

АНАЛИЗ ДАННЫХ И СИГНАЛОВ

(Вычислительные системы)

1998 год

Выпуск 163

УДК 519.2+621.391

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ОБРАЗОВАННОЙ ИЗ ЗАДАННОГО ЧИСЛА ОДИНАКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ¹

А.В.Кельманов, С.А.Хамидуллин

В в е д е н и е

В работе [1] описан апостериорный алгоритм распознавания (групповой классификации) квазипериодической последовательности одинаковых импульсов, искаженной аддитивной гауссовской некоррелированной помехой с известной дисперсией. Под квазипериодической импульсной последовательностью понимается такая последовательность импульсов, в которой величина интервала между моментами времени начала двух последовательных импульсов лежит в заданном промежутке. В цитируемой работе рассмотрен случай принятия решения по наблюдаемому участку (отрезку) зашумленной последовательности, который включает неизвестное число импульсов заданной длины и формы с детерминированными, но неизвестными моментами времени их начала, в предположении, что момент времени начала первого импульса и/или момент времени окончания последнего импульса ненаблюдаемой (скрытой) квазипериодической последовательности могут располагаться соответственно левее начала и правее окончания границ наблюдаемого участка, т.е. в предположении,

¹Работа выполнена в рамках проекта № 97-01-00866, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований.

что первый и/или последний импульсы могут рассекаются границами наблюдаемого отрезка.

Целью данной работы является обоснование вычислительного алгоритма распознавания зашумленной квазипериодической импульсной последовательности при условии, что эта последовательность образована из заданного числа одинаковых импульсов с неизвестными моментами времени их начала, причем первый и последний импульсы не пересекаются границами наблюдаемого участка.

1. Постановка задачи

Пусть на числовой прямой заданы $K \geq 2$ различных последовательностей $u_n(k) \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} — числовая прямая), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $k = \overline{1, K}$, таких, что для всех $k \in \{1, 2, \dots, K\}$:

$$u_n(k) = 0, \quad \text{при } n < 0, n > q - 1; \quad (1)$$

$$0 < \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) < \infty. \quad (2)$$

Вектор $U(k) = (u_0(k), \dots, u_{q-1}(k))$, а также последовательность его компонент будем называть эталонным импульсом k -го класса, k — номером класса, а q — длительностью импульса.

Определим вектор $\eta = (n_1, \dots, n_M)$ с целочисленными компонентами как элемент множества

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega(N, T_{\min}, T_{\max}, q) = \{(n_1, \dots, n_M) : \\ &0 \leq n_1 \leq T_{\max} - q; \\ &0 \leq N - T_{\max} \leq n_M \leq N - q; \\ &q \leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max}, \quad m = \overline{2, M}\}, \end{aligned} \quad (3)$$

зависящего от натуральных чисел N , T_{\max} , T_{\min} и q .

Предположим, что случайный вектор $Y = (y_0, \dots, y_{N-1})$ есть сумма двух независимых векторов:

$$Y = X(k, \eta) + E, \quad k \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad \eta \in \Omega, \quad (4)$$

где $E = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1})$ — гауссовский вектор, компоненты которого независимы, одинаково распределены и имеют нулевое математическое ожидание и известную дисперсию $\sigma^2 < \infty$, а компоненты вектора $X(k, \eta) = (x_0(k, \eta), \dots, x_{N-1}(k, \eta))$ при каждом $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ и $\eta \in \Omega$, образуют последовательность, составленную из M подпоследовательностей (импульсов) $U(k)$, такую, что

$$x_n(k, \eta) = x_n(k, n_1, \dots, n_M) = \sum_{m=1}^M u_{n - n_m}(k), \quad (5)$$

$$n = \overline{0, N-1}.$$

Величины n_1, \dots, n_M будем интерпретировать как моменты времени начала M импульсов в последовательности, которую образуют компоненты вектора X .

Элементы $\eta = (n_1, \dots, n_M)$ множества Ω — всевозможные наборы моментов времени начала импульсов — определяются совокупностью ограничений, заключенных в фигурные скобки формулы (3). Рассмотрим эти ограничения отдельно, чтобы пояснить смысл каждого:

$$T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max}, \quad m = \overline{2, M}, \quad (6)$$

$$0 \leq n_1 \leq T_{\max} - q, \quad (7)$$

$$N - T_{\max} \leq n_M \leq N - q, \quad (8)$$

$$N \geq T_{\max}, \quad (9)$$

$$T_{\min} \geq q. \quad (10)$$

Формула (6) — это условие квазипериодичности моментов времени n_1, \dots, n_M начала импульсов. В этой формуле натуральные числа T_{\min} и T_{\max} задают минимальный и максимальный интервалы между двумя последовательными импульсами. Неравенства (7)–(8) ограничивают моменты времени начала первого и последнего импульсов. Из этих неравенств следует, что первый и последний импульсы не пересекаются соответственно левой ($n = 0$) и правой ($n = N - 1$) границами последовательности. Условие (9) задает минимальную размерность вектора или минимальную длину квазипериодической последовательности $x_n, n = \overline{0, N-1}$.

Наконец, условие (10) является ограничением на минимальный интервал между соседними импульсами.

Из определения (3) следует, что при фиксированных T_{\max} , T_{\min} , q и N , число M импульсов, образующих последовательность компонент вектора X , ограничено сверху и снизу, т.е. $M_{\min} \leq M \leq M_{\max}$. Причем величина M_{\min} , очевидно, есть функция от T_{\max} , N и q , а M_{\max} — от T_{\min} , N и q . Предположим, что границы M_{\min} и M_{\max} известны (взаимосвязь этих границ с перечисленными параметрами установим ниже).

Задача распознавания состоит в том, чтобы по наблюдаемому вектору Y определить номер k того эталонного импульса или вектора $U(k)$, компоненты которого в виде заданного числа $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ подпоследовательностей образуют последовательность (5) компонент ненаблюдаемого вектора $X(k, \eta)$. Параметры задачи N, T_{\max}, T_{\min}, q и σ^2 считаются известными, а набор $\{U(k), k = \overline{1, K}\}$ — заданным. Вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$, компоненты которого составляют квазипериодическую последовательность моментов времени начала импульсов, предполагается неизвестным.

2. Задача распознавания последовательности как задача проверки гипотез о среднем

Условимся обозначать через $\}z[$ целую часть от z . Определим границы интервала допустимых значений размерности N вектора X при заданных M, T_{\max}, T_{\min} и q , а также верхнюю и нижнюю границы числа M импульсов в последовательности при заданных N, T_{\max}, T_{\min} и q .

ЛЕММА 1. Если условия (6)–(10) выполнены, то размерность N вектора X удовлетворяет неравенствам:

$$(M - 1)T_{\min} + q \leq N \leq (M + 1)T_{\max} - q, \quad (11)$$

а число M импульсов в последовательности лежит в интервале: $M_{\min} \leq M \leq M_{\max}$, где

$$M_{\min} = \}(N + q - 1)/T_{\max}[, \quad M_{\max} = \}(N - q)/T_{\min}[+ 1. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сложив почленно все двойные неравенства (8), найдем:

$$(M-1)T_{\min} \leq n_M - n_1 \leq (M-1)T_{\max}, \quad M \geq 2. \quad (13)$$

Комбинируя левую часть двойного неравенства (13) с неравенствами (7)-(10), получим:

$$N - q \geq (M-1)T_{\min}, \quad M \geq 1. \quad (14)$$

Совмещая правую часть двойного неравенства (13) с (7)-(10), найдем:

$$N - 2T_{\max} + q \leq (M-1)T_{\max}, \quad M \geq 1. \quad (15)$$

Объединяя (14) и (15) получим формулу (11).

Далее, из (14) следует, что $MT_{\min} \leq N - q + T_{\min}$. Отсюда получаем верхнюю границу M_{\max} для M .

