа I (формулы (58)) и нестрогие для условий типа II (формулы (58a)).

Условия диагонального преобладания получаются из (59) заменой  $\bar{b}_i$ ,  $\bar{c}_i$  на  $|b_i|$ ,  $|c_i|$ . Они выполняются, если требовать

$$a_i > \frac{1}{4}, \quad \bar{b}_i < \frac{\lambda_i}{4}, \quad \bar{c}_i < \frac{\mu_i}{4}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (64)$$

2. Для применения леммы 1 требуется выполнять условия (5). Как и в §3, попытаемся заменить отношения определителей более простыми отношениями, не зависящими от свободных параметров сплайна.

Как и там, будем использовать оценки элементов  $b_i, c_i$ , которые в определителях в (5) неположительны. Из (64) для них справедливо

$$b_i > -\lambda_i a_i, \quad c_i > -\mu_i a_i. \quad (65)$$

Если теперь в отношения определителей подставить вместо  $b_i, c_i$  их оценки (65) и очевидные неравенства  $d_i < 4d_i a_i$ , то вынося из столбцов определителей  $a_j$  и сокращая на эти величины, по лемме 2 получаем

$$\frac{|U_d^i|}{|U^i|} \leq 4 \frac{|U_d^i|_0}{|U^i|_0} = 4C_i, \quad \frac{|V_d^i|}{|V^i|} \leq 4 \frac{|V_d^i|_0}{|V^i|_0} = 4B_i, \quad (66)$$

где в определителях с индексами "0" по сравнению с исходными определителями осуществляются замены:  $a_j \rightarrow 1, b_j \rightarrow -\lambda_j, c_j \rightarrow -\mu_j$ . Очевидно, что  $B_i, C_i$  - конечные величины.

Неравенства (5) принимают вид при  $\tilde{b}_i, \tilde{c}_i, \tilde{d}_i$  и  $B_i, C_i$ , определяемых формулами (57) и (66),

$$d_i \geq 4(\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i)_+ \tilde{c}_i C_i + 4(\varepsilon_i \varepsilon_{i+1})_+ \tilde{b}_i B_i, \quad i = 0, \dots, N. \quad (67)$$

Мы доказали утверждение, являющееся следствием лемм 1,2.

**СЛЕДСТВИЕ 4.** Для того, чтобы система (1), порождаемая системой (55), имела неотрицательное решение  $M \geq 0$ , достаточно, чтобы выполнялись неравенства (67) и (64).

Тогда компоненты вектора  $\tilde{M}$  имеют заранее обусловленные знаки.

3. О знаках  $\tilde{M}_i$  соглашение сделано в п.1. В рассмотренных там вариантах 1-3 нужно обеспечить желаемое свойство звена сплайна.

**ТЕОРЕМА 2.** Для того, чтобы каждое звено сплайна было выпуклым или имело одну точку перегиба на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$

при заданных знаках  $\tilde{M}_i$ , достаточно, чтобы выполнялись (15), (67), (64) и одна из двух групп условий:

а)  $\rho_i = \sigma_i = 0$ ;

б)  $\rho_i \neq 0, \sigma_i \neq 0, (61)$  и

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i [\bar{b}_i \varphi_i''(1) - 1] &\leq 0, \\ \rho_i [\bar{c}_{i+1} \psi_i''(0) - 1] &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) При условии  $\rho_i = \sigma_i = 0$  равенства (60) не налагают ограничений на  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$ . Последние выбираются произвольными неположительными числами, удовлетворяющими (54).

б) Равенство (61) является следствием (54) и (60) при  $\rho_i, \sigma_i$  отличных от нуля. Значения  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  из (60) неположительны в силу (68).

В обоих случаях по-прежнему  $S_G''(x)$  есть монотонная функция, изменяющаяся от  $M_i$  до  $M_{i+1}$ , и теорема доказана.

