ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И
ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
(Вычислительные системы)
1998 год Выпуск 161

УДК 512.8

О КОНТРПРИМЕРАХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ (1,0,1) С РАЗЛИЧНЫМИ АЛГОРИТМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ[1]

В.Н. Власов[2]

Введение

Необходимость построения контрпримеров конструктивных булевых алгебр элементарной характеристики (1,0,1) с различными алгоритмическими свойствами вызвана проблемой нахождения критерия сильной конструктивизируемости для булевых алгебр данного вида. С.П.Одинцовым доказан факт [5] сильной конструктивизируемости для булевых алгебр с элементарной характеристикой Ершова-Тарского (1,0,1) при разрешимости множеств атомов, безатомных элементов и атомных элементов. С другой стороны, С.С.Гончаровым построен конструктивный, но не сильно конструктивизируемый линейный порядок L_{gonch}, не содержащий плотных интервалов (типа η) [2, с. 119]. Таким образом, конструктивная булева алгебра $L = 1 + (L_{gonch} + 1 + \eta + 1) \times \eta + 1$ будет иметь элементарную характеристику, равную (1,0,1), и не будет сильно конструктивизируемой.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96-01-01525.
[2]630090,Новосибирск, Пирогова, 4, e-mail: VLASOV@math.nsc.ru

Автором подготовлена и сдана в печать для журнала "Алгебра и Логика" статья "Конструктивизируемость булевых алгебр, элементарной характеристики (1,0,1)", где вводятся, описываются и применяются основные понятия и методы, необходимые для конструирования контрпримеров в контексте исследований Л.Фейнера [7], С.С.Гончарова [2], Дж.Реммела [6]. В ней предложен пример конструктивной, но не сильно конструктивизируемой булевой алгебры с разрешимым множеством атомов. Но, все-таки, открытым остается вопрос, поставленный в свое время С.П.Одинцовым [2, с.170]: "Существует ли конструктивизируемая, но не сильно конструктивизируемая булева алгебра *B* характеристики (1,0,1), допускающая конструктивизацию с разрешимыми множествами атомов и безатомных элементов?"

В предлагаемом исследовании построен пример конструктивной булевой алгебры характеристики (1,0,1) с разрешимым множеством атомов и безатомных элементов, для которой в любой конструктивизации одновременно не будут разрешимы множества атомов, безатомных элементов, атомных элементов и идеал Фреше. К сожалению, невозможно показать неразрешимость идеала Фреше при различных конструктивизациях в данной ситуации. Но если будет указан способ построения такой конструктивизации для сильно конструктивной булевой алгебры указанной характеристики (и пусть даже только для достаточно простой алгебры, подобной применяемой в построениях ниже), что и идеал Фреше будет также разрешим, тогда из основной теоремы этой работы будет следовать, что невозможно существование булевой алгебры с одновременно разрешимыми множествами атомов, безатомных и атомных элементов. И в этом случае характеризация для булевой алгебры данной характеристики будет определена полностью.

Также, в некотором смысле, новый пример является предельным в применении техники Фейнера-Реммела-Гончарова (это будет хорошо видно ниже), и дальнейшие результаты в этом направлении будут, вероятно, получены другим способом.

В связи с вышеизложенным, в данной статье в кратком виде будут приведены основные понятия, результаты и методы, развитые автором в предыдущих работах, необходимые для получения представленного результата.

Обзор важнейших результатов читатель может найти в [1].

Основные используемые обозначения являются общепринятыми и могут быть найдены в монографии [2] и статье [1]. Так, используем следующие обозначения для множеств атомов, безатомных и атомных элементов, идеалов Ершова–Тарского и Фреше:

$$At(B), \quad Al(B), \quad As(B), \quad I(B), \quad F(B).$$

Те же самые буквы используем для обозначения формул, определяющих эти множества:

$At(x) \rightleftharpoons \forall y \leq x(y = 0 \vee (\overline{y} \wedge x = 0))\ \&\ x \neq 0;$

$F(x) \rightleftharpoons \exists n \in \mathrm{N}\ \exists x_1 \ldots \exists x_n$

$$\left(x = \bigvee_{i=1}^{n} x_i\ \&\ \mathop{\&}_{i \neq j} x_i \wedge x_j = 0\ \&\ \mathop{\&}_{i=1}^{n} At(x_i)\right)$$

и $At(B) = \{x \in B | At(x)\}$ и т.д.

Если $E \triangleleft B$ — произвольный идеал, то будем полагать:

$E_0 \rightleftharpoons \{0\}$, $E_1 \rightleftharpoons E$, $E_{n+1} \rightleftharpoons \varphi_n^{-1}(E(B/E_n))$, где $\varphi_n^{-1} : B \to B/E_n$ — канонический эпиморфизм.

А если R — это одно из имен At, Al, As, I, то $R \in \{At, Al, As, I\}$ и

$$R^{E_n}(B) \rightleftharpoons \varphi_n^{-1}(R(B/E_n)), \quad R^{E_n}(B) = \{x \in B | B \models R^{E_n}(x)\}.$$

Но в случае, когда $E_n = I_n$ — цепь идеалов Ершова-Тарского, пишем R_n вместо R^{E_n}, т.е.

$$At_0(B),\ Al_0(B),\ As_0(B),\ I_1(B), \ldots,\ At_n(B), \ldots,\ I_{n+1}(B).$$

Техника работы с двоичными деревьями $\langle D, \varphi\rangle$, понятия частичного порядка на них $\preceq$ и высоты элемента $h(d)$, стандартные функции L, R, S, H, а также порождение булевых алгебр B_{1+L+1} по заданным линейным порядкам $1+L+1$ с минимальным и максимальным элементом как систем полуоткрытых справа интервалов (но иногда, для удобства, будем рассматривать булевы алгебры, порожденные линейными порядками без максимального элемента B_{1+L} как систему полуоткрытых справа интервалов и интервалов вида $[a, \infty)$) — может быть найдена в [2], мы напомним лишь некоторые обозначения:

$$R(n) \rightleftharpoons 2n+2, \quad L(n) \rightleftharpoons 2n+1,$$

$$H(n) \rightleftharpoons \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad \text{где } [x] \text{ — целая часть } x,$$

$$S(n) \rightleftharpoons \begin{cases} n-1, & \text{если } n \text{ четное и } n > 0, \\ n+1, & \text{если } n \text{ нечетное и } n > 0, \\ 0, & \text{если } n = 0, \end{cases}$$

$$h(0) = 0, \quad h(n+1) = h(H(n)) + 1,$$

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, n+1) = H(H(x, n)),$$

$$x \preceq y \Leftrightarrow \prod_{n=0}^{h(x)} |H(x, n) - y| = 0.$$

Таким образом, функция $R(n)$ дает номер правой вершины, лежащей под вершиной с индексом n, $L(n)$ — левой, функция H — ближайшей выше, S — соседней вершины, лежащей под той же, что и данная; $h(n)$ указывает расстояние от вершины с индексом n до максимальной, где под расстоянием понимается количество предшествующих вершин в ветви, на которой лежит вершина с номером n, отношение $x \preceq y$ указывает, что x и y лежат на одной ветви и x лежит под y.

