

# СПЛАЙН-ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ (Вычислительные системы)

1997 год

Выпуск 159

УДК 519.65

## ОБ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО СПЛАЙНА, СОХРАНЯЮЩЕГО НАПРАВЛЕНИЯ ВЫПУКЛОСТИ ДАННЫХ<sup>1</sup>

В.В. Богданов

В статье предлагается численная реализация алгоритма построения обобщенного интерполяционного сплайна [1], который при достаточно высокой гладкости обладает свойством сохранения кусочной выпуклости исходных данных. Работоспособность алгоритма подтверждается численными экспериментами, в том числе по данным из практической задачи о расчете динамических скоростных характеристик двигателей, предоставленными нам автором работы [2].

Постановка задачи. Пусть на сетке  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  заданы значения  $f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Эти данные определяют вторые разделенные разности

$$\delta_i^2 = \frac{\delta_{i+\frac{1}{2}} - \delta_{i-\frac{1}{2}}}{h_i + h_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$\delta_{j+\frac{1}{2}} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}, \quad h_j = x_{j+1} - x_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Кроме того, предполагаются известными значения  $f_0''$  и  $f_N''$ , имеющие смысл второй производной интерполируемой функции в точках  $x_0$  и  $x_N$  соответственно. Положим

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 97-01-00824.

$\delta_0^2 = f_0''/2$ ,  $\delta_N^2 = f_N''/2$ . Требуется построить интерполяционный обобщенный рациональный сплайн  $S_R(x)$  класса  $C^2[a, b]$ , описанный в [1], знаки вторых производных в узлах которого повторяют знаки вторых разделенных разностей  $\delta_i^2$ , и который имеет на каждом интервале  $(x_i, x_{i+1})$  одну точку перегиба в случае, если вторые производные на концах интервала имеют разные знаки, и не имеет перегибов в противном случае. Величины  $f_0''$ ,  $f_N''$  будем считать согласованными с сеточными значениями  $f_i$  таким образом, что  $\delta_0^2 \delta_1^2 \geq 0$  и  $\delta_{N-1}^2 \delta_N^2 \geq 0$ . Следовательно, интерполяционный сплайн не должен иметь точек перегиба на интервалах  $(x_0, x_1)$  и  $(x_{N-1}, x_N)$ .

Следуя [1], будем называть такой сплайн сохраняющим направления выпуклости. Он не является единственным во всем множестве сплайнов этого типа, зависящих от управляющих параметров  $p_i, q_i, u_i$ .

Отметим, что знакопостоянство значений  $\delta_i^2$  во всех узлах сетки  $\Delta$  гарантирует выпуклость сплайна при  $\delta_i^2 > 0$  или вогнутость при  $\delta_i^2 < 0$ . Если же не все  $\delta_i^2$  имеют один и тот же знак, то речь может идти лишь о кусочной локальной выпуклости или вогнутости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Знакопеременной  $k$ -серией узлов (далее просто  $k$ -серией) назовем множество

$$L_k(i) = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}\}, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad 2 \leq k < N-i,$$

узлов сетки  $\Delta$  таких, что выполняются неравенства  $\delta_{i-1}^2 \delta_i^2 > 0$ ,  $\delta_{i+k-1}^2 \delta_{i+k}^2 > 0$  и  $\delta_{j-1}^2 \delta_j^2 < 0$  для любого  $j = i+1, \dots, i+k-1$ . При этом полагаем  $\delta_{-1}^2 = \delta_0^2$ ,  $\delta_{N+1}^2 = \delta_N^2$ .

Очевидно, что если есть  $k$ -серия  $L_k(i)$ , то не существует серий  $L_m(i-1)$  и  $L_n(i+k-1)$  ни для каких натуральных  $m$  и  $n$ .