Из неравенства (15) имеем:

$$MT_{\max} \geq N + q - T_{\max}. \quad (16)$$

Правую часть неравенства (16) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} N + q - T_{\max} &= N + q - T_{\max} - 1 + 1 = \\ &= \left\lfloor \frac{N + q - 1}{T_{\max}} \right\rfloor \left[T_{\max} + (N + q - 1) \bmod T_{\max} + 1 - T_{\max} \right]. \end{aligned}$$

В полученном выражении сумма трех последних членов удовлетворяет двойному неравенству

$$-T_{\max} < (N + q - 1) \bmod T_{\max} + 1 - T_{\max} \leq 0.$$

Поэтому, разделив обе части неравенства (16) на T_{\max} , получим нижнюю границу M_{\min} для M . ■

Обозначим через

$$\Omega(\bullet/M) = \Omega(N, T_{\min}, T_{\max}, q/M), \quad M \in [M_{\min}; M_{\max}], \quad (17)$$

множество всевозможных наборов (n_1, \dots, n_M) моментов времени начала импульсов в последовательности, образованной компонентами вектора X , при условии, что эта последовательность

составлена из фиксированного числа M импульсов. Тогда в соответствии с формулой (3) и леммой 1

$$\Omega = \bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}} \Omega(\bullet/M). \quad (18)$$

Определим множество всевозможных векторов $X(k, \eta)$ размерности N , порождаемых эталонным импульсом k -го класса:

$$\Theta(k) = \left\{ X(k, \eta) : x_n(k, \eta) = \sum_{m=1}^M u_n - n_m(k), n = \overline{0, N-1}, \right. \\ \left. \eta = (n_1, \dots, n_M), \eta \in \Omega \right\}, k \in \{1, \dots, K\}, \quad (19)$$

и через

$$\Theta(k/M) = \left\{ X(k, \eta) : x_n(k, \eta) = \sum_{m=1}^M u_n - n_m(k), n = \overline{0, N-1}, \right. \\ \left. \eta = (n_1, \dots, n_M), \eta \in \Omega(\bullet/M) \right\}, \quad (20)$$

$$k \in \{1, \dots, K\}, M \in [M_{\min}, M_{\max}],$$

обозначим множество всевозможных векторов $X(k, \eta)$ размерности N , порождаемых эталонным импульсом k -го класса, при условии, что последовательности компонент этих векторов составлены из фиксированного числа M импульсов. Тогда в соответствии с формулами (3), (18)–(20) и леммой 1

$$\Theta(k) = \bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}} \Theta(k/M).$$

Введенные обозначения позволяют интерпретировать поставленную задачу распознавания последовательности, содержащей фиксированное число M импульсов из интервала $[M_{\min}, M_{\max}]$ как задачу проверки гипотез

$$H(k/M) = \left\{ Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X \in \Theta(k/M) \right\}, k \in \{1, \dots, K\}, \quad (21)$$

о среднем X гауссовского случайного вектора Y с известной диагональной ковариационной матрицей, а алгоритм распознавания — как измеримое отображение (решающее правило) $\delta: \mathfrak{R}^N \rightarrow \{H(1/M), \dots, H(K/M)\}$ пространства \mathfrak{R}^N значений случайного вектора Y на совокупность проверяемых гипотез (21). В формуле (21) через $\Phi_{X, \sigma^2 I}$ обозначено нормальное распределение с параметрами $(X, \sigma^2 I)$. При этом вероятность ошибки классификации $\alpha_M = \sum_{k=1}^K p_k \alpha(k/M)$, где p_k — априорные вероятности предъявления выборок k -го класса или априорные вероятности гипотез, а $\alpha(k/M) = \Pr\{\delta(Y) \neq H(k/M) | H(k/M)\}$ — вероятность ошибки распознавания последовательности импульсов k -го класса, $k = \overline{1, K}$.

Приведенная интерпретация проясняет смысл решаемой задачи, однако оказывается непригодной для организации вычислительного алгоритма, так как проверяемые гипотезы (21) задаются через множество $\Theta(k/M)$, в определение (20) которого входит неизвестный набор (n_1, \dots, n_M) из множества $\Omega(\bullet/M)$.

Для построения вычислительного алгоритма заметим, что при каждом $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ множество $\Omega(\bullet/M)$ содержит конечное число элементов $\eta = (n_1, \dots, n_M)$, так как N , T_{\max} и T_{\min} фиксированные и ограниченные величины. Кроме того, из определения (20) следует, что каждой паре (k, η) , $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, соответствует единственный вектор $X(k, \eta) \in \Theta(k/M)$. Поэтому

$$\Theta(k/M) = \bigcup_{\eta \in \Omega(\bullet/M)} X(k, \eta)$$

и гипотезы (21) можно представить в виде:

$$H(k/M) = \left\{ Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X \in \bigcup_{\eta \in \Omega(\bullet/M)} X(k, \eta) \right\}, \quad k \in \{1, \dots, K\},$$

так что

$$H(k/M) = \bigcup_{\eta \in \Omega(\bullet/M)} H(k, \eta), \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad (22)$$

где

$$H(k, \eta) = \left\{ Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X = X(k, \eta) \right\}, \quad (23)$$
$$k \in \{1, \dots, K\}, \eta \in \Omega(\bullet/M).$$

Отсюда видно, что исходную задачу распознавания можно решать как задачу проверки простых гипотез о среднем гауссовского случайного вектора. При этом принятие некоторой гипотезы $H(k, \eta)$ о наблюдаемом векторе Y означает статистически обоснованный совместный выбор в пользу номера k распознаваемого класса и набора η моментов времени начала импульсов. Содержательный смысл указанной задачи проверки гипотез состоит в совместном распознавании импульса и обнаружении моментов времени начала этого импульса в зашумленной квазипериодической последовательности.

Как известно, в вычислительном плане байесовский алгоритм распознавания отличается от алгоритма распознавания по критерию максимального правдоподобия только тем, что для принятия байесовского решения необходимо условные по классу максимумы функции правдоподобия умножить на (в общем случае) различные весовые коэффициенты, соответствующие априорным вероятностям классов. При равных априорных вероятностях классов упомянутые алгоритмы совпадают. Поскольку введение весовых коэффициентов при вычислениях не представляет особых проблем, при изложении алгоритма совместного распознавания и обнаружения ограничимся обоснованием вычислительной процедуры, соответствующей критерию максимального правдоподобия.

3. Функция правдоподобия и целевая функция

Из условий задачи следует, что плотность распределения случайного вектора Y имеет следующий вид:

$$p(Y; X(k, \eta), \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - x_n(k, \eta))^2\right),$$

$$X(k, \eta) \in \bigcup_{k=1}^K \Theta(k/M).$$

Поэтому, учитывая формулы (5), (20) и рассматривая вектор Y как выборку единичного объема из распределения $\Phi_{X, \sigma^2 I}$, для логарифмической функции правдоподобия имеем:

$$L_Y(X(k, \eta)/\sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n - \sum_{m=1}^M u_n - n_m(k) \right)^2, \quad (24)$$

где $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$.

Из формулы (24) следует, что

$$\max_{k, \eta \in \Theta(k/M)} L_Y(X(k, \eta)/\sigma^2) = \max_{k, \eta} L_Y(X(k, \eta)/\sigma^2). \quad (25)$$

Так что в соответствии с принятыми обозначениями и результатами предыдущего параграфа для принятия решения о наблюдаемом векторе Y по критерию максимального правдоподобия достаточно проверить совокупность гипотез (23) по следующему правилу:

$$(\hat{k}, \hat{\eta}) = \arg \max_{k, \eta} L_Y(X(k, \eta)/\sigma^2). \quad (26)$$

ЛЕММА 2. Пусть $Y \in \Phi_{x, \sigma^2 I}$, а $X \in \bigcup_{k=1}^K \Theta(k/M)$. Тогда, если выполнены условия (1), (2) и $\sigma^2 < \infty$, то

$$\max_{k, \eta} L_Y(X(k, \eta)/\sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \min_{k, \eta} S(k, \eta) \right\},$$

где

$$S(k, \eta) = M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) - 2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} y_n u_n - n_m(k), \quad k \in \{1, \dots, K\}, \eta \in \Omega(\bullet/M). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (1) и неравенств (6)–(10), входящих в определение множеств $\Theta(k/M)$, $k = \overline{1, K}$, следует,

что если $m \neq i$, то $u_{n-n_m} u_{n-n_i} = 0$ для всех $n = \overline{0, N-1}$. Поэтому, раскрывая сумму квадратов, входящую в (24), и изменяя порядок суммирования, получим:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n - \sum_{m=1}^M u_{n-n_m}(k) \right)^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n^2 - 2y_n \sum_{m=1}^M u_{n-n_m}(k) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^M u_{n-n_m}(k) u_{n-n_i}(k) \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 - 2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} y_n u_{n-n_m}(k) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^M \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} u_{n-n_m}(k) u_{n-n_i}(k) = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 - 2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} y_n u_{n-n_m}(k) + M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Далее, из условия (2) и ограничения $\sigma^2 < \infty$ заключаем, что все члены в правых частях выражений (24), (28) и вместе с ними функция $L_Y(X(k, \eta)/\sigma^2)$ ограничены. Отсюда, заменив сумму двух последних членов в (28) по формуле (27), устанавливаем справедливость утверждения леммы. ■

Из леммы 2 вытекает очевидное

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях леммы 2

$$\arg \max_{k, \eta} L_Y(X(k, \eta)/\sigma^2) = \arg \min_{k, \eta} S(k, \eta).$$

Таким образом, из (24), (25) и леммы 2 следует, что максимизация функции правдоподобия сводится к минимизации целевой функции (k, η) на декартовом произведении множеств $\{1, \dots, K\} \times \Omega!(\bullet/M)$. Следствие 1 показывает, что для проверки совокупности (23) гипотез по критерию максимального правдоподобия достаточно воспользоваться правилом:

$$(\hat{k}, \hat{\eta}) = \arg \min_{k, \eta} S(k, \eta). \quad (29)$$

Правило (29) эквивалентно правилу (26), но позволяет избежать лишних вычислений.