Знаки $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ будут служить сокращениями языка и использоваться вместо слов "если, то", "тогда и только тогда, когда".

Выражение $\exists^{\infty} n R(n)$ будет обозначать:

на натуральных числах — $(\forall n \exists m > n)\ R(m)$;

в языке булевых алгебр —

$$\forall n \in \mathbf{N} \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x \quad \left(\mathop{\&}_{i=1}^{n} R(x_i) \to R(x) \ \& \ \mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i \wedge x = 0\right),$$

или что то же самое:

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \exists x_1 \ldots \exists x_n \ \left((\mathop{\&}_{i=1}^{n} R(x_i)) \ \& \ (\mathop{\&}_{i \neq j} x_i \wedge x_j = 0)\right).$$

Обозначение $[a]_B$ будет соответствовать главному идеалу, порожденному элементом булевой алгебры $a \in B$ — $\{x \in B | x \leq a\}$. Стандартная нумерация n-ок будет обозначаться как $\langle .,.,...\rangle$, обратные операции к нумерации пар — как r и l, при этом $\langle \mathrm{l}(n), \mathrm{r}(n)\rangle = n$.

В зависимости от удобства изложения мы будем свободно переходить от языка конструктивных моделей к языку рекурсивных моделей. Отметим, что сильная конструктивизируемость модели в терминах рекурсивности означает существование разрешимой модели, изоморфной данной.

Пусть B — произвольная булева алгебра элементарной характеристики (1,0,1). Определим следующие отношения на B :

$R(x) \rightleftharpoons \neg I(x) \ \& \ \forall y \leq x(As(y) \to F(y))$;

$P(x) \rightleftharpoons \neg I(x) \ \& \ \forall y \leq x(\neg R(y))$;

$S(x) \rightleftharpoons \neg I(x) \ \& \ \forall y \leq x(\neg P(y))$;

$J(x) \rightleftharpoons I(x) \vee R(x) \vee P(x) \vee \exists a \exists b(x = a \vee b \ \& \ R(a) \ \& \ P(b))$.

Таким образом, предикат $R(x)$ выделяет x как элемент характеристики (1,0,1) (в булевой алгебре B характеристики (1,0,1)), наиболее простого внутреннего строения, т.е. под ним нет атомных элементов не из $F(B)$ (также отметим, что из $S(x)$ не следует $R(x)$). Пусть

$J(B) \rightleftharpoons \{x \in B | B \models J(x)\}$,

тогда $J(B) \triangleleft B$ — идеал алгебры B.

Далее,

$$J_2(x) \rightleftharpoons \exists m \in \mathbf{N}\ \exists x_1 \ldots \exists x_m \Big(x = \bigvee_{i=1}^{m} x_i \ \&\ \mathop{\&}_{i \neq j} x_i \wedge x_j = 0 \ \&$$

$$\& \ (\mathop{\&}_{i=1}^{m} \forall y \leq x_i (J(y) \vee J(\overline{y} \wedge x_i)) \ \&\ \neg J(x_i)) \Big),$$

$$G(x) \rightleftharpoons Al^J(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists t (J(t \wedge \overline{x}) \ \&\ \neg J(t) \ \&\ \forall z \leq t \ (J(z) \ \&\ J(t \wedge \overline{z}))),$$

т.е. $J_2(\mathcal{B}) = \varphi^{-1}(F(\mathcal{B}/J(\mathcal{B})))$, $G(\mathcal{B}) = \varphi^{-1}(Al(\mathcal{B}/J(\mathcal{B})))$, где $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}/J(\mathcal{B})$ — канонический эпиморфизм, и $J_2(\mathcal{B})$, $G(\mathcal{B}) \triangleleft \mathcal{B}$.

Наконец, полагаем

$$W(x) \rightleftharpoons \forall y \leq x (As(y) \to \neg At^F(y))$$

это означает, что под x нет атомных элементов типа $\mathcal{B}_\omega$, и все атомные элементы порождены идеалом Фреше и элементами типа $\mathcal{B}_{1+k \times \eta + 1}$. Пусть

$$K_0(x) \rightleftharpoons (x = 0);$$

$$K_1(x) \rightleftharpoons W(x) \ \&(\exists a \ \exists b (x = a \vee b \ \&\ S(a) \ \&\ G(b)));$$

$$K_n(x) \rightleftharpoons W(x) \ \&\ \exists m \in \mathbf{N} \ \exists x_1 \ldots$$

$$\ldots \exists x_m \Big(x = \bigvee_{i=1}^{m} x_i \ \&\ \mathop{\&}_{i \neq j} x_i \wedge x_j = 0 \ \&\ \Big(\mathop{\&}_{i=1}^{m} \forall y \leq x_i (K_{n-1}(y) \vee$$

$$\vee K_{n-1}(\overline{y} \wedge x_i)) \ \&\ \neg K_{n-1}(x_i) \Big) \Big),$$

т.е. для $n \geq 2$ $K_n(\mathcal{B}) = \varphi^{-1}(F(\mathcal{B}/K_{n-1}(\mathcal{B})))$, где $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}/K_{n-1}(\mathcal{B})$ — канонический эпиморфизм, $K_n(\mathcal{B}) \triangleleft \mathcal{B}$, и под элементами из $K_n(\mathcal{B})$ нет атомных элементов типа $\mathcal{B}_\omega$.

Определим теперь основные предикаты для $n \geq 1$:

$$\Psi_n(x) \rightleftharpoons \forall m \in \mathbf{N} \ \exists x_1 \ldots \exists x_m$$

$$\Big(\mathop{\&}_{i=1}^{m} (x_i \leq x \ \&\ K_n(x_i) \ \&\ \neg K_{n-1}(x_i)) \ \&\ \mathop{\&}_{i \neq j} x_i \wedge x_j = 0 \Big);$$

или что то же самое:

$$\Psi_n(x) \rightleftharpoons \exists^\infty (y \leq x \ \&\ K_n(x) \ \&\ \neg K_{n-1}(x));$$

и предикаты

$$\Phi_n(x) \rightleftharpoons \neg K_n(x) \ \&\ \forall y \leq x (W(y) \to K_n(y));$$

$$\Omega_n \rightleftharpoons \exists x (\Psi_n(x) \ \&\ \Phi_n(x)).$$

Отметим простейшее свойство введенных отношений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любого $n > 1$ выполняется*

$$\forall x\Big(\Psi_n(x) \,\&\, \Phi_n(x) \to (\neg\Phi_{n-1}(x) \,\&\, \neg\Psi_{n+1}(x))\Big).$$

1. Оценка алгоритмической сложности по Фейнеру некоторых необходимых свойств конструктивных булевых алгебр

Напомним читателю понятие характеристики Фейнера для $\emptyset^\omega$-рекурсивных функций и множеств [2, 5–7].