По-видимому, разумная постановка задачи построения сплайна с переменами направлений выпуклости предполагает отсутствие в данных  $k$ -серий при  $k > 2$ , поскольку в противном случае данные сами носят осциллирующий характер, и о локальной выпуклости говорить чаще всего бессмысленно. Кроме того, при численной реализации алгоритма наличие  $k$ -серии приводит к вычислению

определителей порядка  $k$ , что при больших  $k$  неизбежно делает построение сплайна такого типа чрезмерно громоздким. Поэтому исходную задачу будем рассматривать в постановке, когда отсутствуют  $k$ -серии для  $k > 2$ .

Пусть данные удовлетворяют предъявленным выше условиям. Для сплайна  $S_R(x)$  на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  сетки имеет место представление [1]

$$S_R(x) = f_{i+1}t + f_i(1-t) + h_i^2[\Phi_{2i}(t)M_i + \Psi_{2i}(t)M_{i+1}], \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{2i}(t) &= \bar{u}_i[\phi_i(t) - t^2] - \bar{v}_i[\psi_i(t) - (1-t)^2] + u_i t(1-t), \\ \Psi_{2i}(t) &= -\Phi_{2i}(t) - \frac{1}{2}t(1-t), \\ \bar{u}_i &= \frac{1 + 2u_i(q_i^2 + 3q_i + 3)}{\Delta_{2i}}, \quad \bar{v}_i = \frac{1 + 2v_i(p_i^2 + 3p_i + 3)}{\Delta_{2i}}, \\ \Delta_{2i} &= 2((p_i^2 + 3p_i + 2)(q_i^2 + 3q_i + 2) - 1), \\ \phi_i(t) &= \frac{t^3}{1 + p_i(1-t)}, \quad \psi_i(t) = \frac{(1-t)^3}{1 + q_i t}, \quad u_i = -u_i - \frac{1}{2}, \\ M_i &= S_R''(x_i), \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}, \end{aligned}$$

$p_i, q_i, u_i$  — свободные параметры.

Следуя обозначениям [1], рассмотрим систему уравнений

$$AM = d \quad (2)$$

относительно значений  $M = (M_0, M_1, \dots, M_N)^T$  вторых производных сплайна  $S_R(x)$  в узлах сетки с правой частью  $d = (\delta_0^2, \delta_1^2, \dots, \delta_N^2)^T$ , и матрицей  $A$  вида

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \tilde{b}_0 & & & & \\ \tilde{c}_1 & a_1 & \tilde{b}_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \tilde{c}_{N-1} & a_{N-1} & \tilde{b}_{N-1} \\ & & & & \tilde{c}_N & a_N \end{pmatrix},$$

с элементами

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_N = \frac{1}{2}, & \tilde{b}_0 &= \tilde{c}_N = 0, \\
 \tilde{c}_i &= \mu_i(\alpha_{i-1} + \rho_{i-1}u_{i-1}), & \tilde{b}_i &= \lambda_i(\beta_i + \sigma_i v_i), \\
 a_i &= \frac{1}{2} - \tilde{b}_i - \tilde{c}_i, \\
 \lambda_i &= \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, & \mu_i &= 1 - \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\
 \rho_i &= 2\alpha_i(q_i^2 + 3q_i + 3) - 1, & \sigma_i &= 2\beta_i(p_i^2 + 3p_i + 3) - 1, \\
 \alpha_i &= \frac{p_i + 1}{\Delta_{2i}}, & \beta_i &= \frac{q_i + 1}{\Delta_{2i}}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,
 \end{aligned}$$

причем все  $\tilde{c}_i, \tilde{b}_i$  неотрицательны.