4. Алгоритм распознавания

Лемма 2 и следствие 1 показывают, что сущность алгоритма совместного распознавания и обнаружения состоит в вычислении минимума целевой функции $S(k, \eta)$ и определении аргументов $(\hat{k}, \hat{\eta})$, доставляющих минимум этой функции. Структуру алгоритма раскрывает следующая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть $S(k, \eta)$ — функция, заданная формулой (27), тогда, если $\sigma^2 < \infty$ и условия (1), (2) выполнены, то

$$\min_{k, \eta} S(k, \eta) = \min_k B(k), \quad (30)$$

где

$$B(k) = M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) - 2D(k), \quad k \in \{1, \dots, K\}; \quad (31)$$

$$D(k) = \max_{\eta} F((k, \eta)/k), \quad k \in \{1, \dots, K\}; \quad (32)$$

$$F(k, \eta) = \sum_{m=1}^M d(k, n_m), \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad \eta \in \Omega(\bullet/M); \quad (33)$$

$$d(k, i) = \sum_{j=0}^{q-1} y_{j+i} u_j(k), \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad i \in \{0, \dots, N-q\}. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что условие (1) позволяет преобразовать вторую сумму, входящую во второй член выражения (27), к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} y_n u_n - n_m(k) &= \\ &= \sum_{n=n_m}^{n_m+q-1} y_n u_n - n_m(k) = \sum_{j=0}^{q-1} y_{j+n_m} u_j(k) = d(k, n_m). \end{aligned}$$

Далее, отметим, что из неравенства $\sigma^2 < \infty$ и условия (2) следует ограниченность функций $d(k, i)$, $F(k, \eta)$, $D(k)$, $B(k)$ и $S(k, \eta)$, определенных формулами (30)–(34). Наконец, заметим, что ввиду независимости k и η минимизацию $S(k, \eta)$ можно провести в два этапа: сначала по η при фиксированном k , а затем по k . Поэтому, учитывая введенные обозначения и сделанные замечания, получим:

$$\begin{aligned}
 \min_{k, \eta} S(k, \eta) &= \min_k \min_{\eta} S((k, \eta)/k) = \min_k \min_{\eta|k} S(k, \eta) = \\
 &= \min_k \left\{ M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) - 2 \max_{\eta|k} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} y_n u_n - n_m(k) \right] \right\} = \\
 &= \min_k \left\{ M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) - 2 \max_{\eta|k} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{j=0}^{q-1} y_j + n_m u_j(k) \right] \right\} = \\
 &= \min_k \left\{ M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) - 2 \max_{\eta|k} \sum_{m=1}^M d(k, n_m) \right\} = \\
 &= \min_k \left\{ M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) - 2 \max_{\eta} F((k, \eta)/k) \right\} = \\
 &= \min_k \left\{ M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) - 2D(k) \right\} = \min_k B(k). \blacksquare
 \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы 3

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{k} &= \arg \min_k B(k), \\
 \hat{\eta} &= \hat{\eta}(\hat{k}),
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где

$$\hat{\eta}(k) = \arg \max_{\eta} F((k, \eta)/k), \quad k \in \{1, \dots, K\}. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая из формул (35) очевидна. Вторая следует из того, что решение (36) задачи (32) поиска условного максимума есть функция, зависящая от k . ■

Следствие 2 раскрывает правило (29) нахождения искомых значений $(\hat{k}, \hat{\eta})$ аргументов (k, η) , доставляющих минимум $S(k, \eta)$.

Рассмотрим первый этап алгоритма, состоящий в вычислении условных максимумов $D(k)$, $k = \overline{1, K}$, функции $F(k, \eta)$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, при фиксированном k . Поскольку сущность этого этапа заключается в решении K однотипных экстремальных задач (32)–(34), зафиксируем k и в целях упрощения изложения опустим временно зависимость по k в указанных формулах, заменив в необходимых местах символ k на \bullet . Тогда задачу (32)–(33) вычисления максимума $D(\bullet)$ можно переписать в виде:

$$D(\bullet) = \max_{\eta} \sum_{m=1}^M d(\bullet, n_m), \quad n \in \Omega(\bullet/M). \quad (37)$$

Нетрудно заметить, что задача (37) является разновидностью задач нахождения экстремума аддитивной сепарабельной целевой функции с ограничениями в виде линейных неравенств (эти ограничения входят в определение множества $\Omega(\bullet/M)$). Подобные задачи эффективно решаются методами динамического программирования. Рекуррентные формулы для решения задачи (37) вытекают из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть $g(n) : Z \rightarrow \mathfrak{R}$ — функция, ограниченная на отрезке $[a, b]$, а $\nu_m \in [a, b]$, $m = \overline{1, M}$ — такая последовательность целых чисел, что: $T_{\min} \leq \nu_m - \nu_{m-1} \leq T_{\max}$, $m = \overline{2, M}$; $a \leq \nu_1 \leq a_1$, $b_M \leq \nu_M \leq b$, причем $a_1 \in [a, b]$, $b_M \in [a, b]$, а T_{\min} и T_{\max} — натуральные числа. Тогда:

1) имеют место следующие неравенства:

$$b - a \geq (M - 1)T_{\min}, \quad (38)$$

$$b_M - a_1 \leq (M - 1)T_{\max}; \quad (39)$$

2) число M лежит в интервале: $M^- \leq M \leq M^+$, где

$$M^- = \left\lceil \frac{b_M - a_1 + T_{\max} - 1}{T_{\max}} \right\rceil + 1, \quad M^+ = \left\lfloor \frac{b - a}{T_{\min}} \right\rceil + 1;$$

3) при каждом $M \in [M^-, M^+]$ значения членов последовательности ν_m , $m = \overline{1, M}$, принадлежат множествам ω_m , образующим замкнутые интервалы, так что

$$\nu_m \in \omega_m, \quad \omega_m = \{\nu_m : \nu'_m \leq \nu_m \leq \nu''_m\}, \quad m = \overline{1, M},$$

причем границы интервалов допустимых значений определяются по следующим формулам:

$$\nu'_m = \max\{a + (m-1)T_{\min}, b_M - (M-m)T_{\max}\},$$

$$\nu''_m = \min\{a_1 + (m-1)T_{\max}, b - (M-m)T_{\min}\};$$

4) для любого $M \in [M^-, M^+]$ максимум G_{\max} целевой функции $G(\nu_1, \dots, \nu_M) = \sum_{m=1}^M g(\nu_m)$ на множестве $\Psi_M = \Psi(a, a_1, b_M, b, T_{\min}, T_{\max}/M)$ всевозможных наборов $\Psi_M = (\nu_1, \dots, \nu_M)$ определяется по следующим рекуррентным формулам:

$$G_{m,n} = \begin{cases} g(n), & n \in \omega_1, m = 1, \\ \max_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G_{m-1,j} + g(n), & n \in \omega_m, m = \overline{2, M}, \end{cases} \quad (40)$$

$$G_{\max} = \max_{n \in \omega_M} G_{M,n}, \quad (41)$$

где

$$\gamma_{m-1}(n) = \{j: \nu_{m-1}^-(n) \leq j \leq \nu_{m-1}^+(n)\},$$

$$\nu_{m-1}^-(n) = \max\{a + (m-2)T_{\min}, n - T_{\max}\},$$

$$\nu_{m-1}^+(n) = \min\{a_1 + (m-2)T_{\max}, n - T_{\min}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сложив почленно двойные неравенства-ограничения, входящие в условия теоремы, получим:

$$(M-1)T_{\min} \leq \nu_M - \nu_1 \leq (M-1)T_{\max}, \quad M \geq 2;$$

$$b_M - a_1 \leq \nu_M - \nu_1 \leq b - a, \quad M \geq 1.$$

Совместив правую часть второго неравенства с левой частью первого и левую часть второго неравенства с правой частью первого, установим справедливость первого утверждения.

При доказательстве второго утверждения верхнюю границу M^+ для M находим из неравенства (38), а нижнюю M^- — из (39), предварительно представив (39) в эквивалентном виде $M T_{\max} + (T_{\max} - 1) \geq (b_M - a_1 + T_{\max} - 1) + T_{\max}$, допускаящем деление обеих частей неравенства на T_{\max} .

Докажем третье утверждение. Сложив почленно первые $m-1$ неравенств-ограничений, получим:

$$(m-1)T_{\min} + \nu_1 \leq \nu_m \leq (m-1)T_{\max} + \nu_1, \quad m = \overline{2, M}. \quad (42)$$

Совместив (42) с ограничениями на ν_1 , найдем:

$$a + (m-1)T_{\min} \leq \nu_m \leq a_1 + (m-1)T_{\max}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (43)$$

Аналогичным образом, просуммировав последние $M-m$ неравенств, получим:

$$\nu_M - (M-m)T_{\max} \leq \nu_m \leq \nu_M - (M-m)T_{\min}, \quad m = \overline{1, M-1}. \quad (44)$$

Комбинируя (44) с ограничениями на ν_M , найдем:

$$b_M - (M-m)T_{\max} \leq \nu_m \leq b - (M-m)T_{\min}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (45)$$

Наконец, объединив (43) и (45), получим третье утверждение теоремы.

