

# СПЛАЙН-ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ (Вычислительные системы)

1997 год

Выпуск 159

УДК 62.752:519.65

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ

Г.С.Мигиренко, В.Н.Говердовский, В.К.Королев

Сравнительно недавно получили бурное развитие упругие системы (связи) малой жесткости как основа структуры виброзащитных систем биологических и технических объектов. Это — нелинейные системы, силовая характеристика которых имеет производную переменного знака на участке относительных перемещений источника воздействия (транспортной или самоходной технологической машины) и объекта защиты (человека, прибора, оборудования и др.) [1]. Подобные системы могут иметь собственные частоты колебаний  $f_0 < 0.5$  Гц, так как жесткость их упругих связей

$$k_{s(r)}^{(H)} = \operatorname{sgn} \left| \frac{dQ_r}{dq_r} \right| \rightarrow 0, \quad (1)$$

где  $Q_r, q_r$  — соответственно обобщенная сила, действующая на объект, и координата,  $r = 1, 2, \dots, 6$ . Поэтому транспортные виброзащитные системы человека, включающие связи малой жесткости, в известном смысле, безрезонансные<sup>1</sup>. Их качество, например, по критерию

---

<sup>1</sup>Рассматриваются колебания в интервале резонансных частот тела человека и его органов: 1–63 Гц.

виброизоляции,<sup>2</sup> составляет  $K_R \ll 1$ , что в принципе недостижимо с помощью упругих систем, жесткость которых  $k_{s(r)}^{(c)} \gg k_{s(r)}^{(н)}$ .

Виброзащитные системы с упругими связями малой жесткости, в сравнении с традиционными, способны уменьшать динамические перегрузки защиты в 30–300 и более раз.

В работе рассматриваются две новые задачи об устойчивости колебаний виброзащитных систем с упругими связями малой жесткости.

### 1. Устойчивость параметрических колебаний корректора жесткости

Упругие системы (связи) малой жесткости — системы с несмежными (дискретными) формами (положениями) устойчивого равновесия и, следовательно, содержат внутри себя источник параметрических резонансов — корректор жесткости. Неоднородные упругие тонкостенные структуры при закритическом деформировании [2] образуют множество физических моделей подобных устройств. Модель одной из таких структур представлена на рис.1. Упругий тонкостенный стержень длины  $l$ , имеющий краевые и промежуточную шарнирные опоры, сжат с торцов статическими нагрузками  $N_c > N_{кр}$ , где  $N_{кр}$  — критическая сила сжатия. При нагружении стержня внешним крутящим моментом  $M = M(\varphi)$  на него действуют параметрические продольные нагрузки  $N_d$ . Исследуем возможность достижения динамической устойчивости стержня при периодическом характере нагрузок:  $N_d = N_1 \cos(\omega t)$ , где  $N_1$  и  $\omega$  — амплитуда и круговая частота.

---

<sup>2</sup>Критерий виброизоляции — это отношение силы вибрационного воздействия, воспринимаемого объектом защиты, к силе воздействия источника вибраций, трансформируемой упругими связями.

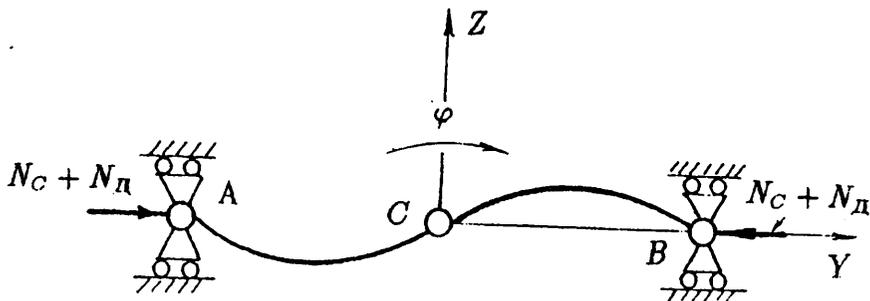


Рис. 1

Уравнение продольно-поперечных изгибных колебаний стержня имеет вид:

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + (N_c + N_d) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + M \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $W(y)$  — поперечный прогиб,  $EJ$  — изгибная жесткость,  $M$  — масса стержня.