Ее ограниченность в том, что при  $\bar{d}_i = 0$  и  $(\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i)_+ = 1$ , и/или  $(\varepsilon_i\varepsilon_{i+1})_+ = 1$ , вообще говоря, нельзя выполнить (67). Так, если при  $\bar{d}_{i-1}\bar{d}_{i+1} < 0$  и  $\bar{d}_i = 0$  требуется осуществить переход от одного направления выпуклости к другому через одну точку перегиба, то, какой бы знак ни присвоить  $\bar{d}_i$ , всегда будет либо  $(\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i)_+ = 1$ , либо  $(\varepsilon_i\varepsilon_{i+1})_+ = 1$ . Вопрос снимается, если допускаются две точки перегиба. В этом случае вводится, как предложено в варианте 3 п.1, дополнительный узел. Тогда обеспечивается равенство нулю  $(\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j)_+$  и  $(\varepsilon_j\varepsilon_{j+1})_+$  для всех  $\bar{d}_j = 0$  и тем самым (67) выполняется.

В общем случае, как показано в [3] на примере выпуклой интерполяции, даже при  $\bar{d}_i \neq 0$ , условия теоремы не всегда удается выполнить.

Пусть  $\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ , т.е. на интервале  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  направление выпуклости не меняется. Имеем  $(\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i)_+ = (\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})_+ = 1, B_{i-1} = d_i, C_i = d_{i-1}, B_i = d_{i+1}, C_{i+1} = d_i$ . Заменим неравенства (67) при индексах  $i-1, i,$

$i+1$  парами неравенств, представляя  $d_i = \lambda_i d_i + \mu_i d_i$ . Получаем  $d_{i-1} \geq 4\bar{b}_{i-1} d_i$ ,  $d_i \geq 4\bar{c}_i d_{i-1}$ ,  $d_i \geq 4\bar{b}_i d_{i+1}$ ,  $d_{i+1} \geq 4\bar{c}_{i+1} d_i$ . Эти неравенства при обозначении  $w_i = \frac{d_{i+1}}{d_i}$  можно записать в виде:

$$4\bar{c}_{j+1} \leq w_j \leq \frac{1}{4\bar{b}_j}, \quad j = i-1, i. \quad (69)$$

Это усиленные неравенства из [3]. Отсюда ясно, что при любом соотношении между  $d_i$ ,  $d_{i+1}$  достаточно иметь возможность уменьшать одну из величин  $\bar{b}_i$  или  $\bar{c}_{i+1}$  в ее интервале  $[0, 1/4]$ .

Пусть теперь имеет место переменна направления выпуклости на  $[x_i, x_{i+1}]$  при  $\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_{i+2}$ . При этом  $(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})_+ = 0$ ,  $(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)_+ = (\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2})_+ = 1$ ,  $C_i = d_{i-1}$ ,  $B_{i+1} = d_{i+2}$ ,  $B_{i-1} = \frac{d_i + \lambda_i d_{i+1}}{1 - \lambda_i \mu_{i+1}}$ ,  $C_{i+2} = \frac{d_{i+1} + \mu_{i+1} d_i}{1 - \lambda_i \mu_{i+1}}$ .

Тогда для индексов  $i-1$  и  $i+1$  получаем нестандартные неравенства

$$\left. \begin{aligned} 4\mu_i \bar{c}_i \leq w_{i-1} \leq \frac{1 - \lambda_i \mu_{i+1}}{4\bar{b}_{i-1}(1 + \lambda_i w_i)}, \\ \frac{4\bar{c}_{i+2}(1 + \mu_{i+1} w_i^{-1})}{1 - \lambda_i \mu_{i+1}} \leq w_{i+1} \leq \frac{1}{4\lambda_{i+1} \bar{b}_{i+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Здесь расщепления неравенств (67) с индексами  $i$ ,  $i+1$  производить было необязательно. Так как двусторонних неравенств для  $w_i$  нет, то  $\bar{b}_i$ ,  $\bar{c}_{i+1}$  произвольны в своих интервалах. На практике их можно принять равными, например, значениям для кубических сплайнов (см. ниже). В отличие от (69) в неравенствах (70) при  $w_{i-1} < 1$ ,  $w_{i+1} > 1$  возможны случаи, когда приходится варьировать оба параметра  $\bar{b}_j$ ,  $\bar{c}_{j+1}$ ,  $j = i-1, i+1$ .

Именно на это направлены исследования при конкретных базовых функциях. И там, где на  $\bar{b}_i$ ,  $\bar{c}_{i+1}$  налагаются ограничения снизу или они фиксированы, то тем

самым ограничиваются и  $w_i$ . Там, где таких ограничений нет, нет и ограничений на исходные данные.