Пусть $X \subseteq \mathbf{N}$, тогда $X' \rightleftharpoons \{n \in \mathbf{N} | \{n\}^X(n) \downarrow\}$ и индуктивно определим: $X^0 \rightleftharpoons X$, $X^{(n+1)} \rightleftharpoons (X^n)'$, $X^\omega \rightleftharpoons \{(n,m) | n \in X^{(m)}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $e \in \mathbf{N}$, $(a,b) \in \mathbf{N}^2$, тогда будем говорить, что функция $\{e\}^{\emptyset^\omega} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ имеет характеристику (a,b), если:

1) $\{e\}^{\emptyset^\omega}$ — всюду определена;

2) $\forall n, m, q \in \mathbf{N}$ при $m > a + nb$ вопрос "$(q,m) \in \emptyset^\omega$-?" не задается оракулу $\emptyset^\omega$ при вычислении $\{e\}^{\emptyset^\omega}$ в точке n.

В этом случае будем обозначать $\{e\} \sim (a,b)$, в противном случае: $\{e\} \not\sim (a,b)$. Если $A \subseteq \mathbf{N}$, $e \in \mathbf{N}$ и c_A — характеристическая функция множества A, то в случае, если $c_A = \{e\}^{\emptyset^\omega}$, будем писать $A \sim (a,b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неформальный смысл введенного определения состоит в том, что обращение к оракулу $\emptyset^\omega$ ограничивается линейной функцией $a + nb$ так, что для данного аргумента $n \in \mathbf{N}$ в ходе вычисления $\{e\}^{\emptyset^\omega}(n)$ используется только оракул $\emptyset^{a+nb}$.

Отметим ряд свойств введенных определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [2,7]. *Если $X, Y \subseteq \mathbf{N}$, $X \sim (a,b)$ и $X \Delta Y$ — конечно, то $Y \sim (a,b)$.*

(В самом деле, отличие областей характеристических функций на конечное множество определяется рекурсивно и не требует изменения оракулов.)

Отметим важную связь фейнеровых характеристик с арифметической иерархией

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [7,2, с.82–83]. *Если* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — *рекурсивная функция и множество* $X = \{n | \exists z_1 \forall z_2 \ldots f(\langle z_1, \ldots \ldots, z_{a+nb} \rangle) = 1\}$, *то тогда* $X \sim (a, b)$.

Определим необходимые свойства конструктивных булевых алгебр с одновременно разрешимыми множествами атомов, безатомных и атомных элементов и идеала Фреше в терминах иерархии Фейнера. Сопоставим каждой булевой алгебре $\mathcal{B}$ подмножество $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ множества натуральных чисел, оценивая алгоритмическую сложность которого, мы получим необходимое свойство. В качестве искомого множества рассмотрим $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 1 \ \& \ \mathcal{B} \models \Omega_n\}$.

При $At(\mathcal{B})$, $Al(\mathcal{B})$, $As(\mathcal{B})$ и $F(\mathcal{B})$, разрешимых в некоторой конструктивизации ν, будем иметь $I_1(x) \in \Sigma_1$, следовательно, используя алгоритм Тарского–Куратовского [4, с.394–405], легко получаем, что R представляется в Π_1-форме, P — Π_2-форме, S — Π_3, J — Σ_3, J_2 — Σ_5, G — Σ_5, W — Π_2, K_1 — Σ_6, Ψ_1 — Π_7, Φ_1 — Π_7, Ω_1 — Σ_8.

Далее, мы аналогично получаем, что K_n представляется в Σ_{2n+4}-форме, Ψ_n и Φ_n — в Π_{2n+5}-форме и, наконец, Ω_n — в Σ_{2n+6}-форме.

Заменим рекурсивную матрицу в представлении Ω_k в виде Σ_{2k+6}-формы на рекурсивную функцию f такую, что [матрица $\Omega_k](z_1, \ldots, z_{2k+6}) \Leftrightarrow f(\langle z_1, \ldots, z_{2k+6} \rangle) = 1$, причем ясно, что f можно выбрать одну для всех Ω_k, следовательно, используя предложение 3, можно получить

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть* B — *конструктивная булева алгебра элементарной характеристики* $(1, 0, 1)$. *Если* $At(\mathcal{B})$, $Al(\mathcal{B})$, $As(\mathcal{B})$ *и* $F(\mathcal{B})$ — *разрешимые множества, то* $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \sim (6, 2)$.

Отметим, что если $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — изоморфны, то очевидно, что $\forall n(\mathcal{B}_1 \models \Omega_n \Leftrightarrow \mathcal{B}_2 \models \Omega_n)$, и таким образом, мы можем говорить об инвариантности множества $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ относительно изоморфизмов.

Итак, из представленных утверждений следует, что если для рекурсивной булевой алгебры $\mathcal{B}$ неверно

$\mathcal{N}(\mathcal{B}) \sim (6,2)$, то никакой изоморфизм не сделает ее разрешимой. То же самое, переформулированное на языке конструктивных моделей, значит, что если для булевой алгебры в какой-то конструктивизации неверна оценка (6,2), то никакая ее конструктивизация не будет сильной.

2. Основная теорема

В нашей работе мы хотим в конце концов построить булеву алгебру $\mathcal{B}$ такую, что $At(\mathcal{B})$ — рекурсивно, но тем не менее $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \not\sim (6,2)$.

Введем следующие обозначения:

$A_n \rightleftharpoons \{(x,m) | x \in \emptyset^{(m)} \ \& \ m \leq n\}$;

$X(a,b) \rightleftharpoons \{n \in \mathbb{N} | n$ - чётное & $\{n/2\}^{A_{a+nb}}(n) = 0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [7, 2, с. 83]. *Если $Y \subseteq \mathcal{N}$ и в симметрической разности $X(a,b) \Delta Y$ лежат только нечетные числа, то $Y \not\sim (a,b)$.*

Таким образом, положив $Y = \mathcal{N}(\mathcal{B})$ и сумев показать, что в $X(a,b) \Delta \mathcal{N}(\mathcal{B})$ лежат только нечетные числа, мы для данной конструктивной булевой алгебры $\mathcal{B}$ покажем $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \not\sim (6,2)$.

Практически для нас станет важным эквивалентное описание, т.е. чтобы опровергнуть оценку $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \sim (6,2)$, будем стремиться к посылке [n – чётное $\Rightarrow (\mathcal{B} \models \Omega_n \Leftrightarrow n \in \in X(6,2))$] (это описание станет понятным, если вспомним $Y = \mathcal{N}(\mathcal{B}) = \{n | \mathcal{B} \models \Omega_n\}$).