Предполагая нашу структуру симметричной и рассматривая один из участков длиной  $l/2$ , функцию динамических прогибов представим в виде:

$$W = T(t) \sin\left(\frac{2\pi j y}{l}\right), \quad (3)$$

где  $j = 1, 2, \dots$  — число полуволн изгиба стержня. После подстановки (3) в (2) получаем уравнение относительно  $T(t)$ :

$$M \frac{d^2 T}{dt^2} + \left(\frac{2\pi j}{l}\right)^2 [EJ \left(\frac{2\pi j}{l}\right)^2 - N_c - N_1 \cos(\omega t)] T = 0. \quad (4)$$

Выполняя замену независимой переменной  $t = \frac{2\tau}{\omega}$  и полагая, что критическая сила сжатия стержня составляет  $N_{кр} = EJ \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2$ , преобразуем (4) к виду уравнения Матье [3]:

$$\frac{d^2 T}{d\tau^2} + [a - 2q \cos(2\tau)]T = 0, \quad (5)$$

где параметры  $a$  и  $q$  имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{16\pi^2 j^2 (N_{кр} j^2 - N_c)}{M\omega^2 l^2}, \\ q &= \frac{8\pi^2 j^2 N_1}{M\omega^2 l^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Нетрудно показать, что условие статической устойчивости собственных форм изгиба стержня достигается только при  $j = 1$ . Поэтому при оговоренном выше условии  $N_c > N_{кр}$  значения коэффициента  $a$  отрицательны.

Для суждения о динамической устойчивости решений уравнения Матье в плоскости его коэффициентов  $(a, q)$  строятся области устойчивости [3]. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что впервые предлагаются физические модели, возможность динамической устойчивости которых исследуется при условии  $a < 0$  в инфранизкочастотном диапазоне колебаний:  $\omega = 2\pi f$ , где  $f < 10$  Гц.

Способ построения областей устойчивости излагается в п.3, а их изображения представлены на рис. 2,а,б.

Из рис. 2,б следует, что устойчивость решений уравнения (4) при отрицательных значениях коэффициента  $a$  (левый квадрант) соблюдается для ограниченного диапазона изменений коэффициентов  $a$  и  $q$ :  $\{-3 < a < 0;$   $0 < q < 3\}$ ;  $\{-1 < a < 0;$   $7.5 < q < 9\}$ .

Анализ выражений (6) показывает, что среди множества физических моделей упругих систем малой жесткости существуют такие, которые возможно адаптировать в транспортные виброзащитные системы и обеспечить