Докажем четвертое — основное утверждение. При $M=1$ формулы (40) и (41) очевидны. Выведем формулы для $M \geq 2$. Прежде всего заметим, что область определения целевой функции $G(\nu_1, \dots, \nu_M)$ есть множество всевозможных наборов $\psi_M = (\nu_1, \dots, \nu_M)$, зависящее от параметров, а именно:

$$\Psi_M = \Psi(a, a_1, b_M, b, T_{\min}, T_{\max}/M), \quad M \in [M^-, M^+].$$

Рассмотрим задачу вычисления условных (при фиксированном $\nu_M = n$) максимумов целевой функции $G(\nu_1, \dots, \nu_{M-1}/n) = \sum_{i=1}^{M-1} g(\nu_i) + g(n)$, $n \in \omega_M$, на множестве

$$\Psi_{M-1}(n) = \Psi_{M-1}(n/a, a_1, b_M, b, T_{\min}, T_{\max}, M), \quad n \in \omega_M, \quad (46)$$

всевозможных наборов $\psi_{M-1} = (\nu_1, \dots, \nu_{M-1})$ меньшей размерности. Обозначим эту задачу через (M, n) , максимальное значение целевой функции — через $G_{M,n}$, т.е.:

$$G_{M,n} = \max_{\psi_{M-1} \in \Psi_{M-1}(n)} G(\nu_1, \dots, \nu_{M-1}/n), \quad n \in \omega_M,$$

подчеркнув формулой (46) тот факт, что при фиксированных значениях параметров $a, a_1, b_M, b, T_{\min}, T_{\max}$ и M множество всевозможных наборов $\psi_{M-1} = (\nu_1, \dots, \nu_{M-1})$ зависит только от $n \in \omega_M$.

Определим множество $\gamma_{M-1}(n)$ допустимых значений переменной ν_{M-1} при условии, что значение переменной ν_M фиксировано и равно n , причем $n \in \omega_M$. Для этого совместим неравенства (43) и (44) и, положив в этих неравенствах $m = M - 1$ и $\nu_M = n$, найдем:

$$\begin{aligned} \gamma_{M-1}(n) &= \left\{ \nu_{M-1} : \nu_{M-1}^-(n) \leq \nu_{M-1} \leq \nu_{M-1}^+(n) \right\} = \\ &= \{j : \nu_{M-1}^-(n) \leq j \leq \nu_{M-1}^+(n)\}, \quad n \in \omega_M, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\nu_{M-1}^-(n) = \max\{a + (M - 2)T_{\min}, n - T_{\max}\}, \quad (48)$$

$$\nu_{M-1}^+(n) = \min\{a_1 + (M - 2)T_{\max}, n - T_{\min}\}. \quad (49)$$

Погрузим задачу $\langle M, n \rangle$ в семейство подзадач $\{\langle m, n \rangle, n \in \omega_m, m = \overline{2, M}\}$, обозначив через m — номер фиксированной переменной ν_M , так что в соответствии с формулами (46)–(49):

$$\Psi_{m-1}(n) = \Psi_{m-1}(n/a, a_1, b_M, b, T_{\min}, T_{\max}, m),$$

$$\gamma_{m-1}(n) = \{j : \nu_{m-1}^-(n) \leq j \leq \nu_{m-1}^+(n)\},$$

$$\nu_{m-1}^-(n) = \max\{a + (m - 2)T_{\min}, n - T_{\max}\},$$

$$\nu_{m-1}^+(n) = \min\{a_1 + (m - 2)T_{\max}, n - T_{\min}\},$$

$$n \in \omega_m, m = \overline{2, M}.$$

Максимум целевой функции в задачах $\langle m, n \rangle$ обозначим через $G_{m,n}$, $n \in \omega_m$, $m = \overline{2, M}$. Тогда для формулы (40) имеем:

$$\begin{aligned} G_{m,n} &= \max_{\psi_{m-1} \in \Psi_{m-1}(n)} \sum_{i=1}^{m-1} g(\nu_i) + g(n) = \\ &= \max_{\nu_{m-1} \in \gamma_{m-1}(n)} \left\{ \max_{\psi_{m-2} \in \Psi_{m-2}(\nu_{m-1})} \left(\sum_{i=1}^{m-2} g(\nu_i) + g(\nu_{m-1}) \right) \right\} + g(n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{j \in \gamma_{m-1}(n)} \left\{ \max_{\psi_{m-2} \in \Psi_{m-2}(j)} \left(\sum_{i=1}^{m-2} g(\nu_i) + g(j) \right) \right\} + g(n) = \\
&= \max_{j \in \gamma_{m-1}(n)} (G_{m-1,j}) + g(n).
\end{aligned}$$

Наконец, формула (41) следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
G_{\max} &= \max_{\psi_M \in \Psi_M} \sum_{m=1}^M g(\nu_m) = \\
&= \max_{\nu_M \in \omega_M} \left\{ \max_{\psi_{M-1} \in \Psi_{M-1}(\nu_M)} \left(\sum_{m=1}^{M-1} g(\nu_m) + g(\nu_M) \right) \right\} = \\
&= \max_{n \in \omega_M} \left\{ \max_{\psi_{M-1} \in \Psi_{M-1}(n)} \left(\sum_{m=1}^{M-1} g(\nu_m) + g(n) \right) \right\} = \\
&= \max_{n \in \omega_M} \left(\max_{\psi_{M-1} \in \Psi_{M-1}(n)} \sum_{m=1}^{M-1} g(\nu_m) + g(n) \right) = \max_{n \in \omega_M} G_{M,n}. \blacksquare
\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Компоненты оптимального набора $\hat{\psi}_M = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_M)$, доставляющие максимум целевой функции G , вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\hat{\nu}_M = \arg \max_{n \in \omega_M} G_{M,n}, \quad (50)$$

$$\hat{\nu}_m = \arg \max_{j \in \gamma_m(\hat{\nu}_{m+1})} G_{m,j}, \quad m = M-1, M-2, \dots, 1. \quad (51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая формула следует непосредственно из (41), вторая — из (40). Причем, для доказательства (51) следует лишь заметить, что при каждом $m = M-1, M-2, \dots, 1$, для фиксированного $n = \hat{\nu}_{m+1}$, где $\hat{\nu}_{m+1} \in \omega_{m+1}$, множество $\gamma_m(n) = \gamma_m(\hat{\nu}_{m+1})$, в соответствии с его определением, есть множество допустимых значений переменной $\hat{\nu}_m$. ■

Вернемся к задаче (37) и для ее решения воспользуемся доказанной теоремой, заметив, что функция $d(\bullet, n)$, определяемая формулой (34), ограничена в каждой точке отрезка $[0, N-q]$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть в условиях теоремы $g(n) = d(\bullet, n)$. Тогда, если $a = 0$, $b = N - q$, $a_1 = T_{\max} - q$ и $b_M = N - T_{\max}$, то:

- 1) $\Psi_M = \Omega(\bullet/M)$,
 - 2) $G_{\max} = D(\bullet)$ и $\hat{\psi}_M = \hat{\eta}(\bullet)$
- при каждом $M \in [M^-, M^+]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость первого утверждения легко устанавливается после подстановки значений перечисленных параметров в ограничения, приведенные в теореме.

Из подстановки $g(n) = d(\bullet, n)$ в определение целевой функции G и формулы (33) имеем:

$$G(\nu_1, \dots, \nu_M) = \sum_{m=1}^M g(\nu_m) = \sum_{m=1}^M d(\bullet, \nu_m) = F(\bullet, \psi_M), \quad \psi_M \in \Psi_M.$$

Тогда справедливость второго утверждения следует из формул (32), (36), (37) и первого утверждения следствия. ■

Следствие 4 показывает, что подсчет значения величины $D(\bullet)$ условного максимума и нахождение условно-оптимального набора $\hat{\eta}(\bullet) = (\hat{\eta}_1(\bullet), \dots, \hat{\eta}_M(\bullet))$ сводится к вычислениям по рекуррентным формулам (40), (41) и (50), (51). Вычислим значение величины $D(\bullet)$ и определим условно-оптимальный набор $\hat{\eta}(\bullet)$ для каждого $k = \overline{1, K}$. Иными словами, найдем пару совокупностей величин $D(k), \hat{\eta}(k), k = \overline{1, K}$, решив K однотипных экстремальных задач и восстановив опущенную ранее зависимость от k в формулах (37) и (32)–(34).

На втором этапе алгоритма для каждого $k = \overline{1, K}$ по формуле (31) вычислим значение функции $B(k)$ и в соответствии с формулой (30) простым перебором по k найдем искомым минимум. Остается воспользоваться правилом (35), определив сначала значение \hat{k} , доставляющее экстремум целевой функции, а затем по этому значению — оптимальное значение $\hat{\eta}$.

5. Временная и емкостная сложность алгоритма

Под временной сложностью C_t или трудоемкостью алгоритма будем понимать число элементарных вычислительных операций (сложений, умножений, сравнений, присваиваний), необходимых для программной реализации алгоритма на компьютере, а под

емкостной сложностью C_s — объем памяти компьютера, требующийся для хранения и обработки данных.

Оценим сначала затраты по времени и памяти для алгоритма максимизации целевой функции G . Эти затраты находятся непосредственно из рекуррентных формул, установленных в теореме и следствии 3. Процесс последовательного вычисления по формулам (40) и (41) величины G_{\max} условимся называть прямым ходом алгоритма, а процедуру поиска оптимального набора $\hat{\psi}_M = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_M)$ по формулам (50) и (51) — обратным ходом алгоритма.