Обозначим

$$\begin{aligned}
 c_i &= \text{sign}(\delta_{i-1}^2 \delta_i^2) \tilde{c}_i, & b_i &= \text{sign}(\delta_i^2 \delta_{i+1}^2) \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\
 d_i &= |\delta_i^2|, \quad i = 0, 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Условия, гарантирующие совпадение знаков  $M_i$  со знаками  $\delta_i^2$  определяются леммой 1 [1] и заключаются в требовании, чтобы выполнялись неравенства

$$d_i - 4 \max\{0, c_i\} C_i^0 - 4 \max\{0, b_i\} B_i^0 \geq 0 \quad (3)$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, N-1$  с величинами  $C_i^0$  и  $B_i^0$ , определяемыми следующим образом

$$\begin{aligned}
 C_1^0 &= d_0, \\
 C_i^0 &= \begin{cases} \frac{d_{i-1} + \mu_{i-1} d_{i-2}}{1 - \lambda_{i-2} \mu_{i-1}}, & \text{при наличии } L_2(i-2), \\ d_{i-1}, & \text{при отсутствии } L_2(i-2), \end{cases} \\
 & \quad i = 2, \dots, N-1; \\
 B_i^0 &= \begin{cases} \frac{d_{i+1} + \lambda_{i+1} d_{i+2}}{1 - \lambda_{i+1} \mu_{i+2}}, & \text{при наличии } L_2(i+1), \\ d_{i+1}, & \text{при отсутствии } L_2(i+1), \end{cases} \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \\
 B_{N-1}^0 &= d_N.
 \end{aligned}$$

Условием, достаточным для выполнения (3), является система неравенств

$$\begin{cases} \mu_i^0 d_i - 4 \max\{0, c_i\} C_i^0 \geq 0, \\ \lambda_i^0 d_i - 4 \max\{0, b_i\} B_i^0 \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $\lambda_i^0 + \mu_i^0 = 1$  и, кроме того,

$$\lambda_i^0 = \begin{cases} \lambda_i, & \text{при } b_i c_i > 0, \\ 1, & \text{при } b_i > 0 \text{ и } c_i \leq 0, \\ 0, & \text{при } b_i \leq 0 \text{ и } c_i > 0. \end{cases}$$

Эти ограничения на  $c_i$  и  $b_i$  не должны противоречить неравенствам  $c_i < \frac{\mu_i}{4}$ ,  $b_i < \frac{\lambda_i}{4}$ .

При построении обобщенного сплайна обычно сначала выбираются каким-либо "хорошим" способом управляющие параметры, а затем по ним строится матрица системы уравнений для нахождения вторых производных сплайна в узлах. Здесь же реализуется другая идея — используется обратный, в некотором смысле, подход, заключающийся в следующем. Среди трехдиагональных матриц некоторым "хорошим" способом выбирается та, которая порождает разрешимую единственным способом систему уравнений (2) и решение которой покомпонентно наследует знаки правой части. Это решение принимается за вектор вторых производных обобщенного сплайна в узлах, а затем из условий принадлежности его классу  $C^2$ , знакопостоянства  $S_R''(x)$  на определенных интервалах и т. д., ищутся управляющие параметры.

Описание алгоритма. Найдем подходящую матрицу системы (2), т. е. элементы  $a_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i$ . Для этого сначала определим все 2-серии, которые позволяют вычислить значения  $B_i^0, C_i^0, i = 0, 1, \dots, N-1$ . Затем определим верхние границы  $\tilde{b}_i, \tilde{c}_i$  допустимых областей неотрицательных элементов  $\bar{b}_i = \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i}, \bar{c}_i = \frac{\tilde{c}_i}{\mu_i}$ . Выбор величин  $\bar{b}_i, \bar{c}_i$  в пределах найденных областей гарантирует, что знаки вторых

производных сплайна в узлах сетки будут совпадать со знаками вторых разделенных разностей.

Для  $i = 0, 1, \dots, N-1$  положим

$$\hat{b}_i = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\lambda_i^0 d_i}{4\lambda_i B_i^0} \right\}, \quad \hat{c}_{i+1} = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\mu_{i+1}^0 d_{i+1}}{4\mu_{i+1} C_{i+1}^0} \right\}.$$

$$T_i = \frac{1}{2} - \bar{b}_i - \bar{c}_{i+1}.$$

Если пара  $(\hat{b}_i, \hat{c}_{i+1})$  принадлежит множеству пар  $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$ , для которых

$$T_i^2 - \bar{b}_i \bar{c}_{i+1} \leq 0, \quad (4)$$

то реализуется часть а) следствия 6 [1]. В противном случае применяется часть б).