Следующее предложение позволяет представить условие $n \in X(a,b)$ в удобном для дальнейших преобразований виде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 [7,6, с.608]. *Для любых $a,b \in \mathbb{N}$ существует такая рекурсивная функция $\rho_{(a,b)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что*

$$\forall n \Big(n \in X(a,b) \leftrightarrow \exists z_1 \forall z_2 \ldots \rho_{(a,b)}(\langle z_1, \ldots, z_{a+nb+1} \rangle) = 1 \Big).$$

Итак, зафиксируем вывод, который нам позволяют сделать два последних предложения — чтобы для данной конструктивной булевой алгебры $\mathcal{B}$ было неверно

$\mathcal{N}(\mathcal{B}) \sim (6,2)$, мы должны добиться следующего:

$$n \text{ чётное} \Rightarrow \Big(\mathcal{B} \models \Omega_n \Leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \dots \rho_{(6,2)}(\langle x_1, \dots, x_{6+2n+1}\rangle) = 1\Big).$$

Используя алгоритм Крейсела–Шенфильда и Ван Хао перевода Π_{2n+1}-формы к $U_n\forall$-форме [4, с.422] (где U соответствует $\exists^\infty$ в нашем обозначении), преобразуем правую часть заключения в выражении выше к следующему эквивалентному виду:

$$\exists i \forall k \neg \exists^\infty y_1 \dots \exists^\infty y_{n+2} \forall y_{n+3} (r(\langle i, k, y_1, \dots, y_{n+3}\rangle) = 1),$$

где $r: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ — рекурсивная функция. Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Существует такая рекурсивная функция $r: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, что если для любых $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$*

$$\mathcal{B} \models \Omega_{2m} \Leftrightarrow \exists i \forall k \neg \exists^\infty z_1 \dots$$
$$\dots \exists^\infty z_{2m+2} \forall z_{2m+3} \Big(r(\langle i, k, z_1, \dots, z_{2m+3}\rangle) = 1\Big),$$

то имеет место $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \not\sim (6,2)$.

Теперь мы можем перейти к формулировке и доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Существует конструктивная булева алгебра с разрешимыми множествами атомов, безатомных элементов и разрешимыми идеалом Фреше, элементарная характеристика которой равна $(1,0,1)$, но в любой конструктивизации у которой одновременно неразрешимы множества атомов, безатомных элементов, атомных элементов и идеал Фреше.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перед изложением основного построения докажем лемму, необходимую для дальнейшего конструирования.

ЛЕММА 1. *Для любого z_0 и произвольного рекурсивного отношения $T(k)$ найдется такое рекурсивно-перечислимое двоичное дерево $D = D_{T(\langle z_0, \cdot\rangle)}$, что если $\forall y \neg T(\langle z_0, y\rangle)$, то $\mathrm{ch}(\mathcal{B}_D) = (0, \infty, 0)$ и $\forall y(As(y) \to Al^F(y))$. Если же $\exists y T(\langle z_0, y\rangle)$, то $\mathrm{ch}(\mathcal{B}_D) = (0, m, 0)$ для некоторого $m \in \mathbf{N}$ и $At(\mathcal{B}_D)$, $Al(\mathcal{B}_D)$, $F(\mathcal{B}_D)$ — разрешимые множества (в естественной конструктивизации)* [2, с.94–102].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение искомого дерева будем осуществлять по шагам.

ШАГ 0. Полагаем

$$D^0 = \{0\},\ AT^0 = \emptyset\ AL^0 = \emptyset,\ AS^0 = \{0\}.$$

Прежде чем перейти к следующему шагу, введем отображения, ставящие в соответствие элементам полного дерева $\mathcal{N}$ его конечные подмножества (см. рис.1):

$A(y) \rightleftharpoons \{RL(y),\ RR(y)\}$,

$B(y) \rightleftharpoons \{L(y),\ R(y),\ LL(y),\ LR(y)\}$,

ШАГ n+1. Пусть к шагу $n+1$ уже определены множества D^n, AT^n, AL^n, AS^n. Пусть теперь

$$y = \min_{\langle \mathrm{N}, \leq \rangle} \{ y \in D^n | y \notin AT^n \text{ и } y \text{ — концевой в } D^n \}.$$

Если такого y уже нет, то можно считать алгоритм оконченным (случай 3). Если же такие y есть, то возможны два случая:

Случай 1: $\forall h \leq (h(y)+2) \quad \neg T(\langle z_0, h \rangle)$. Тогда полагаем

$AT^{n+1} \rightleftharpoons AT^n \cup A(y)$;

$AL^{n+1} \rightleftharpoons \emptyset$;

$AS^{n+1} \rightleftharpoons AS^n \cup B(y)$;

$D^{n+1} \rightleftharpoons D^n \cup AT^{n+1} \cup AS^{n+1}$.

Случай 2: $\exists h \leq (h(y)+2) \quad T(\langle z_0, h \rangle)$. В этом случае полагаем

$AT^{n+1} \rightleftharpoons AT^n$;

$AL^{n+1} \rightleftharpoons \hat{y}$;

$AS^{n+1} \rightleftharpoons AS^n$;

$D^{n+1} \rightleftharpoons D^n \cup AL^{n+1}$.

Случай 3: $\neg \exists y \in D^n (y \notin AT^n \ \&\ y \text{ — концевой в } D^n)$. Данный случай — случай "досрочного" завершения алгоритма. Полагаем $D^{n+1} \rightleftharpoons D^n$, $AT^{n+1} \rightleftharpoons AT^n$, $AL^{n+1} \rightleftharpoons AL^n$, $AS^{n+1} \rightleftharpoons AS^n$.

Алгоритм полностью описан. Полагаем, наконец,

$$D \rightleftharpoons \bigcup_{n=0}^{\infty} D^n, \quad AT \rightleftharpoons \bigcup_{n=0}^{\infty} AT^n, \quad AL \rightleftharpoons \bigcup_{n=0}^{\infty} AL^n.$$

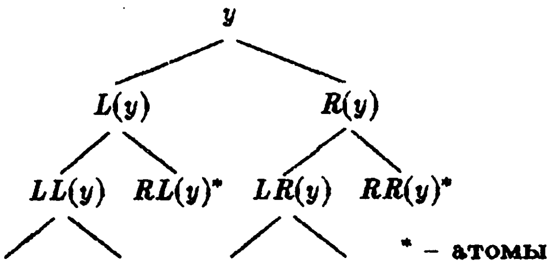

Рис. 1

Пусть $\mathcal{B}_D$ — булева алгебра, порожденная деревом $D = D_{T(\langle z_0,\cdot\rangle)}$, и φ — порождающее отображение [2,с.41], тогда

$$\varphi(AT) = At(\mathcal{B}_D),$$
$$\varphi(AL) = Al(\mathcal{B}_D).$$

Построенное дерево обладает следующими, достаточно очевидными свойствами:

1) $At(\mathcal{B}_D)$, $Al(\mathcal{B}_D)$, $F(\mathcal{B}_D)$ — рекурсивные множества в естественной конструктивизации $\mathcal{B}_D$;

2) свойства характеристики булевой алгебры $\mathcal{B}_D$:

$$\forall k \in \mathbf{N}\Big(\neg T(\langle z_0, k\rangle) \to \mathrm{ch}(\mathcal{B}_D) = (0, \infty, 0)\ \&\ \forall y(As(y) \to Al^F(y))\Big),$$

а также $\exists k \in \mathbf{N}\Big(T(\langle z_0, k\rangle) \to \mathrm{ch}(\mathcal{B}_D) = (0, t, 1)\Big)$ для некоторого $t \in \mathbf{N}$.

Доказательство леммы окончено.

Пусть $D = D_{T(\langle z_0,\cdot\rangle)}$ — искомое дерево, $\mathcal{B}_{T(\langle z_0,\cdot\rangle)} \cong \mathcal{B}_D$ — булева алгебра, порожденная им, $L_{T(\langle z_0,\cdot\rangle)}$ — ее рекурсивный линейный базис.