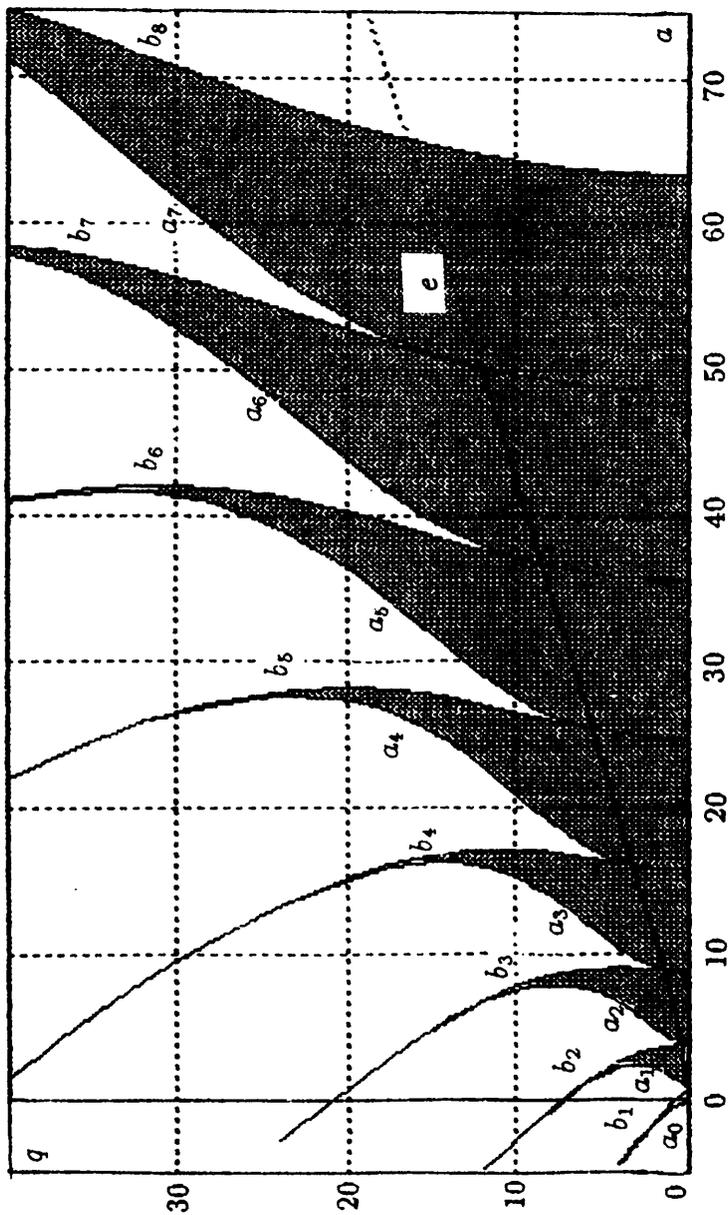


Рис. 2, а. Области устойчивости уравнения Матъе  $(a_0, b_1), \dots, (a_7, b_8)$ .