Рассмотрим случай а). Сначала следует проверить выполняются ли условия  $\hat{b}_i \geq \frac{1}{6}$ ,  $\hat{c}_{i+1} \geq \frac{1}{6}$ . Если выполняются, то каждой из величин  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$  следует дать значения  $\frac{1}{6}$ , т. е. на этом участке будет построен кубический сплайн. Если не выполняются, то параметры  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$  зададим следующим образом. Если  $\hat{b}_i < \hat{c}_{i+1}$ , то

$$\bar{b}_i = \hat{b}_i, \quad \bar{c}_{i+1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \hat{b}_i - \sqrt{\hat{b}_i(2 - 3\hat{b}_i)} \right),$$

в противном случае полагаем

$$\bar{c}_{i+1} = \hat{c}_{i+1}, \quad \bar{b}_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \hat{c}_{i+1} - \sqrt{\hat{c}_{i+1}(2 - 3\hat{c}_{i+1})} \right).$$

При таком выборе  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$  параметры  $p_i, q_i$  определяются следующим образом

$$p_i = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{b}_i} - \frac{3}{4}}, \quad q_i = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{c}_{i+1}} - \frac{3}{4}}.$$

Случай б). Если же условие (4) не выполняется при подстановке вместо пары  $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$  пары  $(\hat{b}_i, \hat{c}_{i+1})$ , то в качестве величин  $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$  возьмем соответственно значения

$\hat{b}_i, \hat{c}_{i+1}$ . Для того чтобы найти подходящие управляющие параметры в случае  $\bar{b}_i \geq \bar{c}_{i+1}$ , вычислим сначала величины

$$y_i = \frac{\bar{c}_{i+1}}{T_i + \sqrt{T_i^2 - \bar{b}_i \bar{c}_{i+1}}},$$

$$z_i = \frac{\bar{c}_{i+1}}{\frac{1+\gamma}{2}T_i + \sqrt{\left(\frac{1+\gamma}{2}T_i\right)^2 - \gamma \bar{b}_i \bar{c}_{i+1}}},$$

где  $\gamma = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ . Теперь значения параметров вычисляются по формулам

$$p_i = (1 - \theta)z_i + \theta y_i - 1,$$

$$q_i = \frac{1}{T_i} \left( \bar{b}_i + \frac{\bar{b}_i \bar{c}_{i+1} - T_i^2}{(p_i + 1)T_i - \bar{c}_{i+1}} \right) - 1, \quad (5)$$

где  $\theta \in (0, 1)$ . Теоретически,  $\theta$  может быть любым числом из интервала  $(0, 1)$ , но практически, с точки зрения улучшения устойчивости вычислительной процедуры, рекомендуется брать  $\theta = 1/2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Непосредственно из формул базисных функций  $\phi_i(t)$  и  $\psi_i(t)$  видно, что параметры рационального сплайна должны удовлетворять неравенствам

$$p_i > -1, \quad q_i > -1. \quad (6)$$

Теоретически, согласно формулам (5), условия (6) выполняются всегда. Однако на практике при очень малых  $z_i, y_i$  (близких к машинному  $\epsilon$ ) вполне может получиться, например,  $p_i = -1$ . Анализируя формулы для вычисления  $z_i$  и  $y_i$ , нетрудно видеть, что значения  $z_i, y_i$  могут быть очень малыми, когда очень мала величина