Пусть $\mathbf{Q} = \langle \mathbf{N}, \leq_{\mathbf{Q}}\rangle$ — произвольный фиксированный рекурсивный линейный порядок, упорядоченный по типу $1 + \eta + 1$. Порядок $\mathcal{Q}$ мы можем представить как рациональные числа от 0 до 1 включительно. Положим теперь $\mathbf{Q}_2 \rightleftharpoons \Big\langle\{n \in \mathbf{N} | 0 < \mathrm{l}(n) < 2^{\mathrm{r}(n)}$ и $\mathrm{l}(n), 2^{\mathrm{r}(n)}$ — взаимно простые$\}$, $\leq_2\Big\rangle$, где $n \leq_2 m \Leftrightarrow \mathrm{l}(n) \cdot 2^{\mathrm{r}(m)} \leq \mathrm{l}(m) \cdot 2^{\mathrm{r}(n)}$, или

$\frac{l(n)}{2^{r(n)}} \le \frac{l(m)}{2^{r(m)}}$ в обычном порядке рациональных чисел. Таким образом, Q_2 — это линейный порядок, представленный числами вида $\frac{n}{2^m}$, $n, m \in \mathbf{N}$, между 0 и 1.

Определим теперь функцию $q : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}_2$ следующим образом:

$$q(n) \rightleftharpoons \langle 2n - 2^{h(n)+1} + 3;\ 2^{h(n)+1}\rangle,$$

где $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ — рекурсивная функция, обозначающая высоту элемента в полном бинарном дереве. Тогда положим

$$\mathbf{Q}_3 \rightleftharpoons \langle \mathbf{N}, \le_3\rangle, \quad \text{где } n \le_3 m \Leftrightarrow q(n) \le_2 q(m).$$

Неформально это можно интерпретировать следующим образом (см. рис.2): каждому элементу $n > 0$ полного бинарного дерева и, таким образом, каждому натуральному числу $n > 0$ ставим в соответствие уникальное рациональное число (притом такое, что числитель и знаменатель его взаимно просты) $\frac{2n - 2^{h(n)+1} + 3}{2^{h(n)+1}}$ так, чтобы одному уровню в дереве соответствовали числа одного знаменателя, в соответствии с порядком дихотомии единичного интервала рациональных чисел. А последовательный рост (в порядке $\mathbf{N}$) элементов дерева одного уровня (одной высоты) — соответствует последовательному росту нечетного значения числителя соотнесенных рациональных чисел.

Очевидны следующие свойства:

ЛЕММА 2.

1) $\mathbf{Q}_3 \cong \eta$ — *рекурсивный линейный порядок (можно также рассматривать* $\mathbf{Q}_3$ *как конструктивный линейный порядок* $\langle \eta, q\rangle$);

2) $\forall n \forall m((m \preceq L(n) \to m <_3 n)\ \&\ (m \preceq R(n) \to n <_3 m))$;

3) $\forall n(qR(n) = \langle l(qL(n)) + 2,\ r(qL(n))\rangle)$.

ЛЕММА 3. *Пусть* $T(q)$ — *произвольное отношение, тогда если* $\exists^\infty q T(h(q))$, *то для любых* q_1, q_2, $q_1 <_3 q_2$ *найдется* q_3 *такой, что* $q_1 <_3 q_3 <_3 q_2$ *и* $T(h(q_3))$.

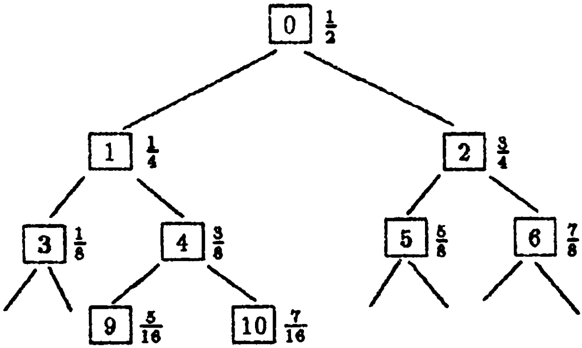

Рис. 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть $h(q_1) \geq h(q_2)$, тогда

$$\exists p(q_1 \preceq L(p) \ \& \ (p = q_2 \vee q_2 \preceq R(p))). \qquad (*)$$

Из того, что $\exists^\infty q T(h(q))$, имеем

$$\exists q' \prec q_1(T(h(q')) \ \& \ q' \preceq R(q_1)),$$

следовательно (см. лемма 2, п.2), $q' >_3 q_1$. Из этой же леммы и свойства (*) будем иметь $q' <_3 p$ и, следовательно, $q' <_3 q_2$. Искомое число $q_3 \rightleftharpoons q'$.

Если же $h(q_1) \leq h(q_2)$, то

$$\exists p(q_2 \preceq R(p) \ \& \ (p = q_1 \vee q_1 \preceq L(p)))$$

и $\exists q' < q_2(T(h(q')) \ \& \ q' \preceq L(q_2))$, далее — аналогично. Доказательство леммы 3 окончено.

Пусть $\mathbf{S} = \langle \mathbf{N}, \leq_{\mathbf{S}} \rangle$, $\mathbf{R} = \langle \mathbf{N}, \leq_{\mathbf{R}} \rangle$ $\mathbf{AB} = \langle \mathbf{N}, \leq_{\mathbf{AB}} \rangle$, — рекурсивные линейные порядки, упорядоченные по типу

$1 + (1 + \eta + 1 + (2 + \eta) \times \eta + 1;$

$1 + (2 + \eta + 1) \times \eta + 1;$

$2 + \eta + 1$

соответственно с разрешимыми множествами атомов,безатомных элементов и элементов идеала Фреше, т.е. в этих рекурсивных порядках для интервала $[a, b) = \{x \in \in \mathbf{L} \mid a \leq_{\mathbf{L}} x <_{\mathbf{L}} b\}$, где $\mathbf{L} \in \{\mathbf{AB}, \mathbf{R}, \mathbf{S}\}$, рекурсивно распознается, является ли b *непосредственным последователем* для a или нет; рекурсивно распознается, состоит ли произвольный интервал $[a_1, b_1)$ из конечного числа интервалов только предыдущего вида или нет; существуют ли под какой-либо частью произвольного интервала порядки предыдущего вида или нет (т.е. изоморфен ли произвольный интервал порядку $1 + \eta$ или нет), — тогда и булева алгебра, порожденная соответствующим линейным порядком, имеет естественную конструктивизацию, в которой множество атомов, безатомных элементов или элементов идеала Фреше разрешимо [2, с. 94–95].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\{\mathbf{L}(x) = \langle L(x), \leq_{\mathbf{L}} \rangle\}_{x \in X}$ — некоторое множество линейных порядков и $\mathbf{X} = \langle X, \leq_{\mathbf{X}} \rangle$ — также линейный порядок. Тогда *суммой линейных порядков по линейному порядку* $\mathbf{X}$ мы будем называть

$$\sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{L}(x) \rightleftharpoons \langle \{(x, y) \mid x \in X, y \in L(x)\}, \leq \rangle,$$

где $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow (x <_{\mathbf{X}} x') \vee (x = x' \ \& \ y \leq_{\mathbf{L}(x)} y')$.