4. *Кубические сплайны* с базовыми функциями (17). Для последних выполняются условия (15). По формулам (56) находятся  $\alpha_i = \beta_i = 1/6$ ,  $\rho_i = \sigma_i = 0$ , а по формулам (57)  $\bar{b}_i = \lambda_i/6$ ,  $\bar{c}_i = \mu_i/6$ ,  $a_i = 1/3$  и, значит, выполняются условия (64). Условия (5) здесь используются в виде:

$$d_i \geq (\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i)_+ \mu_i \frac{|U_d^i|}{|U^i|} + (\varepsilon_i\varepsilon_{i+1})_+ \lambda_i \frac{|V_d^i|}{|V^i|}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (71)$$

где в определителях вместо  $a_j$  стоят 2, вместо  $b_j$  и  $c_j$  —  $\lambda_j$  и  $-\mu_j$  соответственно.

Имеет место следствие теоремы 2, варианта "а".

**СЛЕДСТВИЕ 5.** *Для того, чтобы каждое звено кубического сплайна было выпуклым или имело одну точку перегиба на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  при заданных знаках  $\tilde{M}_i$ , достаточно, чтобы выполнялись условия (71).*

5. *Кубические сплайны с дополнительными узлами.* Сначала рассмотрим сплайны, порождаемые базовыми функциями (18), удовлетворяющими (15). Для них по формулам (53), (56) находим

$$\Delta_{2i}(1-p_i)^2 q_i^2 = 6[3 - (1-p_i)^2 - q_i^2],$$

$$\rho_i = -\frac{6[p_i(1+p_i) + 1 - q_i^2]}{\Delta_{2i}(1-p_i)^2 q_i^2},$$

$$\sigma_i = -\frac{6[p_i(2-p_i) + (1-q_i)(2-q_i)]}{\Delta_{2i}(1-p_i)^2 q_i^2}.$$

$$\text{Далее } F[\varphi_i] = \frac{1+p_i+p_i^2}{(1-p_i)^2}, \quad G[\psi_i] = \frac{3-3q_i+q_i^2}{q_i^2}.$$

Подставляя эти формулы в (61), получаем

$$p_i K(p_i) + (1-q_i)K(q_i) + \frac{1}{2}p_i(1-q_i)(p_i - q_i) = 0, \quad (72)$$

где  $K(Y_i) = \frac{1}{2} - (1+Y_i)\bar{b}_i - (2-Y_i)\bar{c}_{i+1}$ .

Так как в данном случае  $\rho_i \leq 0$ ,  $\sigma_i \leq 0$ , то условия (68) теоремы 2 сводятся к

$$(1 - p_i)^2 - 6\bar{b}_i \leq 0, \quad q_i^2 - 6\bar{c}_{i+1} \leq 0, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (73)$$

**СЛЕДСТВИЕ 6.** Для того, чтобы звено кубического сплайна с дополнительными узлами с базовыми функциями (18) было выпуклым или имело одну точку перегиба на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  при заданных знаках  $M_i$ , достаточно, чтобы выполнялись условия (67), (64) и для индекса  $i$  одна из трех групп условий:

$$а) \bar{b}_i \geq 1/6, \quad \bar{c}_{i+1} \leq 1/6, \quad \bar{b}_i \neq \bar{c}_{i+1},$$

$$f(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) \equiv \frac{1}{2} - \bar{b}_i - 2\bar{c}_{i+1} > 0, \quad (74)$$

$$P(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) = \left(\frac{1}{2} - \bar{b}_i + \bar{c}_{i+1}\right)^2 - \frac{3}{2}\bar{c}_{i+1} \leq 0, \quad (75)$$

$$p_i = 0, \quad q_i = f(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})/(\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1}); \quad (76)$$

$$б) \bar{b}_i \leq 1/6, \quad \bar{c}_{i+1} \geq 1/6, \quad \bar{b}_i \neq \bar{c}_{i+1},$$

$$g(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) = f(\bar{c}_{i+1}, \bar{b}_i) > 0 \quad (74а)$$

$$Q(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) = P(\bar{c}_{i+1}, \bar{b}_i) \leq 0, \quad (75а)$$

$$p_i = f(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})/(\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1}), \quad q_i = 1; \quad (76а)$$

$$в) \bar{b}_i = \bar{c}_{i+1} = 1/6, \quad p_i = 0, \quad q_i = 1 \text{ (кубическое звено)}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** сводится к проверке условий теоремы 2. Из них (15), (67), (64) выполняются по предположению. Остаются (72) и (73). В случае "в" они выполняются.