$$\nu = \min_{|i-j|=1} \frac{d_i}{d_j},$$

т. е. когда имеется резкий перепад между абсолютными величинами соседних разностей  $\delta_i^2$ . Поэтому в ходе реализации алгоритма необходимо контролировать малость величин  $z_i$ ,  $y_i$ , и, если они становятся близкими к машинному  $\epsilon$ , то следует либо прекращать вычисления, так как задача не может быть решена при данной точности вычислений, либо принять меры к увеличению  $\nu$ . Заметим, что малость  $\nu$  означает относительную близость одной из величин  $d_i$ ,  $d_{i+1}$  к нулю, т. е. три соседние точки "почти лежат" на прямой. Пусть для определенности  $d_i \ll d_{i+1}$ . Тогда очевидно, что слегка увеличив (с точки зрения исходных данных)  $d_i$ , можно резко увеличить  $\nu$  и тем самым обеспечить корректность вычисления параметров  $p_i$ ,  $q_i$ .

В случае, если  $\bar{b}_i \leq \bar{\epsilon}_{i+1}$ , вычислим

$$y_i = \frac{1}{\bar{b}_i} \left( T_i + \sqrt{T_i^2 - \bar{b}_i \bar{\epsilon}_{i+1}} \right),$$

$$z_i = \frac{1}{\bar{b}_i} \left( \frac{1+\gamma}{2} T_i + \sqrt{\left( \frac{1+\gamma}{2} T_i \right)^2 - \gamma \bar{b}_i \bar{\epsilon}_{i+1}} \right),$$

с тем же значением  $\gamma$  и для вычисления значений параметров  $p_i$  и  $q_i$  применим те же соотношения (5).

Осталось найти подходящие значения для  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$  и  $u_i$ .

В случае "а" достаточно положить

$$\bar{u}_i = -\frac{1}{4(q_i^2 + 3q_i + 3)}, \quad \bar{v}_i = -\frac{1}{4(p_i^2 + 3p_i + 3)}.$$

В случае "б"  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_i$  находим по формулам

$$\bar{u}_i = \frac{2\bar{\epsilon}_{i+1}(q_i^2 + 3q_i + 3) - 1}{\Delta_{2i} p_i}, \quad \bar{v}_i = \frac{-1 - 2\bar{u}_i(p_i^2 + 3p_i + 3)}{2(q_i^2 + 3q_i + 3)},$$

если  $\rho_i \leq \sigma_i$ , либо



$$\bar{v}_i = \frac{2\bar{b}_i(p_i^2 + 3p_i + 3) - 1}{\Delta_{2i}\sigma_i}, \quad \bar{u}_i = \frac{-1 - 2\bar{v}_i(q_i^2 + 3q_i + 3)}{(p_i^2 + 3p_i + 3)}.$$

если  $p_i > \sigma_i$ .

На последнем этапе работы алгоритма определяем из системы (2) значения  $M_i$ . Все параметры, необходимые для вычисления сплайна  $S_R(x)$  по формуле (1), найдены, и алгоритм завершен.

Следует отметить, что требование  $\delta_i^2 \neq 0$ , необходимое для теоретического обоснования кусочной выпуклости рационального сплайна, при численной реализации оказалось не столь строгим. Действительно, во-первых, алгоритм устойчиво работает при любых  $\delta_i^2 \neq 0$ , даже близких к нулю. Во-вторых, если данные таковы, что некоторые  $\delta_i^2 = 0$  (как, например, в предлагаемых ниже примерах 2 и 4), то полагая в системе уравнений (2) соответствующие  $d_i$  достаточно малыми положительными числами (порядок малости этих чисел легко определить экспериментально — см. замечание по поводу формулы (5)) и считая одновременно  $\delta_i^2$  положительными или отрицательными (хотя  $\delta_i^2$  и равно 0) в зависимости от локального поведения данных, получаем сплайн  $S_R(x)$ , удовлетворяющий поставленной в данной работе задаче.

Численные примеры. В качестве иллюстрации работы алгоритма рассмотрим несколько примеров, характеризующих поведение рационального сплайна  $S_R(x)$ , описанного выше, в сравнении с "обычным" кубическим сплайном минимального дефекта  $S_3(x)$ , вторые производные которых в узлах  $x_0$  и  $x_N$  принимают значения, равные удвоенным вторым разделенным разностям  $\delta_1^2$  и  $\delta_{N-1}^2$  соответственно.