ПРИМЕР:

$$\mathbf{L}(x) \rightleftharpoons \mathbf{L} \Rightarrow \sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{L}(x) = \mathbf{L} \times \mathbf{X}.$$

В этой терминологии простая сумма двух линейных порядков $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$, или их *присоединение*, будет представима как

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \sum_{x \in \mathbf{2}} \mathbf{L}_x,$$

где $\mathbf{2}$ — тривиальный линейный порядок, состоящий из двух элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если $L_1, L_2 \subseteq \mathbf{N}$, $\mathbf{L}_1 = \langle L_1, \leq_1 \rangle$ и $\mathbf{L}_2 = \langle L_2, \leq_2 \rangle$ — рекурсивные линейные порядки, то *рекурсивной суммой рекурсивных линейных порядков* назовем

$$\mathbf{L}_1 \overset{rec}{+} \mathbf{L}_2 \rightleftharpoons \Big\langle \{(n_1 + 1, 0), (0, n_2 + 1) \mid n_1 \in L_1, n_2 \in L_2\}, \leq \Big\rangle,$$

где $n \leq m \Leftrightarrow$

1) если $n = \langle n_1 + 1, 0\rangle$ и $m = \langle 0, m_2 + 1\rangle$ для некоторых $n_1 \in L_1$ и $m_2 \in L_2$, или

2) если $n = \langle n_1 + 1, 0\rangle$ и $m = \langle m_1 + 1, 0\rangle$ для некоторых $n_1 \in L_1$ и $m_2 \in L_1$ и $n_1 \leq_1 m_1$, или

3) если $n = \langle 0, n_2 + 1\rangle$ и $m = \langle 0, m_2 + 1\rangle$ для некоторых $n_1 \in L_2$ и $m_2 \in L_2$ и $n_2 \leq_2 m_2$.

СВОЙСТВО. Для данных $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ верно $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \cong$ $\cong \mathbf{L}_1 \overset{rec}{+} \mathbf{L}_2$.

Аналогично для рекурсивного порядка $\mathbf{X} = \langle X, \leq_{\mathbf{X}}\rangle$ и рекурсивных порядков $\{\mathbf{L}(x) = \langle L(x), \leq_{\mathbf{L}}\rangle\}_{x \in X}$ таких, что $y \in L(x)$ рекурсивно, полагаем:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для данных рекурсивных линейных порядков назовем *рекурсивной суммой линейных порядков* $\mathbf{L}(x)$ *по рекурсивному линейному порядку* $\mathbf{X}$:

$$\sum_{x \in \mathbf{X}}^{rec} \mathbf{L}(x) \rightleftharpoons \Big\langle \{\langle x, y\rangle |\ x \in X \ \&\ y \in L(x)\}, \leq \Big\rangle,$$

где

$$\langle x, y\rangle \leq \langle x', y'\rangle \Leftrightarrow (x <_{\mathbf{X}} x') \vee (x = x' \ \&\ y \leq_{\mathbf{L}(x)} y'),$$

таким образом, для данных $\mathbf{X}$ и $\mathbf{L}(x)$ имеем

$$\sum_{x \in \mathbf{X}}^{rec} \mathbf{L}(x) \cong \sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{L}(x)$$

(естественно, введенные рекурсивные суммы рекурсивных порядков сами также будут рекурсивны. В дальнейшем, там где из контекста ясно, что разговор идет о рекурсивных суммах или это несущественно, будем иногда опускать обозначение рекурсивности).

Определим теперь линейный порядок $\mathbf{L}$, который будет основой наших дальнейших построений. Пусть $h(n)$ — функция на полном двоичном дереве, ставящая в соответствие элементу n его высоту, а $f(m)$ — рекурсивная функция большого размаха [2, с. 116], т.е. $\forall n \exists^{\infty} m\ f(m) = n$:

$$\mathbf{L} \rightleftharpoons \sum_{m \in \mathbf{N}}^{rec} \sum_{i \in \mathbf{N}}^{rec} \sum_{k \in \mathbf{N}}^{rec} (K^{?}_{2m}(m, i, f(k)) \overset{rec}{+} \mathbf{N});$$

$$K^?_{2m}(m,i,f(k)) \rightleftharpoons \sum_{z_1\in\mathbf{N}}^{rec} K^?_{2m-1}(m,i,f(k),z_1);$$

$$K^?_{2m-1}(m,i,f(k),z_1) \rightleftharpoons \sum_{z_2\in\mathbf{N}}^{rec} K^?_{2m-2}(m,i,f(k),z_1,z_2);$$

$$\vdots$$

$$K^?_1(m,i,f(k),z_1,\ldots,z_{2m-1}) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \sum_{z_{2m}\in\mathbf{N}}^{rec} (G^?(m,i,f(k),z_1,\ldots,z_{2m}) \overset{rec}{+} \mathbf{S});$$

$$G^?(m,i,f(k),z_1,\ldots,z_{2m}) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons 1 \overset{rec}{+} \sum_{z_{2m+1}\in\mathbf{Q}_3}^{rec} (P^?(m,i,f(k),z_1,\ldots$$

$$\ldots,z_{2m},h(z_{2m+1})) \overset{rec}{+} \mathbf{R}) \overset{rec}{+} 1;$$

$$P^?(m,i,f(k),z_1,\ldots,z_{2m},h(z_{2m+1})) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons 1 \overset{rec}{+} \sum_{z_{2m+2}\in\mathbf{Q}_3}^{rec} (As^?(m,i,f(k),z_1,\ldots$$

$$\ldots,z_{2m},h(z_{2m+1}),h(z_{2m+2})) \overset{rec}{+} \mathbf{AB}) \overset{rec}{+} 1;$$

$$As^?(m,i,f(k),z_1,\ldots,z_{2m},h(z_{2m+1}),h(z_{2m+2})) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons 1 \overset{rec}{+} L_{r(\langle i,f(k),z_1,\ldots,z_{2m},h(z_{2m+1}),h(z_{2m+2}),\cdot\rangle)=1} \overset{rec}{+} 1,$$

где

r — функция из предложения 7,

$L_{r(\langle i,f(k),z_1,\ldots,z_{2m},h(z_{2m+1}),h(z_{2m+2}),\cdot\rangle)=1}$ — линейный порядок из конструкции леммы 1.

Неформально, общий вид порядка $\mathbf{L}$ можно представить на рис. 3.

Обозначим для t от 2 до $2m+3$:

$$A_t(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-t}) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \exists^\infty\, z_{2m+3-t+1} \ldots \exists^\infty\, z_{2m+2} \forall\, z_{2m+3}$$

$$r(\langle i,k,z_1,\ldots,z_{2m+1},z_{2m+2},z_{2m+3-t}\rangle) = 1.$$

Свойства булевой алгебры $\mathcal{B}_{\mathbf{L}}$ описываются следующей леммой.