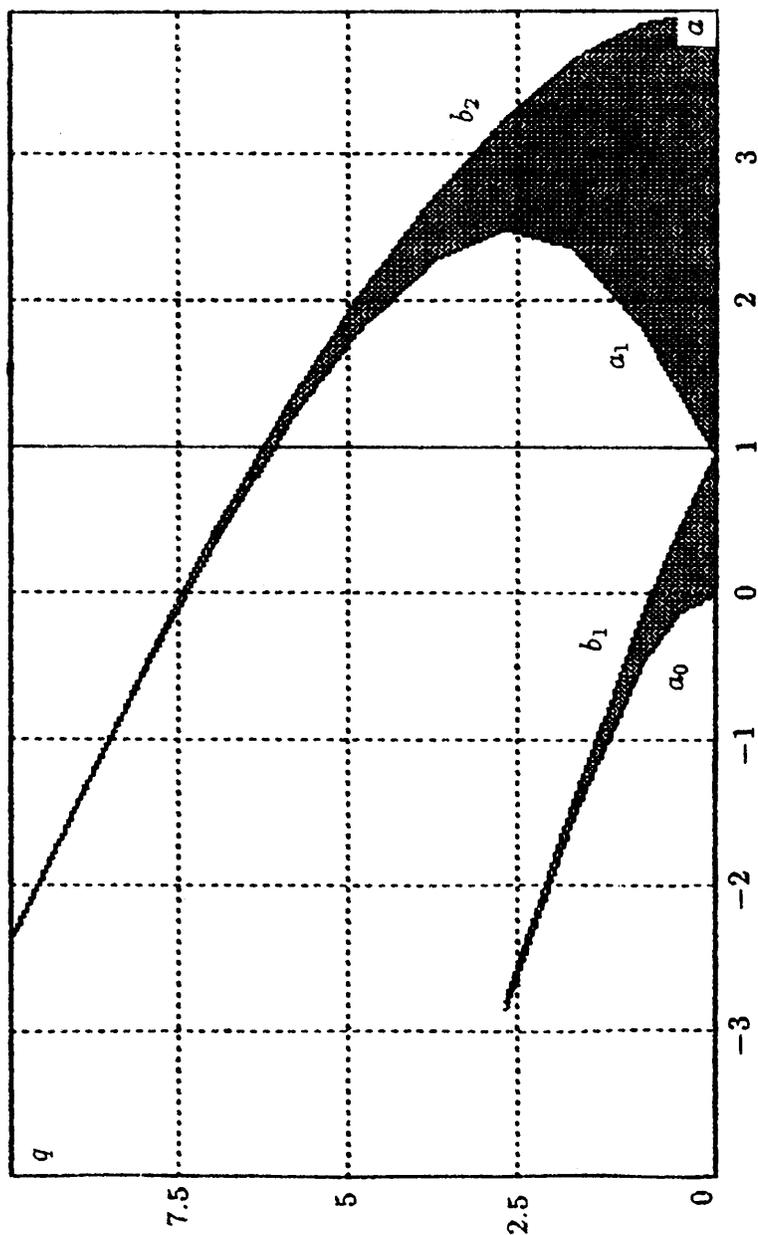


Рис. 2,6. Области устойчивости уравнения Матгье  $(a_0, b_1), (a_1, b_2)$ .

их динамическую устойчивость в условиях действия общей вибрации. Основные критериальные ограничения следующие:

1) превышение продольной нагрузки над критической  $\Delta N_c = (N_c - N_{кр})/N_{кр} \ll 1$ ;

2) отношение амплитуд динамической и статической нагрузок  $N_1/N_c \ll 1$ .

## 2. Устойчивость локальных колебаний виброзащитных систем пилота вертолета

Значительный интерес представляет, на наш взгляд, проблема снижения интенсивности локальных вибраций ряда транспортных виброзащитных систем человека. Так, например, ослабление крутильных колебаний головы пилота вертолета, особенно в режимах взлета и посадки, повышает безопасность полета. Исследуем биохимические условия обеспечения функционального комфорта пилота при локальных колебаниях виброзащитной системы. Под комфортом в данном случае понимается стабилизация крутильных колебаний головы в сагиттальной плоскости (плоскость изображения модели на рис.3).

Уравнение крутильных колебаний (кивков) головы имеет вид:

$$\begin{aligned}
 m_2 l_2^2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= \pm m_2 g l_2 \varphi_2 + \\
 &+ (5/7 m_{ч} + m_{п}) Z_2 \omega^2 l_2 \varphi_2 \cos(\omega t) - \\
 &- k_{2л} (l_2' - l_{к0}) \varphi_2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$m_2$  — масса головы;

$m_2 g l_2 \varphi_2$  — момент силы тяжести головы;

$(5/7 m_{ч} + m_{п}) Z_2 \omega^2 l_2 \varphi_2 \cos(\omega t)$  — момент переносной силы инерции ( $m_{ч}$  — масса сидящего на виброзащитном сиденье пилота,  $m_{п}$  — масса подвижных (установленных на упругой подвеске) частей сиденья);

$l_2$  — расстояние от "шарнира" 0 до центра масс головы;

$k_{2л}(l'_2 - l_{к0})\varphi_2$  — уравновешивающий момент пружины начальной длины  $l_{к0}$ , переменной длины  $l'_2$  и жесткости  $k_{2л}$ .