Каждый из примеров сопровождается рисунком, состоящим из четырех фрагментов — "а"—"г", на которых изображены соответственно:

- а) графики сплайнов  $S_3(x)$  и  $S_R(x)$ ;
- б) графики вторых разделенных разностей  $\delta_i^2$ ;

в) график  $S_3''(x)$ ;

г) график  $S_R''(x)$ .

Все вычисления выполнены на РС IBM 386 в режиме двойной точности.

Т а б л и ц а 1

$i$	$x_i$	$f_i$
0	0.0568332	1055.72
1	0.1609462	1269.04
2	0.2493759	1458.08
3	0.3272711	1632.87
4	0.3975028	1791.76
5	0.4619232	1939.62
6	0.5218041	2072.76
7	0.5781149	2192.67
8	0.6315375	2302.49
9	0.6825548	2403.98
10	0.7315205	2499.28
11	0.7787118	2587.95
12	0.8243717	2669.57
13	0.8687103	2744.34
14	0.9119174	2811.11
15	0.9542295	2861.48
16	0.9959220	2895.15
17	1.0372030	2918.83
18	1.0782210	2932.21
19	1.1190760	2942.21
20	1.1598530	2943.55

**ПРИМЕР 1.** Интерполяция данных, для которых применялся аппарат работы [2], и представленных табл. 1, изображена на рис. 1. Графики сплайнов  $S_3(x)$  и  $S_R(x)$  визуально не различимы, хотя их вторые производные заметно отличаются с точки зрения характера поведения вторых разделенных разностей.

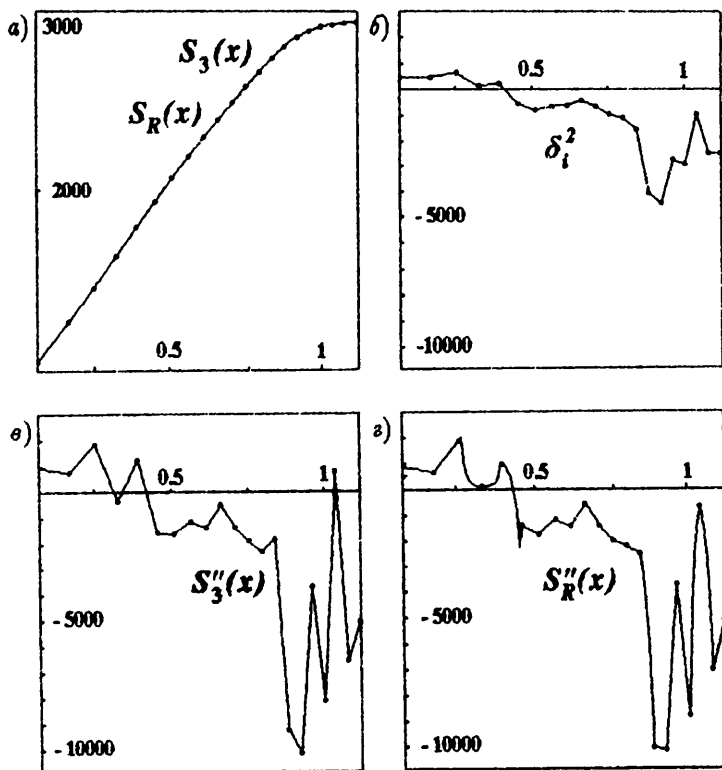


Рис. 1

**ПРИМЕР 2.** На рис. 2 приведены результаты интерполяции сеточных значений функции, аналогичной [3, с. 193]

$$f(x) = 1 - \frac{e^{50x} - e^{-50x}}{e^{50} - e^{-50}}, \quad x \in [0, 1],$$

вычисленных на сетке с узлами  $x_i = i/10$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ , с точностью  $10^{-10}$ . При этом величины  $\delta_i^2$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , оказываются равными нулю, хотя теоретически для данной функции все  $\delta_i^2 \neq 0$ . В ходе численной реализации алгоритма нулевые значения  $\delta_i^2$  заменялись на  $-10^{-20}$ .