СЛЕДСТВИЕ 5. При каждом $M \in [M^-, M^+]$ временная и емкостная сложности алгоритма максимизации целевой функции $G(\psi_M)$, $\psi_M \in \Psi_M$, есть величины:

$$C_t(G) \sim \begin{cases} M(T_{\max} - T_{\min} + 1)(b - a + 1), & M \geq 2, \\ b - a + 1, & M = 1; \end{cases}$$

$$C_s(G) \sim M(b - a + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Трудоемкость $C_t(G)$ алгоритма максимизации целевой функции G складывается из трудоемкости $C_t^+(G)$ прямого и трудоемкости $C_t^-(G)$ обратного хода алгоритма, т.е.: $C_t(G) = C_t^+(G) + C_t^-(G)$.

Оценим трудоемкость прямого хода алгоритма. Из формул (40) и (41) видно, что вычисление максимума функции G производится за $M + 1$ шаг. На этих шагах выполняются операции сравнения, сложения и присваивания. На первом шаге при $m = 1$ имеем только операции присваивания. Число этих операций равно $\|\omega_1\|$. На последнем шаге при $m = M + 1$ имеем $\|\omega_M\|$ элементарных операций (одну операцию присваивания и $\|\omega_M\| - 1$ операций сравнения для отыскания безусловного максимума).

При $M \geq 2$ шаги с номерами $m = \overline{2, M}$ идентичны по виду элементарных операций. На каждом из этих шагов при каждом $n \in \omega_m$ требуется выполнить $\|\gamma_{m-1}(n)\| - 1$ операций сравнения для отыскания условных экстремумов и одну операцию сложения со значением функции $g(n)$, т.е. всего $\|\gamma_{m-1}(n)\|$ элементарных операций. Общее число операций, выполняемых на одном шаге алгоритма, равно $\sum_{n \in \omega_m} \|\gamma_{m-1}(n)\|$, так как $n \in \omega_m$. Поэтому, для

трудоемкости алгоритма вычисления G_{\max} имеем:

$$C_4^+(G) = \begin{cases} \|\omega_1\| + \sum_{m=2}^M \sum_{n \in \omega_m} \|\gamma_{m-1}(n)\| + \|\omega_M\|, & M \geq 2, \\ 2\|\omega_1\|, & M = 1. \end{cases} \quad (52)$$

Положим

$$\|\gamma\|_{\max} = \max_{n, n} \|\gamma_{m-1}(n)\|, \quad n \in \omega_m, \quad m = \overline{2, M},$$

$$\|\omega\|_{\max} = \max_m \|\omega_m\|, \quad m = \overline{1, M}.$$

Тогда при $M \geq 2$ справедлива следующая цепочка оценок сверху:

$$\begin{aligned} & \|\omega_1\| + \sum_{m=2}^M \sum_{n \in \omega_m} \|\gamma_{m-1}(n)\| + \|\omega_M\| \leq \\ & \leq \|\omega_1\| + \sum_{m=2}^M \|\omega_m\| \left(\max_{n \in \omega_m} \|\gamma_{m-1}(n)\| \right) + \|\omega_M\| \leq \\ & \leq \|\omega_1\| + \max_{n, n} \|\gamma_{m-1}(n)\| \sum_{m=2}^M \|\omega_m\| + \|\omega_M\| = \\ & = \|\omega_1\| + \|\gamma\|_{\max} \sum_{m=2}^M \|\omega_m\| + \|\omega_M\| \leq \\ & \leq 2\|\gamma\|_{\max} \sum_{m=1}^M \|\omega_m\| \leq 2M\|\gamma\|_{\max} \|\omega\|_{\max}, \end{aligned} \quad (53)$$

так как $\|\omega_1\| \leq \|\gamma\|_{\max} \cdot \|\omega_1\|$, $\|\omega_M\| \leq \|\gamma\|_{\max} \sum_{m=1}^M \|\omega_m\|$ и $\sum_{m=1}^M \|\omega_m\| \leq M\|\omega\|_{\max}$. Если $M = 1$, то имеем неравенство

$$2\|\omega_1\| \leq 2\|\omega\|_{\max}. \quad (54)$$

Объединив (52)–(54), получим следующую оценку для трудоемкости прямого хода алгоритма

$$C_t^+(G) \leq \begin{cases} 2M \|\gamma\|_{\max} \|\omega\|_{\max}, & M \geq 2, \\ 2\|\omega\|_{\max}, & M = 1. \end{cases} \quad (55)$$

Величину $\|\gamma\|_{\max}$ оценим из определений множеств ω_m , $m = \overline{1, M}$, и множеств $\gamma_{m-1}(n)$, $n \in \omega_m$, $m = \overline{2, M}$, данных в третьем и четвертом утверждениях теоремы. Сопоставив определения указанных множеств, легко заметить, что

$$\gamma_{m-1}(n) = \omega_{m-1} \cap \{j : n - T_{\max} \leq j \leq n - T_{\min}\}, \quad (56)$$

$$n \in \omega_m, \quad m = \overline{2, M}.$$

Поэтому $\|\gamma_{m-1}(n)\| \leq \|\{j : n - T_{\max} \leq j \leq n - T_{\min}\}\| = T_{\max} - T_{\min} + 1$ при всех $n \in \omega_m$, $m = \overline{2, M}$. Следовательно

$$\|\gamma\|_{\max} \leq T_{\max} - T_{\min} + 1. \quad (57)$$

Далее, из третьего утверждения теоремы следует, что $a \leq \nu_m^+ \leq b$ и $a \leq \nu_m^- \leq b$ при всех $m = \overline{1, M}$. Следовательно

$$\|\omega\|_{\max} \leq b - a + 1, \quad (58)$$

так как $\|\omega_m\| = \nu_m^+ - \nu_m^- + 1$, $m = \overline{1, M}$. Объединив (55), (57) и (58), получим формулу для трудоемкости прямого хода алгоритма:

$$C_t^+(G) \leq \begin{cases} 2M(T_{\max} - T_{\min} + 1)(b - a + 1), & M \geq 2, \\ 2(b - a + 1), & M = 1. \end{cases}$$

Оценим трудоемкость $C_t^-(G)$ обратного хода алгоритма. Из формул (50) и (51) видно, что обратный ход алгоритма осуществляется за M шагов. На первом шаге требуется всего одна операция присваивания, так как M -я компонента $\hat{\nu}_M$ оптимального набора $\hat{\nu}_M = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_M)$ определяется на последнем шаге прямого хода алгоритма одновременно с нахождением величины G_{\max} в соответствии с формулой (41). Поэтому $C_t^-(G) = 1$ при $M = 1$.

При $M \geq 2$ на каждом из оставшихся $M - 1$ шагов $m = M - 1, M - 2, \dots, 1$ требуется выполнить $\|\gamma_m(\hat{\nu}_{m+1})\| - 1$ операций сравнения для отыскания очередной компоненты оптимального набора и одну операцию присваивания, т.е. всего $\|\gamma_m(\hat{\nu}_{m+1})\|$ элементарных операций. Поэтому при $M \geq 2$ для трудоемкости обратного хода алгоритма имеем:

$$C_t^-(G) = \sum_{m=1}^{M-1} \|\gamma_m(\hat{\nu}_{m+1})\| + 1 \leq \\ \leq (M - 1)\|\gamma\|_{\max} + 1 \leq M(T_{\max} - T_{\min} + 1),$$

так как $\|\gamma_m(\hat{\nu}_{m+1})\| \leq \|\gamma\|_{\max}$ при всех $m = \overline{1, M-1}$ и $T_{\max} - T_{\min} \geq 0$.

Таким образом, при $M \geq 2$ трудоемкость алгоритма есть величина

$$C_t(G) = C_t^+(G) + C_t^-(G) \leq \\ \leq 2M(T_{\max} - T_{\min} + 1)(b - a + 1) + M(T_{\max} - T_{\min} + 1) \leq \\ \leq 3M(T_{\max} - T_{\min} + 1)(b - a + 1) \sim \\ \sim M(T_{\max} - T_{\min} + 1)(b - a + 1),$$

так как $b - a \geq 0$. Если же $M = 1$, то

$$C_t(G) = 2(b - a + 1) + 1 \leq 3(b - a + 1) \sim (b - a + 1).$$

Емкостная сложность $C_s(G)$ алгоритма максимизации целевой функции G складывается из емкостных сложностей $C_s^+(G)$ и $C_s^-(G)$ прямого и обратного хода алгоритма, а также объема памяти, необходимого для хранения исходного массива значений функции $g(n)$, $n \in [a, b]$, равного $b - a + 1$, т.е.: $C_s(G) = C_s^+(G) + C_s^-(G) + b - a + 1$.