а) Вследствие  $p_i = 0$  из (72) следует  $K(q_i) = 0$ , что выполняется в силу (76). Здесь  $0 < q_i \leq 1$ . Действительно, левое неравенство выполняется вследствие (74), а правое вследствие (75).

Проверяем (73). Первое из неравенств выполняется с очевидностью. Во второе подставляем  $q_i$  из (76). Получаем  $q_i^2 - 6\bar{c}_{i+1} = \frac{1 - 6\bar{c}_{i+1}}{(\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1})^2} P(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) \leq 0$  вследствие (75).

б) Доказывается аналогично.

в) Очевидно.

Нетрудно видеть, что следствие в вариантах "а" и "б" остается справедливым при  $p_i = q_i = Y_i$ , если неравенства (75), (75а) строгие. Тогда (72) сводится к  $K(Y_i) = 0$  и  $Y_i$  определяется формулами (76). При этом обеспечивается  $0 < Y_i < 1$ . Условия (73) выполняются за счет (75), (75а).

Именно для случая  $p_i = q_i$  в [3] получены результаты, подобные следствию б, для сплайнов с базовыми функциями (19) при условиях выполнения (15) [3, теоремы 3,4] на примере выпуклой интерполяции. Это было связано с желанием получить вариант "а" теоремы 2, т.е. иметь  $\rho_i = \sigma_i = 0$ , как здесь в варианте "в" кубических сплайнов.

В [3] показано, что в плоскости  $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$  область, удовлетворяющая условию "в", — это точка  $O'(1/6, 1/6)$ , а условиям "а" и "б" удовлетворяют криволинейные треугольники, симметрично расположенные относительно прямой  $\bar{b}_i = \bar{c}_{i+1}$ . Они образуются дугами парабол (75)–(75а) и отрезками прямых. Точка  $O'$  есть общая вершина на треугольниках, образуемых пересечением парабол и прямых  $f(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) = 0$  и  $g(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) = 0$ . В условиях "а" две другие вершины лежат на прямой  $\bar{b}_i = 1/4$ . С прямой  $f(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) = 0$  она пересекается в точке с координатой  $\bar{c}_{i+1} = 1/8$ , а с параболой  $P(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) = 0$  в точке с координатой  $\bar{c}_{i+1} = (2 - \sqrt{3})/4$ . В условиях "б" две вершины лежат на прямой  $\bar{c}_{i+1} = 1/4$ .

Из-за того, что  $\bar{b}_i$  и  $\bar{c}_{i+1}$  ограничены снизу дугами парабол неравенства (67) не могут быть выполнены при достаточно малых по сравнению с  $B_i, C_i$  величинах  $d_i$ . Это, что касается схем с одним дополнительным узлом.

С целью ослабления ограничений на  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$  в [3] были использованы базовые функции (19) при отказе от выполнения (15). Тем не менее, функция  $S_G''(x)$  осталась монотонной на интервалах, а область в плоскости  $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$  оказалась криволинейным треугольником, ограниченным параболой

$$\frac{1}{4} - \bar{b}_i - \bar{c}_{i+1} + (\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1})^2 = 0,$$

проходящей через точку  $O'' (1/8, 1/8)$ , и прямыми  $\bar{b}_i = 1/4$ ,  $\bar{c}_{i+1} = 1/4$ , которые парабола пересекает в точках  $\bar{c}_{i+1} = (3 - 2\sqrt{2})/4$  и  $\bar{b}_i = (3 - 2\sqrt{2})/4$  соответственно. Видно, что области в вариантах следствия 6 включаются в данную [3, теорема 5]. Вследствие монотонности  $S_G''(x)$  этот результат можно использовать при перемене ее знака с одной точкой перегиба.