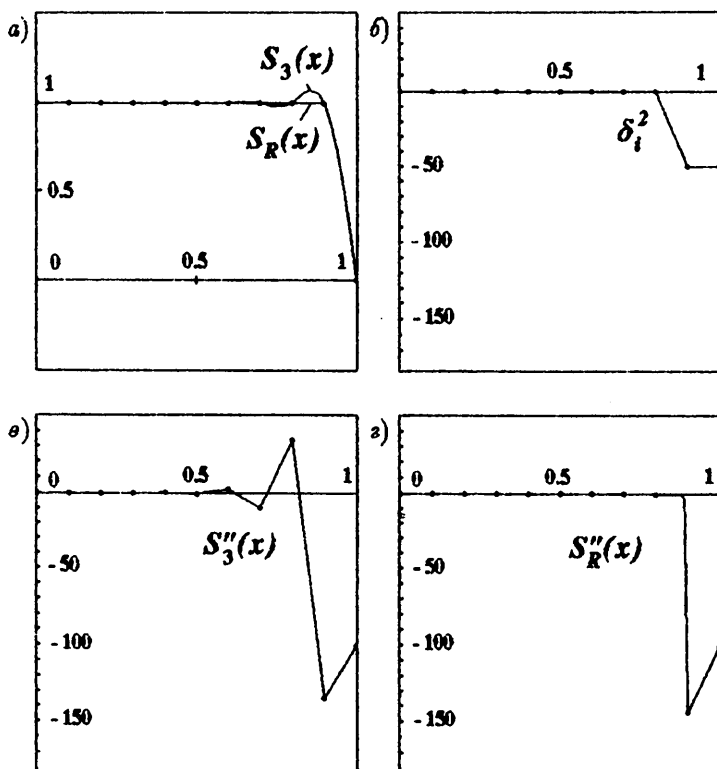


Рис. 2

**ПРИМЕР 3.** На рис. 3 приведены результаты интерполяции значений функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(1-x)^2}, & x \geq 0; \\ -\sqrt{1-(1+x)^2}, & x < 0, \end{cases}$$

на сетке

$$x_i = \begin{cases} \frac{2i}{9} - 1, & i = 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9; \\ \frac{i}{9} - \frac{1}{2}, & i = 4, 5. \end{cases}$$