Оценим емкостную сложность прямого хода алгоритма. Из формул (40) следует, что при $M \geq 2$ на каждом шаге $m = \overline{2, M}$ алгоритма для рекуррентного вычисления каждого n -го текущего значения $G_{m,n}$, $n \in \omega_m$, требуется множество значений величин $G_{m-1,j}$, $j \in \gamma_{m-1}(n)$, найденных на предыдущем $(m - 1)$ -м шаге алгоритма. Поэтому на каждом шаге $m = \overline{2, M}$ для вычисления всех значений $G_{m,n}$, $n \in \omega_m$, необходима сохраняемая с шага

$m - 1$ совокупность значений $G_{m-1,j}$, $j \in \bigcup_{n \in \omega_m} \gamma_{m-1}(n)$. Следовательно, объем данных, вычисляемых на каждом текущем m -м шаге и запоминаемых для выполнения последующего $(m + 1)$ -го шага алгоритма, равен $\|\omega_m\|$, а объем данных, которые необходимо сохранять с предыдущего $(m - 1)$ -го шага для вычисления всех данных текущего m -го шага, равен мощности множества $\bigcup_{n \in \omega_m} \gamma_{m-1}(n)$.

Чтобы оценить мощность указанного множества, покажем сначала, что имеет место формула

$$\omega_{m-1} \subseteq \bigcup_{n \in \omega_m} \{j : n - T_{\max} \leq j \leq n - T_{\min}\}, \quad m = \overline{2, M}, \quad (59)$$

которая, согласно определению множеств ω_m , $m = \overline{2, M}$, равносильна двум неравенствам:

$$\nu'_{m-1} \geq \min_{n \in \omega_m} (n - T_{\max}), \quad \nu''_{m-1} \leq \max_{n \in \omega_m} (n - T_{\min}), \quad m = \overline{2, M}.$$

Для первого из этих неравенств имеем:

$$\begin{aligned} \min_{n \in \omega_m} (n - T_{\max}) &= \min_{n \in \omega_m} n - T_{\max} = \\ &= \max\{a + (m - 1)T_{\min} - T_{\max}, b_M - (M - m)T_{\max} - T_{\max}\} = \\ &= \max\{a + (m - 2)T_{\min} - (T_{\max} - T_{\min}), \\ & \quad b_M - [M - (m - 1)]T_{\max}\} \leq \nu'_{m-1}, \quad m = \overline{2, M}, \end{aligned}$$

так как $T_{\max} - T_{\min} \geq 0$. Аналогичным образом устанавливаем справедливость второго неравенства, а затем — формулы (59).

Далее, воспользовавшись формулами (56) и (59), получим:

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \omega_m} \gamma_{m-1}(n) &= \bigcup_{n \in \omega_m} \{\omega_{m-1} \cap \{j : n - T_{\max} \leq j \leq n - T_{\min}\}\} = \\ &= \omega_{m-1} \cap \left\{ \bigcup_{n \in \omega_m} \{j : n - T_{\max} \leq j \leq n - T_{\min}\} \right\} = \omega_{m-1}, \\ & \quad m = \overline{2, M}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \bigcup_{n \in \omega_m} \gamma_{m-1}(n) \right\| = \|\omega_{m-1}\|, \quad m = \overline{2, M}.$$

Таким образом, на каждом шаге $m = \overline{2, M}$ для вычисления и запоминания $\|\omega_m\|$ значений текущих величин $G_{m,n}$, $n \in \omega_m$, необходимо помнить $\|\omega_{m-1}\|$ значений величин $G_{m-1,j}$, $j \in \bigcup_{n \in \omega_m} \gamma_{m-1}(n)$, подсчитанных на шаге $m - 1$. Следовательно,

но, на каждом шаге $m = \overline{2, M}$ прямого хода алгоритма необходимо резервировать $\|\omega_m\| + \|\omega_{m-1}\|$ единиц обновляемой памяти, а для реализации всех шагов прямого хода достаточно иметь не более $2\|\omega\|_{\max}$ единиц обновляемой памяти, так как $\|\omega_m\| \leq \|\omega\|_{\max}$ и $\|\omega_{m-1}\| \leq \|\omega\|_{\max}$. Поэтому при $M \geq 2$ емкостная сложность прямого хода алгоритма есть величина $C_g^+(G) \leq 2\|\omega\|_{\max}$. Если $M = 1$, то $C_g^+ = \|\omega_1\| \leq \|\omega\|_{\max}$.

Оценим затраты по памяти для реализации обратного хода алгоритма. Из формулы (50) следует, что для определения M -ой компоненты $\hat{\nu}_m$ оптимального набора $\hat{\psi}_M$ требуется совокупность, состоящая из $\|\omega_M\|$ сохраненных в памяти значений величин $G_{M,n}$, $n \in \omega_M$. Поэтому при $M = 1$ для выполнения обратного хода алгоритма память не требуется.

При $M \geq 2$, в соответствии с формулой (51), для нахождения каждой из оставшихся компонент $\hat{\nu}_m$, $m = M - 1, M - 2, \dots, 1$, требуется множество сохраненных в памяти значений величин $G_{m,j}$, $j \in \gamma_m(\hat{\nu}_{m+1})$, для всех возможных $\hat{\nu}_{m+1} \in \omega_{m+1}$, так как оптимальное значение компоненты $\hat{\nu}_{m+1}$ определяется только на предыдущем шаге обратного хода алгоритма. Поэтому на каждом шаге $m = M - 1, M - 2, \dots, 1$ обратного хода алгоритма для определения компоненты $\hat{\nu}_m$ требуется сохранять совокупность значений величин $G_{m,j}$, $j \in \bigcup_{\hat{\nu}_{m+1} \in \omega_{m+1}} \gamma_m(\hat{\nu}_{m+1})$.

Как показано выше, $\bigcup_{\hat{\nu}_{m+1} \in \omega_{m+1}} \gamma_m(\hat{\nu}_{m+1}) = \omega_m$ для всех $m = \overline{1, M - 1}$. Следовательно, для определения оставшихся компонент оптимального набора необходимо помнить таблицу значений $G_{m,j}$, $m = \overline{1, M - 1}$, $j \in \omega_m$, число элементов которой равно

$\sum_{m=1}^{M-1} \|\omega_m\|$, а для нахождения всех компонент — массив из

$\sum_{m=1}^M \|\omega_m\|$ значений $G_{m,j}$, $m = \overline{1, M}$, $j \in \omega_m$. Поэтому при $M \geq 2$ затраты по памяти для выполнения обратного хода алгоритма составляют величину $C_S^-(G) = \sum_{m=1}^M \|\omega_m\| \leq M \|\omega\|_{\max}$, а емкостная сложность алгоритма есть величина

$$\begin{aligned} C_S(G) &= C_S^+(G) + C_S^-(G) + b - a + 1 \leq \\ &\leq (M + 2) \|\omega\|_{\max} + b - a + 1 \leq 3M \|\omega\|_{\max} + b - a + 1 \leq \\ &\leq 3M(b - a + 1) + b - a + 1 \leq 4M(b - a + 1) \sim M(b - a + 1), \end{aligned}$$

так как $\|\omega\|_{\max} \leq b - a + 1$, $b - a \geq 0$ и $M \geq 1$. Если же $M = 1$, то

$$C_S(G) \leq \|\omega\|_{\max} + b - a + 1 \leq 2(b - a + 1) \sim b - a + 1.$$

Таким образом, при любом $M \in [M^-, M^+]$ емкостная сложность алгоритма есть величина $C_S(G) \sim M(b - a + 1)$. ■

СЛЕДСТВИЕ 6. При каждом $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ временная и емкостная сложности алгоритма максимизации целевой функции $F(\bullet, \eta)$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, есть величины:

$$C_i(F) \sim \begin{cases} M(T_{\max} - T_{\min} + 1)(N - q + 1), & M \geq 2, \\ N - q + 1, & M = 1; \end{cases}$$

$$C_S(F) \sim M(N - q + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача максимизации функции $F(\bullet, \eta)$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, сущность которой определяют формулы (32) и (36), сводится, как установлено следствием 4, к задаче максимизации функции $G(\psi_M)$, $\psi_M \in \Psi(a, a_1, b_M, b, T_{\min}, T_{\max}/M)$, при следующих значениях параметров: $a = 0$, $b = N - q$, $a_1 = T_{\max} - q$, $b_M = N - T_{\max}$. Подставив значения параметров $a = 0$, $b = N - q$ в сложностные оценки задачи максимизации функции $G(\psi_M)$, приведенные в следствии 5, получим сформулированный результат. ■

СЛЕДСТВИЕ 7. При каждом $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ временная и емкостная сложности алгоритма минимизации целевой функции $S(k, \eta)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$ есть величины:

$$C_t(S) \sim \begin{cases} KM(T_{\max} - T_{\min} + 1)(N - q + 1), & M \geq 2, \\ K(N - q + 1), & M = 1; \end{cases}$$

$$C_S(S) \sim MN + Kq.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим затраты по времени. Минимизация $S(k, \eta)$ проводится в два этапа. Первый этап заключается в решении K однотипных задач максимизации функции $F(k, \eta)$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, при фиксированном $k = \overline{1, K}$. Временная сложность $C_t(F)$ каждой из этих K задач определена в следствии 6. Из этого следствия заключаем, что трудоемкость первого этапа алгоритма минимизации $S(k, \eta)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, есть величина $O\{KM(T_{\max} - T_{\min} + 1)(N - q + 1)\}$ при $M \geq 2$ и $O\{K(N - q + 1)\}$ при $M = 1$.