ЛЕММА 4. *Для произвольных* $m,i,k \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, *верны следующие утверждения:*

$1'$. $\forall\, z_1 \ldots \forall\, z_{2m+3-1}$ $(\forall\, z_{2m+3} r(\langle i,k,z_1,\ldots$

$$\ldots,h(z_{2m+1}),h(z_{2m+2}),z_{2m+3}\rangle) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{As^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-1})} \models As(1));$$

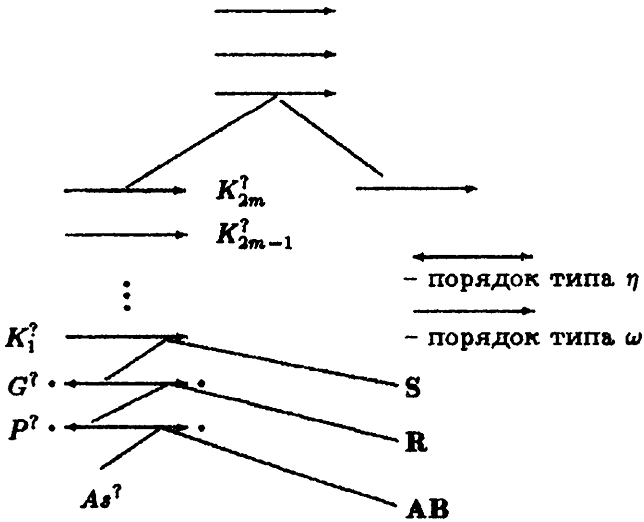

Рис. 3

$$1''.\quad \forall\, z_1 \ldots \forall\, z_{2m+3-1}\ (\exists\, z_{2m+3} r(\langle i,k,z_1,\ldots \\ \ldots, h(z_{2m+1}), h(z_{2m+2}), z_{2m+3}\rangle) \neq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{B}_{As^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-1})} \models \\ \models \exists\, a \exists\, b(1 = a \vee b \& Al(b) \& F(a)));$$

$$2'.\quad \forall\, z_1 \ldots \forall\, z_{2m+3-2}\ (A_2(m,i,k,z_1,\ldots \\ \ldots, z_{2m+3-2}) \mathcal{B}_{P^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-2})} \models P(1));$$

$$2''.\quad \forall\, z_1 \ldots \forall\, z_{2m+3-2}\ (\neg A_2(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{B}_{P^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-2})} \models \\ \models \exists\, a \exists\, b(1 = a \vee b \& Al^F(b) \& P(a)));$$

$$3'.\quad \forall z_1 \ldots \forall z_{2m+3-3}\ (A_3(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-3}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{B}_{S^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-3})} \models \neg G(1));$$

$$3''.\quad \forall z_1 \ldots \forall z_{2m+3-3}\ (\neg A_3(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-3}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{B}_{S^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-3})} \models J(1));$$

$$4'.\quad \forall z_1 \ldots \forall z_{2m+3-4}\ (A_4(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-4}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{B}_{K^?_1(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-4})} \models At^{K_1}(1))$$

(следовательно, на этой же булевой алгебре $\models K_2(1) \& \neg K_1(1)$*);*

4''. $\forall z_1 \ldots \forall z_{2m+3-4}\ (\neg A_4(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-4}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{B}_{K_1^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-4})} \models K_1(1)\&\neg K_0(1))$;

5'. $\forall z_1 \ldots \forall z_{2m+3-t}\ (A_t(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-t}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{B}_{K_{t-3}^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-t})} \models At^{K_{t-3}}(1))$

(следовательно, на этой же булевой алгебре $\models K_{t-2}(1)\&$ $\& \neg K_{t-3}(1))$*;*

5''. $\forall z_1 \ldots \forall z_{2m+3-t}\ (\neg A_t(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-t}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{B}_{K_{t-3}^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-t})} \models K_{t-3}(1)\&\neg K_{t-4}(1))$,

где $4 < t \leq 2m+3$;

6. $\mathrm{ch}(\mathcal{B}_{\mathbb{L}}) = (1,0,1)$;

7. $At(\mathcal{B}_{\mathbb{L}})$, $Al(\mathcal{B})$, $F(\mathcal{B})$ — *рекурсивные множества.*

Очевидно, что для любого замкнутого интервала $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{L}$ равносильно $\mathcal{B}_{[\alpha,\beta]} \models F(1) \Leftrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{L}} \models F([\alpha,\beta])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1' и 1'' следуют из свойств 2 и 3 леммы 1. Пункты 2'–5'' устанавливаются рассмотрением определения соответствующих порядков и каждого предшествующего пункта, причем для 2'–3'' необходимо учитывать свойство функции h, обеспечивающее плотное распределение по порядку $\mathbb{Q}_3$ подвешиваемых порядков нижнего уровня при бесконечном их числе (см. лемму 3).

Докажем свойства 2' и 2''. Видим, что если для данных $m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+1}$ выполнено $A_2(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+1})$, т.е. имеем для данного набора

$$\exists^\infty z_{2m+2} \in \mathbb{Q}_3 \quad \forall z_{2m+3} r((i,k,z_1,\ldots,z_{2m+1})) = 1$$

или $\exists^\infty z_{2m+2} \in \mathbb{Q}_3\ T(z_{2m+2})$ для соответствующего T, то из 1' имеем

$$\exists^\infty z_{2m+2}(\mathcal{B}_{As^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+2})} \models As(1)).$$

А из леммы 3 следует, что эти порядки подвешены под $\mathbb{Q}_3$ плотным образом, и тогда

$$\mathcal{B}_{P^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+1})} \models P(1).$$

В противном случае порядок $P^7(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+1})$ распадается на сумму, одна часть которой типа $1+2\times\eta+1$, а другая — типа $\mathbf{R}$, таким образом,

$$\mathcal{B}_{P^7(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3-2})} \models \exists a\exists b(1=a\vee b\&P(a)\&Al^F(b)).$$

Свойство 6 вытекает также, во-первых, из свойств функции h — у нас не будет образовываться элементов типа (1,1,0) на 2-м (снизу) этаже. Это следует из свойств $2'$ и $2''$ этой леммы. Во-вторых, мы покажем, что никакие рассматриваемые операции с порядками типа $(1,0,1)$ не приведут к образованию порядков типа $(1,1,0)$. В самом деле, пусть некоторый линейный порядок λ задает булеву алгебру $\mathcal{B}_\lambda$ такую, что $\mathrm{ch}(\mathcal{B}_\lambda)=(1,0,1)$. Тогда порядки $\lambda_1=1+\lambda\times\eta+1$, $\lambda_2=\lambda\times\omega+1$ задают такие булевы алгебры $\mathcal{B}_{\lambda_1}$ и $\mathcal{B}_{\lambda_2}$, что $\mathrm{ch}(\mathcal{B}_{\lambda_1})=(1,0,1)$, $\mathrm{ch}(\mathcal{B}_{\lambda_2})=(1,0,1)$. И это очевидно из прямого рассмотрения порядков, соответствующих $\mathcal{B}_{\lambda_1}/I(\mathcal{B}_{\lambda_1})$ и $\mathcal{B}_{\lambda_2}/I(\mathcal{B}_{\lambda_2})$. Других комбинаций этих порядков нет.