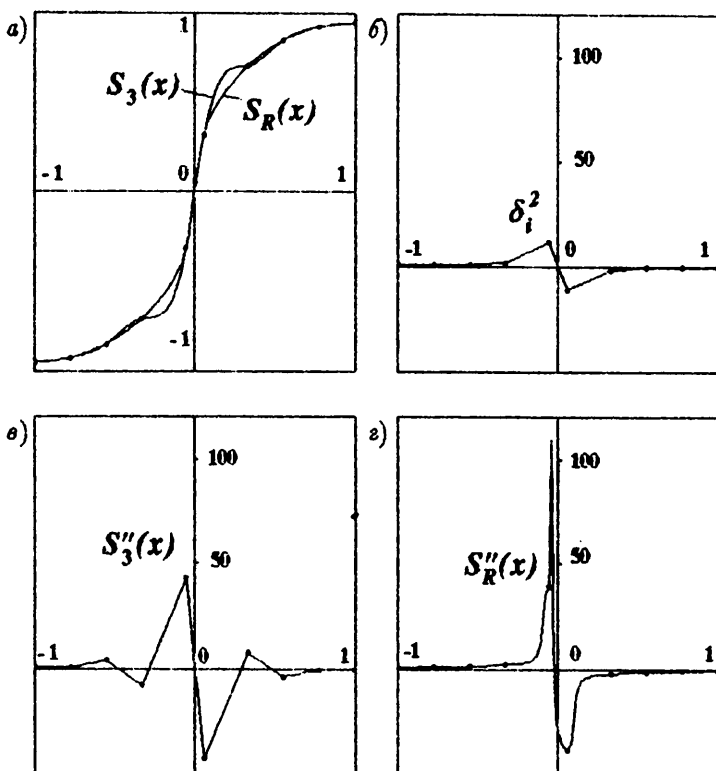


Рис. 3

**ПРИМЕР 4.** На рис. 4 приведены результаты интерполяции данных из табл. 2, которые отличаются от данных из [4], добавленной точкой (1, 2.25)

Т а б л и ц а 2

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i$	0	1	2	2.5	3.5	5.5	6	7	8.5	10
$f_i$	2	2.25	2.5	4.5	5	4.5	1.5	1	0.5	0

Равные нулю  $\delta_1^2, \delta_8^2$  заменялись числами в пределах  $10^{-20} - 10^{-10}$ . Результаты интерполяции при этом практически не меняются.

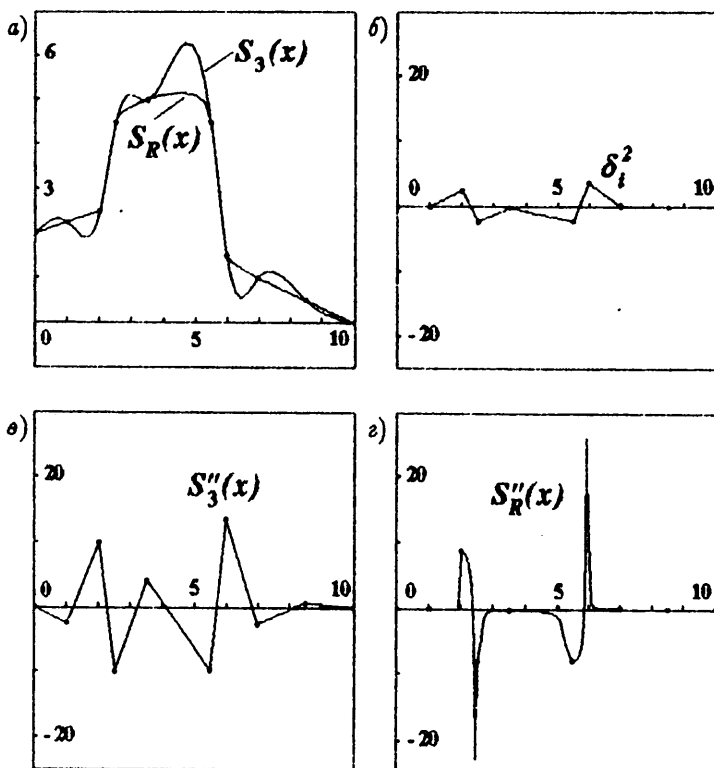


Рис. 4

"Пики" у графиков функций  $S_R''(x)$  на рис. 1,г-4,г вблизи некоторых узлов - это обычная "плата" за устранение осцилляций кубического сплайна  $S_3(x)$ .

Предоставленная Ю.С. Завьяловым рукопись, а также ценные замечания Ю.С. Волкова и В.Л. Мирошниченко существенно улучшили статью.

### Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса  $C^2$  с переменами направления монотонности или выпуклости // Настоящий сборник. — С. 19-71.

2. ВОЛКОВ Ю.С. Применение рациональных кубических сплайнов для расчета динамических характеристик двигателя // Сплаины и их приложения. — Новосибирск, 1995. — Вып. 154: Вычислительные системы. — С. 65-72.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ В.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.

4. SPÄTH H. Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. — München: R.Oldenbourg Verlag, 1973. — 134 с.

Поступила в редакцию  
27 октября 1997 года