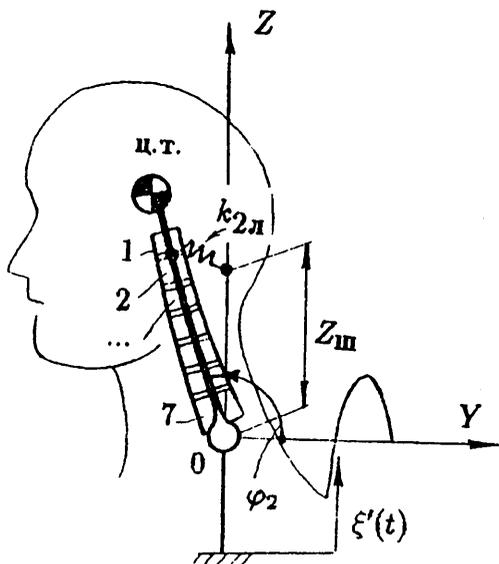


Рис. 3

Учитывая, что жесткости межпозвоночных дисков спинного и поясничного участков позвоночника человека в  $10^5$ – $10^6$  раз превышают жесткости соответствующих дисков шейного отдела, можно принять, что  $Z_2 = Z_1$ , где  $Z_1 = K_{R1}Z_c$  — амплитуда линейных перемещений сиденья пилота, причем  $Z_c$  — амплитуда вынуждающих сил  $\xi(t)$  общей вибрации, действующих на виброзащитную систему со стороны точек крепления сиденья к полу кабины, а  $K_{R1}$  — безразмерный коэффициент виброизоляции сиденья.

Выполнив замену переменных  $\frac{2\tau}{\omega}$  и преобразовав уравнение (7), приводим его к виду уравнения Матье для случая параметрических колебаний упругой системы при периодическом изменении внешней вынуждающей силы.

Параметрические коэффициенты  $a$  и  $q$  в данном случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{4}{m_2 l_2^2 \omega^2} [k_{2л} (l_2' - l_{к0}) \pm m_2 g l_2], \\ q &= \frac{2K_{R1} Z_c}{m_2 l_2} (5/7 m_{ч} + m_{п}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Или

$$\left. \begin{aligned} a &\approx \frac{0,45}{f^2} [k_{2л} (l_2' - l_{к0}) \pm m_2 g l_2], \\ q &\approx (64 - 230) K_{R1} Z_c. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Заметим, что в этой задаче коэффициент  $a$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Мы полагаем, что введение вместо жестких — упругих связей сиденья с источником вибраций — открывает возможность регулирования качества локальной виброзащиты пилота, в частности, минимизации амплитуды крутильных колебаний головы в сагиттальной плоскости. Для этого необходимо варьировать, прежде всего, жесткость  $k$ , упругих связей в зависимости от амплитуд вынуждающих сил  $\xi(i)$  и спектра их частот  $f$ . Как показали летные испытания, спектр частот  $f$  имеет ярко выраженный дискретный характер (рис.4). На рис. 4 введены следующие обозначения:  $x$  и  $y$  — номера машин; 1 и 1' — критериальные ограничения качества виброзащиты согласно ИСО 2631; 2 и 3 — соответственно минимальный и максимальный уровни качества виброзащиты экспериментального сиденья; 4 — минимальный уровень качества виброзащиты экспериментального сиденья в сравнении со штатным. Незаштрихованные части столбиков соответствуют уровням виброускорений для экспериментального сиденья.

Однако, если оборудовать рабочее место пилота каким-либо виброзащитным сиденьем, применяемым на наземных машинах, то при всех известных ограничениях на  $Z_c$  и  $Z_1$ , установленных для вертолетов, колебания головы будут носить неустойчивый характер (незаштрихованная область на рис.2а, правый квадрант). Причи-