Наконец, на этом пути была построена схема с немонотонной функцией  $S_G''(x)$  без ограничений снизу на  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$ . Схема вполне приемлема при интерполяции дискретных данных, но не пригодна для интерполяции функций, если требуется приближать ее вторую производную.

Схемы с монотонными  $S_G''(x)$  при малых  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$  можно рассчитывать получить при использовании базовых функций с тремя и более дополнительными узлами.

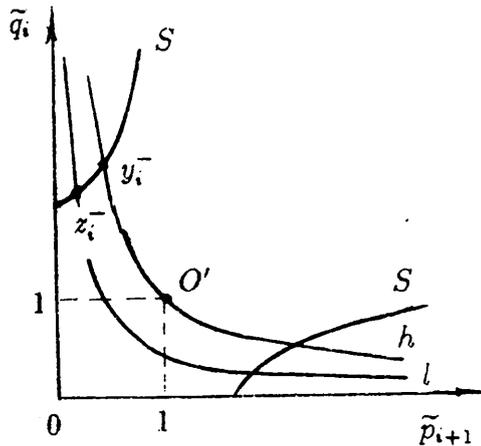


Рис. 6

Рациональные сплайны генерируются базовыми функциями (22), удовлетворяющими (15). Учитывая полученные в §2 формулы, согласно (53) имеем

$$\Delta z_i = 2[\tilde{p}_i \tilde{q}_i (1 + \tilde{p}_i)(1 + \tilde{q}_i) - 1] > 0, \quad (77)$$

и это первое ограничение на параметры  $\bar{p}_i, \bar{q}_i$ . Граница области в плоскости  $(\bar{p}_i, \bar{q}_i)$  есть кривая четвертого порядка  $l$  с асимптотами  $\bar{p}_i = 0, \bar{q}_i = 0$  (рис. 6).

При обозначении  $H(\bar{p}_i, \bar{q}_i) = \bar{p}_i \bar{q}_i - 1$  по формулам (56) получаем

$$\rho_i = -2H(\bar{p}_i, \bar{q}_i)(\bar{p}_i \bar{q}_i + \bar{p}_i + 1)/\Delta_{2i},$$

$$\sigma_i = -2H(\bar{p}_i, \bar{q}_i)(\bar{p}_i \bar{q}_i + \bar{q}_i + 1)/\Delta_{2i}.$$

Далее подсчитываем  $F[\varphi_i]G[\psi_i] - 1 = H(\bar{p}_i, \bar{q}_i)(\bar{p}_i \bar{q}_i + 1)$ . В этом случае (61) принимает вид:

$$H(\bar{p}_i, \bar{q}_i)[(\bar{p}_i T_i - \bar{c}_{i+1})(\bar{q}_i T_i - \bar{b}_i) + T_i^2 - \bar{b}_i \bar{c}_{i+1}] = 0, \quad (78)$$

где  $T_i = \frac{1}{2} - \bar{b}_i - \bar{c}_{i+1}$  и предполагается, что  $\bar{b}_i > 0, \bar{c}_{i+1} > 0$ .

При  $H(\bar{p}_i, \bar{q}_i) = 0, \rho_i = \sigma_i = 0$ . Эта линия — гипербола  $h$  с асимптотами  $\bar{p}_i = 0, \bar{q}_i = 0$ , целиком лежащая в области (77). Теорема 2 имеет очевидное

**СЛЕДСТВИЕ 7.** Для того, чтобы каждое звено рационального сплайна было выпуклым или имело бы одну точку перегиба на  $[x_i, x_{i+1}]$  при заданных знаках  $\bar{M}_i$ , достаточно, чтобы выполнялись (67), (64) и одна из двух групп условий:

$$a) H(\bar{p}_i, \bar{q}_i) = 0;$$

$$b) H(\bar{p}_i, \bar{q}_i) \neq 0, (77), (78) \text{ и}$$

$$\left. \begin{aligned} H(\bar{p}_i, \bar{q}_i)[2\bar{b}_i(1 + \bar{p}_i + \bar{p}_i^2) - 1] &\geq 0, \\ H(\bar{p}_i, \bar{q}_i)[2\bar{c}_{i+1}(1 + \bar{q}_i + \bar{q}_i^2) - 1] &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Остановимся на возможностях выполнения условий следствия 7. По необходимости нам придется частично повторить результаты работы [3] касательно рациональных сплайнов.