Свойство 7 следует из того, что, во-первых, порядки $\mathbf{S}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{AB}$ обладают разрешимостью для свойства "быть непосредственным последователем", "состоять из конечного числа подпорядков, являющихся непосредственными последователями", "не иметь под любым подинтервалом интервала, находящегося в отношении непосредственного следования", по определению. Во-вторых, в порядке As^7 эти свойства также разрешимы, что следует из конструкции леммы 1.

ЛЕММА 5. Имеем

$$\forall m\geq 1\ \Big(\mathcal{B}_L\models\Omega_{2m}\Leftrightarrow\exists i\forall k\neg\exists^\infty z_1\ldots$$

$$\ldots\exists^\infty z_{2m+2}\forall z_{2m+3}\ (r(\langle i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3}\rangle)=1)\Big).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{B}_L\models\Omega_{2m}$. Допустим противное:

$$\forall i\exists k_0\exists^\infty z_1\ldots\exists^\infty z_{2m+2}\forall z_{2m+3}\ (r(\langle i,k,z_1,\ldots,z_{2m+3}\rangle)=1).$$

Тогда из свойства 5′ леммы 4

$$\forall i \exists k_0 \left(\mathcal{B}_{K^?_{2m}(m,i,k_0)} \models K_{2m+1}(1) \mathbin{\&} \neg K_{2m}(1) \right), \tag{1}$$

а так как из того, что $f(k) = f(k_0)$, следует, что $K^?_{2m}(m,i,f(k)) \cong K^?_{2m}(m,i,f(k_0))$, для произвольного k, и f — функция "большого размаха", то, таким образом,

$$\forall i \exists^\infty k \left(\mathcal{B}_{K^?_{2m}(m,i,k)} \models K_{2m+1}(1) \mathbin{\&} \neg K_{2m}(1) \right). \tag{2}$$

Теперь, так как $\mathcal{B}_L \models \Omega_{2m}$, то существует элемент $b = [\gamma_1, \gamma_2) \cup \ldots \cup [\gamma_n, \gamma_{n+1})$ такой, что $\mathcal{B}_L \models \Psi_{2m}(b) \mathbin{\&} \Phi_{2m}(b)$.

По определению, b не содержит элементов из $K_{2m+1}(\mathcal{B}_L)$, но содержит бесконечное число попарно непересекающихся элементов из $K_{2m} \setminus K_{2m-1}$. Очевидно, что для одного из интервалов $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ это тоже верно. Тогда он содержит бесконечно много интервалов $[\alpha, \beta) \subset \subset [\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ таких, что они попарно не пересекаются и $\mathcal{B}_{[\alpha,\beta)} \models K_{2m}(1) \mathbin{\&} \neg K_{2m-1}(1)$. А это возможно, только если $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ содержит интервал вида

$$\sum_{k \in \omega, k \geq k_0} (K^?_{2m}(m, i_0, k) + \omega), \qquad \text{для некоторых } i_0, k_0$$

(это следует из свойств $5', 5''$ леммы 4).

Но так как верно (2), то каждый интервал указанного вида будет содержать интервал $[\delta, \epsilon)$ такой, что $\mathcal{B}_{[\delta,\epsilon)} \models K_{2m+1}(1) \mathbin{\&} \neg K_{2m}(1)$. Поэтому всегда найдется элемент в $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$, а следовательно, и в b, лежащий в $K_{2m+1}(\mathcal{B}_L) \setminus K_{2m}(\mathcal{B}_L)$, получили противоречие.

($\Leftarrow$) Если верно

$$\exists i \forall k \neg \exists^\infty z_1 \ldots \exists^\infty z_{2m+2} \forall z_{2m+3} \left(r(\langle i, k, z_1, \ldots, z_{2m+3} \rangle) = 1 \right),$$

то по свойству $5''$ леммы 4 и по построению будет выполняться

$$\exists i_0 \forall k \left(\mathcal{B}_{K^?_{2m}(m,i_0,k)} \models K_{2m}(1) \mathbin{\&} \neg K_{2m-1}(1) \right). \tag{3}$$

Положим

$$b \rightleftharpoons \sum_{k\in\omega}(K^?_{2m}(m, i_0, k) + \omega),$$

тогда для всех интервалов $[\alpha, \beta) \subset b$, для которых $\mathcal{B}_L \models W([\alpha,\beta))$ верно и $\mathcal{B}_L \not\models K_{2m+1}([\alpha,\beta))$ & $\neg K_{2m}([\alpha,\beta))$.

Таким образом, b не содержит под собой элементы из $K_{2m+1} \setminus K_{2m}$. Но и $b \notin K_{2m}$, так как $(\exists x < b)\quad At^F(x)$. Следовательно, $\mathcal{B}_L \models \Phi_{2m}(b)$. Также верно и $\mathcal{B}_L \models \Psi_{2m}(b)$, так как если

$$\exists i_0 \forall k \left(\mathcal{B}_L \models K_{2m}(c(m, i_0, k)) \,\&\, \neg K_{2m-1}(c(m, i_0, k))\right),$$

где $\quad c(m, i_0, k) \rightleftharpoons K^?_{2m}(m, i_0, k)$, то

$$\exists i_0 \exists^\infty k \left(\mathcal{B}_L \models K_{2m}(c(m, i_0, k)) \,\&\, \neg K_{2m-1}(c(m, i_0, k))\right),$$

т.е. $\exists^\infty x \in \mathcal{B}_L$ $(\mathcal{B}_L \models K_{2m}(x)$ & $\neg K_{2m-1}(x))$, и так как $\forall m, i, k_1, k_2$ $(k_1 \neq k_2 \Rightarrow K^?_{2m}(m, i, k_1) \cap K^?_{2m}(m, i, k_2) = \emptyset)$, то, таким образом, выполняется $\mathcal{B}_L \models \Phi_{2m}(b)$ и, следовательно, $\mathcal{B}_L \models \Omega_{2m}$, что доказывает нашу лемму и завершает доказательство теоремы.

Литература

1. ВЛАСОВ В.В., ГОНЧАРОВ С.С. О сильной конструктивизируемости булевых алгебр элементарной характеристики (1,1,0) //Алгебра и логика. — 1993. — Т. 32, № 6. — С. 618–630.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры. — Новосибирск: Наука, 1988.

3. ХИСАМИЕВ Н.Г. О сильно конструктивных моделях разрешимой теории //Изв. АН КазССР Сер. физ.-мат. — 1974. — № 1. — С. 83–84.

4. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.

5. ОДИНЦОВ С.П. Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр нижнего слоя. — Новосибирск,

1986. (Препринт/АН СССР. Сиб.отд-ние. Ин-т математики; № 21.)

6. REMMEL J.B. Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras /J.Symbolic Logic. — 1981. — Vol. 46, № 3. — P. 572-594.

7. FEINER L. Hierarchies of Boolean algebras //J.Symbolic Logic. — 1970. — Vol. 35, № 3. — P. 365-373.

Поступила в редакцию
20 января 1998 года