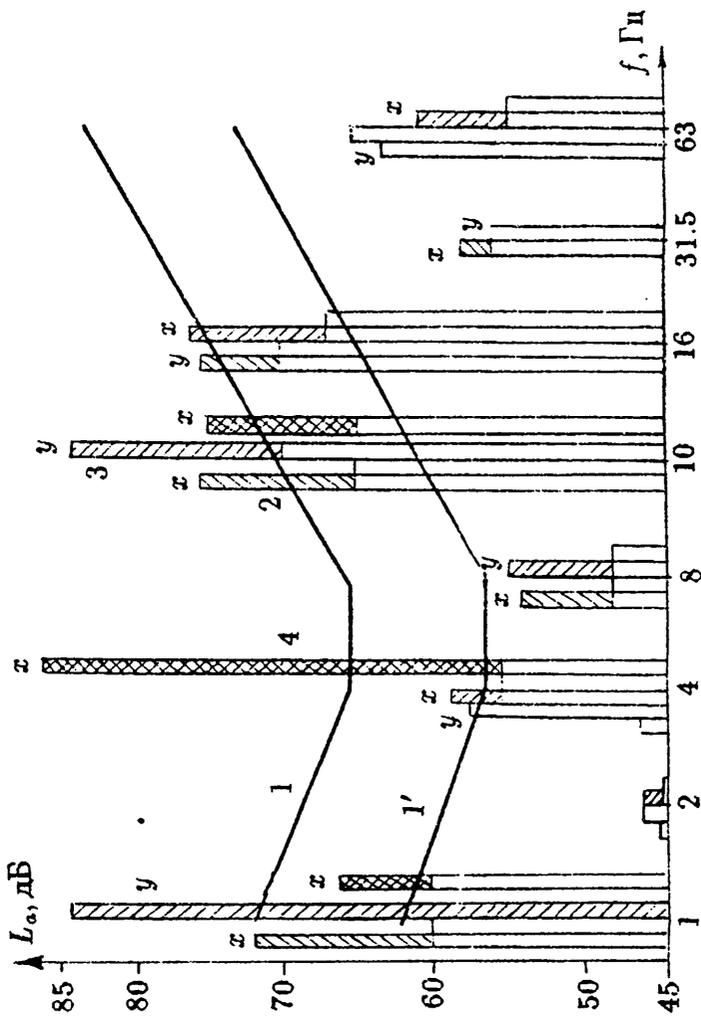


Рис. 4. Динамические характеристики виброзащитной системы пилота вертолета Ми-8.

на в том, что виброзащитные системы оператора, включающие сиденья с традиционными упругими подвесками, имеют частоты собственных колебаний в пределах  $\omega_0 > 20-45$  1/с. При этом коэффициенты виброизоляции составляют  $K_{R1} > 1,6-3,5$ . То есть данные подвески не ослабляют, а усиливают колебания виброзащитной системы и ее элементов.

Иное дело, если виброзащитная система оператора включает упругие связи малой жесткости. Как отмечалось выше, такие системы позволяют довести качество защиты от общей вибрации до  $K_{R1} < 0,0017-0,12$ . Подстановка этих значений в соответствующую формулу (9) показывает, что локальные колебания могут быть устойчивыми во всем диапазоне частот (заштрихованная область на рис.2,а, правый квадрант).

Варьирование параметров жесткости упругих связей малой жесткости вплоть до нуля и их адаптация (без автоматического управления) путем смены форм изгиба тонкостенных структур корректора жесткости с переходом в докритическую область деформирования (без снижения несущей способности) открывает, вероятно впервые, возможность повышения качества локальной виброзащиты путем управления качеством общей.

### 3. О построении областей устойчивости решений уравнения Матье

В связи с необходимостью определения устойчивости конкретных систем, описываемых уравнением Матье, возникает потребность в построении областей устойчивости, аналогичных приводимым в литературе по уравнению Матье (см., например, [3]), для любых численных значений параметров (обычно же приводятся — для иллюстрации — лишь первые шесть областей, см. рис. 2а).

Напомним некоторые сведения из теории уравнения Матье [3-5].

Периодические решения уравнения Матье (функции Матье первого рода) можно представить в виде следующих четырех групп рядов:

Собственные  
значения:

$$ce_{2m}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(2m)} \cos 2kz, \quad (a_{2m})$$

$$ce_{2m+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{(2m+1)} \cos(2k+1)z, \quad (a_{2m+1}),$$

$$se_{2m+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{(2m+1)} \sin(2k+1)z, \quad (b_{2m+1}),$$

$$se_{2m+2}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{(2m+2)} \sin(2k+2)z. \quad (b_{2m+2}).$$

(нижний индекс — порядок функции Матъе:  $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Подставляя поочередно каждый из этих рядов в уравнение Матъе (вида (5)) и приравнивая нулю коэффициенты при  $\cos 2kz$ ,  $\cos(2k+1)z$ ,  $\sin(2k+1)z$ ,  $\sin(2k+2)z$  для  $k = 0, 1, 2, \dots$ , получим следующие рекуррентные соотношения:

для  $ce_{2m}(z, q)$

$$aA_0 - qA_2 = 0,$$

$$(a-4)A_2 - q(A_4 + 2A_0) = 0,$$

$$[a - (2k)^2]A_{2k} - q(A_{2k+2} + A_{2k-2}) = 0, \quad k \geq 2;$$

для  $ce_{2m+1}(z, q)$

$$(a-1-q)A_1 - qA_3 = 0,$$

$$[a - (2k+1)^2]A_{2k+1} - q(A_{2k+3} + A_{2k-1}) = 0, \quad k \geq 1;$$

для  $se_{2m+1}(z, q)$

$$(a-1+q)B_1 - qB_3 = 0,$$

$$[a - (2k+1)]B_{2k+1} - q(B_{2k+3} + B_{2k-1}) = 0, \quad k \geq 1;$$

для  $se_{2m+2}(z, q)$

$$(a-4)B_2 - qB_4 = 0,$$

$$[a - (2k)^2]B_{2k} - q(B_{2k+2} + B_{2k-2}) = 0, \quad k \geq 2.$$

Если из этих систем уравнений последовательно исключить отношения коэффициентов  $A_{I+2}/A_I$ ,  $A_{I+4}/A_{I+2}$ , ... и  $B_{I+2}/B_I$ ,  $B_{I+4}/B_{I+2}$ , ..., то получатся зависимости вида  $a = f(a, q)$ . Найденное отсюда значение  $a$  при заданном  $q$  и есть *собственное* значение функции Матье.

Кривые в плоскости  $(a, q)$ , соответствующие собственным значениям, называемые *характеристическими*, разделяют всю эту плоскость на области устойчивых и неустойчивых решений уравнения Матье. Характеристические зависимости имеют вид непрерывных дробей [6]:

для  $a_{2m}$  :

$$a = \frac{2q^2}{a - 2^2 - \frac{q^2}{a - 4^2} - \dots - \frac{q^2}{a - (2k)^2} - \dots}; \quad (10)$$

для  $a_{2m+1}$  :

$$a = 1 + q + \frac{q^2}{a - 3^2 - \frac{q^2}{a - 5^2} - \dots - \frac{q^2}{a - (2k+1)^2} - \dots}; \quad (11)$$

для  $b_{2m+1}$  в предыдущем выражении надо  $q$  заменить на  $-q$ ;

для  $b_{2m+2}$  — зависимость  $a = f(a, q)$  получается, если в соотношении (10) приравнять нулю всю непрерывную дробь, начиная с первого частного знаменателя.

В книге Мак-Лахлана [3] уделено достаточно внимания вычислительным аспектам построения областей

устойчивости. Однако, некоторые вопросы, на наш взгляд, нуждаются в дополнительной проработке.

Отметим вначале, что приведенные выше выражения (являющиеся фактически трансцендентными уравнениями для определения  $a$ ) содержат все характеристические зависимости и соответствующие им кривые определяют все границы областей устойчивости — выбор конкретной кривой зависит от порядка функции Матье и исходной точки  $(a, q)$ .

При непосредственном применении приведенных формул возникает численная неустойчивость счета, связанная с особенностями в частных знаменателях непрерывных дробей при приближении значений  $a$  к величинам  $(2k)^2$ ,  $(2k+1)^2$ ,  $(2k+2)^2$  и значений  $q$  к нулю.

Сравнительно простое преобразование непрерывной дроби (10) позволяет избавиться от особенностей в ее частных знаменателях. После таких преобразований дробей вида (10),(11) удастся вести счет на всей шкале значений  $a$  и  $q$ . Покажем это на примере выражения (10).