1) При  $H(\bar{p}_i, \bar{q}_i) = 0$  согласно (80)

$$2\bar{b}_i(1 + \bar{p}_i + \bar{p}_i^2) = 1, \quad 2\bar{c}_{i+1}(1 + \bar{q}_i + \bar{q}_i^2) = 1, \quad (80)$$

откуда  $\bar{p}_i = \bar{p}_i^0, \bar{q}_i = \bar{q}_i^0$ , где

$$\bar{p}_i^0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{b}_i} - \frac{3}{4}}, \quad \bar{q}_i^0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{c}_{i+1}} - \frac{3}{4}}.$$

В силу (80) гиперболе  $h$  в плоскости  $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$  соответствует эллипс (рис. 7)

$$T_i^2 - \bar{b}_i \bar{c}_{i+1} = 0, \quad (81)$$

расположенный симметрично относительно прямой  $\bar{b}_i = \bar{c}_{i+1}$ , с центром в точке  $E(1/3, 1/3)$ , проходящий через точку  $O'(1/6, 1/6)$ . Прямые  $\bar{b}_i = \bar{c}_{i+1} = 1/4$  выделяют из него дугу  $ab$  с координатами концов  $a \left( \frac{1}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{8} \right)$ ,  $b \left( \frac{3-\sqrt{5}}{8}, \frac{1}{4} \right)$ . В плоскости  $(\bar{p}_i, \bar{q}_i)$  дуге  $ab$  соответствует дуга  $a'b'$  с координатами концов  $a' \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$ ,  $b' \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$ .

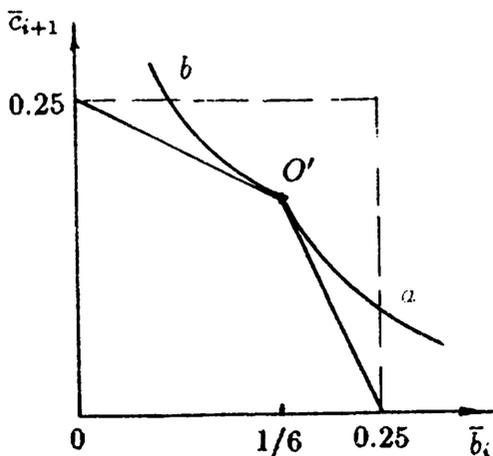


Рис. 7

Как видно, значения  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$  ограничены снизу числом  $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ , что не позволяет выполнить (67) при достаточно малых или больших  $w_i$ . При выпуклой интерполяции (формулы (69)) ограничения на эту величину суть

$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq w_i \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  при перемене направления выпуклости (формулы (70)) они зависят от  $\mu_i, \lambda_{i+1}$ .

2)  $H(\bar{p}_i, \bar{q}_i) > 0$ . Согласно (79) здесь  $\bar{p}_i > \bar{p}_i^0, \bar{q}_i > \bar{q}_i^0$ . В плоскости  $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$  этому соответствует внутренняя часть эллипса (81), где

$$T_i^2 - \bar{b}_i \bar{c}_{i+1} < 0, \quad (82)$$

ограниченная прямыми  $\bar{b}_i = 1/4, \bar{c}_{i+1} = 1/4$ .

Из (78) следует

$$(\bar{p}_i T_i - \bar{c}_{i+1})(\bar{q}_i T_i - \bar{b}_i) = \bar{b}_i \bar{c}_{i+1} - T_i^2. \quad (83)$$

В плоскости  $(\bar{p}_i, \bar{q}_i)$  это гипербола  $s$  с асимптотами  $\bar{p}_i = \bar{c}_{i+1}/T_i, \bar{q}_i = \bar{b}_i/T_i$ . Для значений  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$ , отвечающих эллипсу (81), она вырождается в пару пересекающихся прямых с точкой пересечения на гиперболе  $h$ . Для точек, удовлетворяющих (82), в (83) оба сомножителя слева отличны от нуля. Точка пересечения асимптот лежит "выше"  $h$ . Ветви гиперболы  $s$  расположены в первом и третьем квадрантах относительно ее асимптот.