На втором этапе алгоритма для каждого $k = \overline{1, K}$ по формуле (31) вычисляется значение функции $B(k)$ с использованием значения величины $D(k)$, найденного на первом этапе. Из формулы (31) видно, что для вычисления всех значений $B(k)$, $k = \overline{1, K}$, необходимо выполнить K умножений и K вычитаний, т.е. всего $2K$ элементарных операций, так как для каждого $k = \overline{1, K}$ значение величины $M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k)$, входящей в формулу (31), можно вычислить заранее. Кроме того, требуется K элементарных операций ($K - 1$ сравнение и одно присваивание) для нахождения безусловного минимума функции $S(k, \eta)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, и указания оптимальных аргументов. Поэтому на втором этапе необходимо всего $2K + K = 3K$ элементарных операций.

Следовательно, временная сложность минимизации целевой функции $S(k, \eta)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, есть величина

$$\begin{aligned} C_t(S) &= O\{KM(T_{\max} - T_{\min} + 1)(N - q + 1)\} + 3K = \\ &= O\{KM(T_{\max} - T_{\min} + 1)(N - q + 1)\}, \end{aligned}$$

при $M \geq 2$ и

$$C_t(S) = O[K(N - q + 1)] + 3K = O[K(N - q + 1)],$$

при $M = 1$.

Оценим затраты по памяти. Для хранения значений компонент векторов $U(k)$, $k = \overline{1, K}$, размерности q необходимо Kq единиц памяти. Для вычисления K значений функции $B(k)$, $k = \overline{1, K}$, требуется сохранять совокупность из K значений величин $M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k)$, $k = \overline{1, K}$.

Далее, в следствии 6 установлено, что на первом этапе алгоритма при каждом фиксированном $k = \overline{1, K}$ для максимизации функции $F(k, \eta)$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, требуется резервировать память размером $C_s(F) = O[M(N - q + 1)]$. Нетрудно заметить, что эту память можно обновлять перед началом вычислений для очередного $k = \overline{2, K}$. Действительно, после вычисления значения первого условного максимума $D(1)$ и M значений компонент первого условно-оптимального набора $\hat{\eta}(1)$ можно сразу же вычислить значение функции $B(1)$ и затем сохранить это значение, а также M значений компонент набора $\hat{\eta}(1)$. После этого память, необходимую для максимизации функции $F(k, \eta)$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, при каждом $k = \overline{2, K}$ можно очищать и использовать снова сначала для вычисления очередной совокупности значений величин $D(k)$ и $\hat{\eta}(k)$, а затем — значения $B(k)$. При этом для нахождения безусловного минимума функции $S(k, \eta)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, и оптимальной пары аргументов $(\hat{k}, \hat{\eta})$ при каждом $k = \overline{1, K}$ достаточно хранить только одно, наименьшее по всем предыдущим k , значение функции $B(k)$, равное $\min_{i < k} B(i)$, а также значение номера $j = \arg \min_{i < k} B(i)$ и совокупность из M значений компонент набора $\hat{\eta}(j)$.

Таким образом, емкостная сложность минимизации целевой функции $S(k, \eta)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, есть величина

$$\begin{aligned} C_s(S) &= O[M(N - q + 1)] + M + 2 + Kq + K = \\ &= O[M(N - q + 1)] + Kq + K \leq O[M(N - q + 1)] + 2Kq = \\ &= O[M(N - q + 1) + Kq] = O[MN + Kq]. \blacksquare \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 8. При каждом $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ временная и емкостная сложности алгоритма совместного распознавания квазипериодической последовательности импульсов и обнаружения моментов времени из начала есть величины:

$$C_t \sim \begin{cases} KM(T_{\max} - T_{\min} + q)(N - q + 1), & M \geq 2, \\ Kq(N - q + 1), & M = 1; \end{cases}$$

$$C_S \sim MN + Kq.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с леммой 3 и следствием 2 затраты по времени и памяти для алгоритма совместного распознавания и обнаружения больше аналогичных затрат для алгоритма минимизации целевой функции $S(k, \eta)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, $\eta \in \Omega(\bullet/M)$, исключительно из-за необходимости дополнительных вычислений по формуле (34) значений функции $d(k, m)$ для всех $k \in \{1, \dots, K\}$, $m \in \bigcup_{i=1}^M \omega_i \subseteq \{0, \dots, N - q\}$.

При каждом фиксированном k и m вычисление свертки $d(k, m)$ сопряжено с выполнением q операций умножения и q операций сложения. Следовательно, для вычисления значений всех сверток необходимо не более $2qK(N - q + 1) = O[Kq(N - q + 1)]$ элементарных операций. Поэтому, опираясь на следствие 7, при $M = 1$ для временной сложности алгоритма имеем:

$$C_t = O[K(N - q + 1)] + O[Kq(N - q + 1)] = O[Kq(N - q + 1)].$$

Если $M \geq 2$, то

$$\begin{aligned} C_t &= O[KM(T_{\max} - T_{\min} + 1)(N - q + 1)] + O[Kq(N - q + 1)] \sim \\ &\sim KM(T_{\max} - T_{\min} + 1)(N - q + 1) + Kq(N - q + 1) \leq \\ &\leq KM(N - q + 1)(T_{\max} - T_{\min} + 1 + q) \leq \\ &\leq KM(N - q + 1)[2(T_{\max} - T_{\min}) + 2q] = \\ &= 2KM(N - q + 1)(T_{\max} - T_{\min} + q) \sim \\ &\sim KM(N - q + 1)(T_{\max} - T_{\min} + q). \end{aligned}$$

Для хранения всех компонент вектора Y , необходимых при вычислении сверток, требуется N единиц памяти. Кроме того, при каждом $k = \overline{1, K}$ для сохранения всех вычисленных по формуле

(34) сверток необходимо резервировать память, объем которой не превышает $N - q + 1$ единиц, так как $m \in \bigcup_{i=1}^M \omega_i \in \{0, \dots, N - q\}$.

Эта память может обновляться при каждом $k = \overline{2, K}$, поскольку сохранение сверток при переходе от одного значения k к другому не требуется. Следовательно, при вычислении всех сверток достаточно резервировать память, объем которой не превосходит $2N - q + 1$ единиц. Потому, в соответствии со следствием 7, эмпирическая сложность алгоритма есть величина

$$C_s = O(MN + Kq) + O(2N - q + 1) = O(MN + Kq). \blacksquare$$

8. Численное моделирование

Для проверки эффективности изложенного алгоритма проведены численные эксперименты по распознаванию импульсов, скрытых от прямого наблюдения в зашумленных квазипериодических последовательностях. При проведении экспериментов варьировалась как форма импульсов, так и все параметры алгоритма — $K, N, M, T_{\max}, T_{\min}, q$ и σ .

Каждая зашумленная последовательность (выборка из многомерного нормального распределения), подлежащая распознаванию, формировалась путем поэлементного сложения значений сгенерированной квазипериодической импульсной последовательности со значениями последовательности, синтезированной с помощью гауссовского датчика случайных чисел. При генерации незашумленных последовательностей квазипериодические моменты времени начала импульсов формировались с помощью датчика равномерно распределенных случайных чисел.

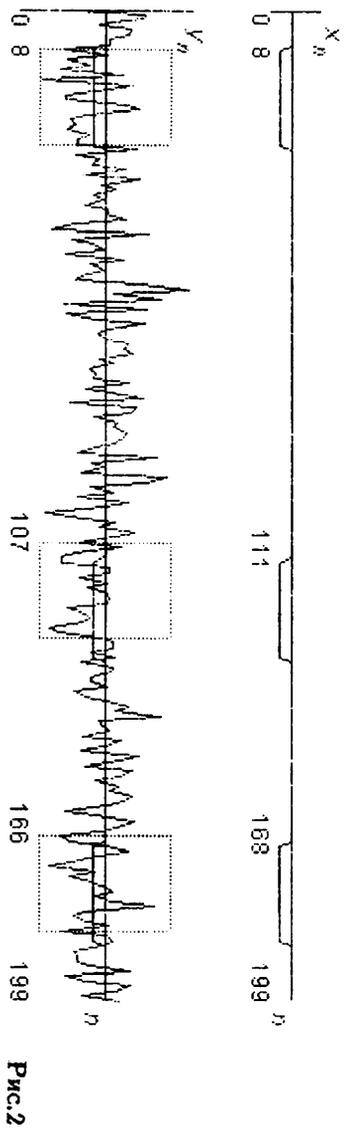
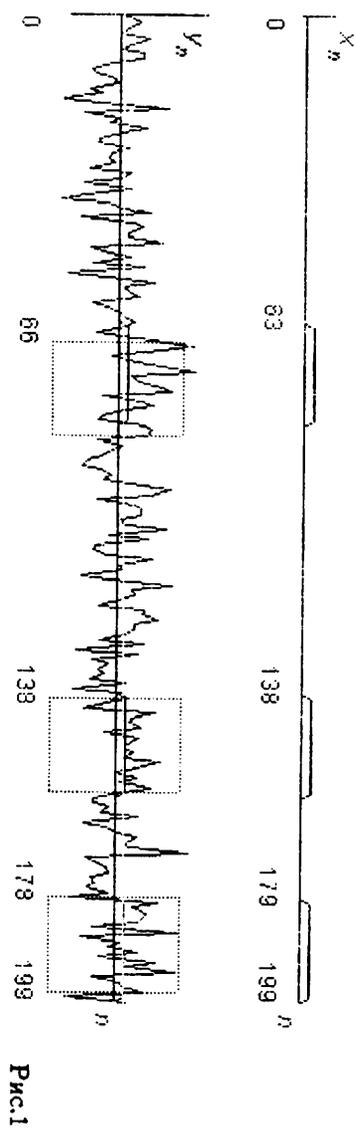
В целях изучения точности работы алгоритма путем сопоставления теоретических и экспериментальных данных (о вероятности ошибки распознавания и ее оценке) моделировалась байесовская процедура принятия решения. Генерация выборочных данных производилась для случая равновероятных классов

(импульсов), что позволило при распознавании использовать правило (29) принятия решения, соответствующее критерию максимального правдоподобия.