Введем следующие обозначения:

$$Z_{2k} = \frac{q^2}{a - (2k)^2 -}$$

...

$$A_{2k} = a - (2k)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно следующее рекуррентное соотношение:

$$Z_{2k} = \frac{q^2}{A_{2k} - Z_{2(k+1)}} \quad (12)$$

Если ввести обозначение  $Q_0 = 2q^2/a$ , то из выражения (10) последовательно получаем:

$$A_2 = Z_4 + Q_0,$$

$$A_4 = Z_6 + Q_2,$$

$$\text{где } Q_2 = \frac{q^2}{A_2 - Q_0},$$

$$A_0 = Z_0 + Q_4,$$

$$\text{где } Q_4 = \frac{q^2}{A_4 - Q_2},$$

...

$$A_{2k} = Z_{2(k+1)} + Q_{2(k-1)},$$

где

$$Q_{2(k-1)} = \frac{q^2}{A_{2(k-1)} - Q_{2(k-2)}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (13)$$

После этого вычисления собственных значений  $a$  (для первой функции Матье порядка  $2m$ ) ведется по формуле:

$$a = (2m)^2 + Z_{2(m+1)}(q, a) + Q_{2(m-1)}(q, a). \quad (14)$$

Вычисления начинаются с "конца": выбирается некоторое число  $k = K$ , для которого полагается  $Z_{2K} = 0$  и далее по формулам (12), (13) при заданном значении  $q$  и текущем значении  $a$  вычисляются величины  $Z$  и  $Q$  с соответствующими индексами. При  $q = 0$  начальное приближение  $a^0 = (2m)^2$ . Далее, придавая приращение  $q$ , начиная от  $a^0$ , по методу простой итерации определяем  $a$  по формуле (14). Для каждого следующего значения  $q$  в качестве  $a^0$  берется значение  $a$ , полученное на предыдущем шаге. По мере увеличения  $q$  для сходимости счета требуется все большее число итераций. Начиная с некоторого момента, когда метод простой итерации становится бесполезным, с помощью пошаговых вычислений мы заключаем корень уравнения в "вилку" и посредством линейной интерполяции находим приближенное значение корня. Окончательное его значение определяется по методу Вегстейна (разностный аналог метода Ньютона).

Этот прием применен для вычислений характеристических функций всех четырех типов. Проведены расчеты, подтверждающие приведенные у Стретта [4] вычисления Айнса — для значений  $q$  в пределах от 0 до 40 и для характеристических функций  $a_0, b_1, \dots, a_5, b_6$ . Кроме того,

проведены вычисления для двух областей устойчивости, ограниченных характеристическими кривыми  $a_6, b_7, a_7, b_8$ , данные о которых в литературе отсутствуют. Эти четыре кривые показаны на рис.2,а. На этом же рисунке проведена кривая  $e$ , "вырезающая" из всех областей устойчивости область "малых" значений  $q$ , при которых все области устойчивости сливаются в одну. Проводя экстраполяцию кривой  $e$ , можно приближенно оценить устойчивость исследуемой системы при таких значениях ее параметров, при которых сами области устойчивости еще не построены. Правомерность такой экстраполяции следует из регулярного характера зависимостей  $a = a(q)$ . С увеличением  $q$ , т.е. там, где экстраполяция начинает вызывать сомнения, требуется более точный анализ — с аккуратным построением областей устойчивости.

#### Л и т е р а т у р а

1. Виброзащитные системы с квазинулевой жесткостью /П.М.Алабужев, Г.С.Мигиренко, Л.И.Ким и др. Под ред. К.М.Рагульскаса. - Л.: Машиностроение, 1986. — 96 с.
2. **ГОВЕРДОВСКИЙ В.Н.** Синтез и оптимизация виброзащитных систем (ВЗС) с упругими связями на основе неоднородных упругих структур. //Международный Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике: Тез.докл. - Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1996. — С. 75.
3. **МАК-ЛАХЛАН Н.В.** Теория и приложения функций Матье. /Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1953. — 475 с.
4. **СТРЕТТ М.Д.О.** Функция Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ-НКТП. - Харьков-Киев, 1935. - 238 с.
5. **ВЕЙТМЕН Г. и ЭРДЕЙИ А.** Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ляме и Матье. — М.: Наука, 1967. — 299 с.

6. ХОВАНСКИЙ А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М.: Гос.изд. ТТЛ, 1956. — 203 с.

Поступила в редакцию  
22 января 1997 года