Они не имеют общих точек с гиперболой  $h$ . Действительно, в противном случае система уравнений (83) и  $H(\bar{p}_i, \bar{q}_i) = 0$  должна иметь решение. Исключая из уравнений, например  $\bar{q}_i$ , приходим к равенству

$$\bar{b}_i \bar{p}_i^2 - 2T_i \bar{p}_i + \bar{c}_{i+1} = 0, \quad (84)$$

которое не имеет вещественных корней.

Для наших целей достаточно рассматривать только первый квадрант, где на гиперболе  $s$

$$\bar{p}_i > \frac{\bar{c}_{i+1}}{T_i} > \bar{p}_i^0, \quad \bar{q}_i > \frac{\bar{b}_i}{T_i} > \bar{q}_i^0.$$

Здесь одно из значений, например  $\bar{p}_i$ , задается в соответствии с неравенствами, а другое вычисляется из (83) в виде:

$$\bar{q}_i = \frac{\bar{p}_i \bar{b}_i - T_i}{\bar{p}_i T_i - \bar{c}_{i+1}}. \quad (85)$$

Эта схема не допускает уменьшения значений  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$  по сравнению с предыдущей.

3)  $H(\bar{p}_i, \bar{q}_i) < 0$ . Согласно (79) здесь  $\bar{p}_i < \bar{p}_i^0$ ,  $\bar{q}_i < \bar{q}_i^0$ . В плоскости  $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$  этому соответствует внешняя часть эллипса (81), где

$$T_i^2 - \bar{b}_i \bar{c}_{i+1} > 0, \quad (86)$$

ограниченная прямыми  $\bar{b}_i = 1/4$ ,  $\bar{c}_{i+1} = 1/4$ .

Асимптоты гиперболы  $s$  пересекаются "ниже" кривой  $h$ . Ветви гиперболы  $s$  расположены теперь во втором и четвертом квадрантах относительно ее асимптот и каждая из ветвей пересекает кривые  $h$  и  $l$ . Нас интересуют дуги кривой  $s$ , расположенные между точками пересечения.

Значения  $p_i$  в точках пересечения  $s$  с  $h$  определяются корнями уравнения (84):

$$y_i^\pm = \frac{1}{\bar{b}_i} \left( T_i \pm \sqrt{T_i^2 - \bar{b}_i \bar{c}_{i+1}} \right), \quad (87)$$

где знак "-" отвечает пересечению во втором квадранте, а "+" — в четвертом. Для дуги во втором квадранте  $\bar{p}_i < y_i^-$ ,  $\bar{q}_i < \frac{1}{y_i^-}$  и непосредственно проверяются неравенства

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_i < y_i^- < \frac{\bar{c}_{i+1}}{T_i} < \bar{p}_i^0, \\ \frac{\bar{b}_i}{T_i} < \bar{q}_i < \bar{q}_i^0 < \frac{1}{y_i^-}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Формулы в четвертом квадранте получаются из (88) переменной мест  $\bar{b}_i$  и  $\bar{c}_{i+1}$ ,  $\bar{p}_i$  и  $\bar{q}_i$ , т.е.

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_i < \frac{1}{y_i^+} < \frac{\bar{b}_i}{T_i} < \bar{q}_i^0, \\ \frac{\bar{c}_{i+1}}{T_i} < \bar{p}_i < \bar{p}_i^0 < y_i^+. \end{aligned} \right\} \quad (88a)$$

Обратимся теперь к требованию (77). Аппроксимируем кривую  $l$  гиперболой  $l_1$ :  $\bar{p}_i \bar{q}_i = \gamma$ ,  $\gamma = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ,

касающейся  $l$  в точке  $\bar{p}_i = \bar{q}_i = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  и целиком лежащей между  $l$  и  $h$ , т.е. условие (77) для нее выполняется всюду, кроме точки касания. Но через нее, как и вообще через точки  $\bar{p}_i = \bar{q}_i$ , гиперболы  $s$  проходить не может.

Точки в пересечении гипербол  $s$  и  $l_1$  удовлетворяют уравнению

$$\bar{b}_i \bar{p}_i^2 - (1 + \gamma) T_i \bar{p}_i + \gamma \bar{c}_{i+1} = 0,$$

которое при условии (86) имеет два вещественных корня

$$z^\pm = \frac{1}{\bar{b}_i} \left( \frac{1 + \gamma}{2} T_i \pm \sqrt{\frac{(1 + \gamma)^2}{4} T_i^2 - \gamma \bar{b}_i \bar{c}_{i+1}} \right),$$

где знак "–" отвечает пересечению кривых во втором, а "+" — в четвертом квадрантах.

Во втором квадранте должно быть  $\bar{p}_i \geq z_i^-$ ,  $\bar{q}_i \geq \frac{\gamma}{z_i^-}$ .

Выполняются неравенства  $z_i^- < y_i^-$ ,  $\frac{\bar{b}_i}{T_i} < \frac{\gamma}{z_i^-}$ , после чего, учитывая (88), получаем ограничения

$$z_i^- \leq \bar{p}_i < y_i^-, \quad \frac{\gamma}{z_i^-} \leq \bar{q}_i < \bar{q}_i^0. \quad (89)$$

Формулы в четвертом квадранте получаются отсюда переменной мест  $\bar{b}_i$  и  $\bar{c}_{i+1}$ ,  $\bar{p}_i$  и  $\bar{q}_i$ :

$$\frac{\gamma}{z_i^+} \leq \bar{q}_i < \frac{1}{y_i^+}, \quad z_i^+ \leq \bar{p}_i < \bar{p}_i^0. \quad (89a)$$

Ограничения (89) отвечают случаю  $\bar{b}_i \geq \bar{c}_{i+1}$ , а (89a) —  $\bar{b}_i \leq \bar{c}_{i+1}$ . Если  $\bar{b}_i = \bar{c}_{i+1}$ , то можно использовать любую из двух групп ограничений. Как и в п.2 данного параграфа, одно из значений  $\bar{p}_i$ ,  $\bar{q}_i$  выбирается в соответствии с (89) или (89a), а другое находится из (83).

В данной схеме нет ограничений снизу на  $\bar{b}_i$ ,  $\bar{c}_{i+1}$  и, таким образом, вопрос исчерпывается полностью. Схема с немонотонной функцией  $S_G''(x)$ , полученная в [3], оказывается излишней.

## Л и т е р а т у р а

1. Ю.С.ЗАВЬЯЛОВ, В.В.БОГДАНОВ. Изогеометрическая эрмитова интерполяция обобщенными кубическими сплайнами // Сплайны и их приложения. - Новосибирск, 1991. - Вып.142: Вычислительные системы. - С.15-46.
2. Ю.С.ЗАВЬЯЛОВ. Монотонная интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса  $S^2$  // Интерполяция и аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1992. - Вып.147: Вычислительные системы. - С.44-67.
3. Ю.С.ЗАВЬЯЛОВ. Выпуклая интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса  $S^2$  // Сплайны и их приложения. - Новосибирск, 1995. - Вып.154: Вычислительные системы. - С.15-64.
4. V.L.MIROSHNICHENKO. Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of functions'84. - Sofia, 1984. - P.610-620.
5. В.Л.МИРОШНИЧЕНКО. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса  $S^2$  // Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып.137: Вычислительные системы. - С.31-57.
6. И.И.ВЕРЛАН. Консервативная интерполяция обобщенными сплайнами: Автореф. дис. . . канд. физ.-мат. наук. - М., 1989. - 16 с.
7. Ю.С.ЗАВЬЯЛОВ. О теории обобщенных кубических сплайнов // Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып.137: Вычислительные системы. - С.58-90.
8. Ю.С.ЗАВЬЯЛОВ. О неотрицательном решении системы уравнений с нестрогой яковиевой матрицей // Сиб. мат. журн. - 1996. - Т.34, № 6. - С.1303-1307.
9. В.В.БОГДАНОВ. Об алгоритме построения обобщенного сплайна, сохраняющего направления выпуклости данных // Настоящий сборник. - С. 72-86.
10. В.В.ВОЕВОДИН, Ю.А.КУЗНЕЦОВ. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984. - 320 с.

11.В.П.ИЛЬИН, Ю.И.КУЗНЕЦОВ. Трехдиагональные матрицы и их приложения. - М.: Наука,1985. -208 с.

Поступила в редакцию  
1 февраля 1997 года