Ниже в качестве примера приведены иллюстративные материалы, показывающие особенности данных, подлежащих классификации (распознаванию), поясняющие сущность изложенного алгоритма совместного распознавания и обнаружения и характеризующие точность работы алгоритма. Эти данные получены в серии экспериментов по распознаванию двух равновероятных импульсов. В качестве эталонных импульсов первого и второго классов служили последовательности $u_n(1) = 60$, $u_n(2) = -60$, $n = 0, \dots, 19$, которые можно интерпретировать как разнополярные прямоугольные импульсы длительностью $q = 20$.

В верхней части рис.1 в виде графика изображены компоненты вектора $X = X(1/\eta)$, $X(1/\eta) \in \Theta(1/\eta)$ размерности $N = 200$ при условии, что $M = 3$ и $\eta = (63, 138, 179)$. Эти компоненты образуют ненаблюдаемую последовательность x_n , $n = \overline{0, 199}$, сформированную в соответствии с формулой (5) путем квазипериодического повторения трех импульсов $U(1)$ первого класса в фиксированные моменты времени $n_1 = 63$, $n_2 = 138$ и $n_3 = 179$. Причем набор $\eta = (63, 138, 179)$ принадлежит такому множеству $\Omega(N, T_{\min}, T_{\max}, q/M)$, $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$, всевозможных наборов, которое порождается ограничениями (6)–(10), когда $N = 200$, $T_{\max} = 135$, $T_{\min} = 40$ и $q = 20$, при фиксированном $M = 3$ из интервала $[1, 5]$. Множество $\Omega(1/M)$ в данном примере есть множество $\Theta(1/3)$ всевозможных векторов $X(1, \eta)$ размерности $N = 200$, компоненты которых образуют последовательности, составленные из трех подпоследовательностей — импульсов $U(1)$.

В нижней части того же рисунка представлено графическое изображение компонент вектора $Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}$, полученного по формуле (4) при $\tau = 150$, причем $X = X(1/\eta)$ — вектор, компоненты которого изображены в верхней части рисунка. Совокупность компонент вектора Y соответствует наблюдаемой зашумленной последовательности, подлежащей распознаванию. На этом же графике прямоугольными рамками обозначены участки, на которых алгоритм обнаружил 3 импульса и безошибочно идентифици-



ронал их как импульсы первого класса, несмотря на то, что уровень помехи $\sigma = 150$ в 2.5 раза превышает амплитуду импульса, равную 60. Сопоставив верхний и нижний графики, можно заметить незначительную ошибку оценивания моментов времени начала импульсов, выраженную в смещении оценок этих моментов времени (левых границ прямоугольных рамок на нижнем графике) относительно их истинных значений (положений начальных точек импульсов на верхнем графике). Численные значения оценок моментов времени начала импульсов из оптимального набора $\hat{\eta}(1) = (66, 138, 178)$, найденного алгоритмом, нанесены на нижнем графике.

На рис.2 аналогичным образом представлена одна из множества всевозможных квазипериодических последовательностей, порожденных импульсом $U(2)$ второго класса, и одна из множества

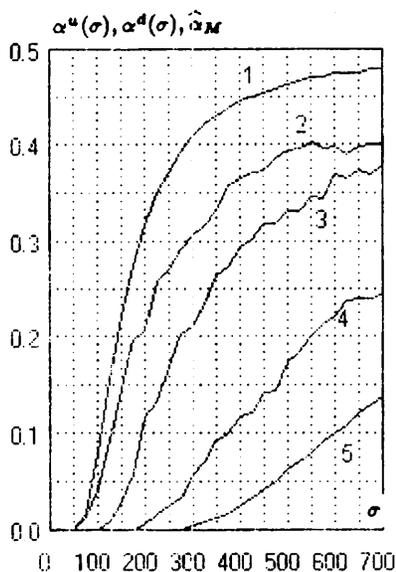


Рис.3

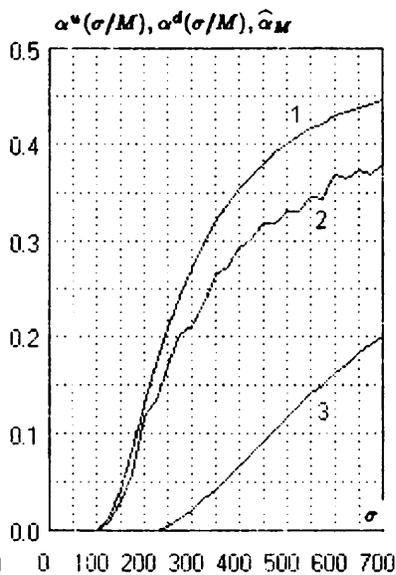


Рис.4

сгенерированных выборочных (наблюдаемых) последовательностей. Значения параметров $N, T_{\max}, T_{\min}, q, M$ и σ те же, что и на рис.1. Моменты времени начала импульсов и оценки этих моментов нанесены соответственно на верхнем и нижнем графиках. В данном примере совокупность наблюдаемых компонент вектора Y была правильно идентифицирована алгоритмом как квазипериодическая последовательность, порожденная импульсом второго класса.

Данные, представленные на рис.3,4, характеризуют точность алгоритма в терминах вероятности ошибочной классификации. Эти данные получены в результате распознавания упомянутых выше разнополярных прямоугольных импульсов длительностью $q = 20$, скрытых в квазипериодических последовательностях и искаженных гауссовской некоррелированной помехой, при следующих значениях параметров: $N = 200, T_{\max} = 135$ и $T_{\min} = 40$.

На рис.3 совмещены 5 графиков. Под номерами 1 и 5 изображены зависимости верхней $\alpha^u(\sigma)$ и нижней $\alpha^d(\sigma)$ границ вероятности ошибки распознавания от стандартного отклонения. В случае равных априорных вероятностей распознаваемых классов эти границы задаются формулами [1, 2]:

$$\alpha^u(\sigma) = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{8\sigma^2} M_{\min} (\|U(1)\|^2 + \|U(2)\|^2 - 2R_{\max}) \right],$$

$$\alpha^d(\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{4\sigma^2} M_{\max} (\|U(1)\|^2 + \|U(2)\|^2 - 2R_{\min}) \right] \right\}^{1/2},$$

где

$$R_{\min} = \min_{|l| \leq q} \sum_{n=0}^{q-|l|} u_n(1)u_{n+l}(2), \quad R_{\max} = \max_{|l| \leq q} \sum_{n=0}^{q-|l|} u_n(1)u_{n+l}(2),$$

причем, в соответствии с формулой (12), $M_{\min} = 1$ и $M_{\max} = 5$. На этом же рисунке изображены три графика оценок $\hat{\alpha}_M$ вероятности ошибки распознавания в зависимости от уровня помехи σ , полученные при моделировании байесовской процедуры принятия решения для трех значений M : $M = 1$ (кривая 2), $M = 3$ (кривая 3) и $M = 5$ (кривая 4).

На рис.4 совмещены 3 графика. Под номерами 1 и 3 изображены зависимости верхней $\alpha^u(\sigma/M)$ и нижней $\alpha^d(\sigma/M)$ условных

(при фиксированном $M = 3$) границ вероятности ошибки распознавания от стандартного отклонения. Формулы для условных границ $\alpha^u(\sigma/M)$ и $\alpha^d(\sigma/M)$ можно получить из формул для $\alpha^u(\sigma)$ и $\alpha^d(\sigma)$, если в последних положить $M_{\min} = M_{\max} = M$. Кривая под номером 2 на этом рисунке — оценка $\hat{\alpha}_M$ вероятности ошибки распознавания при $M = 3$ — идентична кривой на рис.3.

Экспериментальные оценки вероятности ошибки получены по схеме селективной выборки. В условиях равных априорных вероятностей распознаваемых классов общее число V выборок (сгенерированных квазипериодических последовательностей, искаженных гауссовской помехой) было разбито на 2 части — по $\frac{V}{2}$ выборок на класс. Подсчет оценки вероятности ошибочного распознавания проводился по формуле $\hat{\alpha} = \frac{V_1 + V_2}{V}$, где V_1 и V_2 — число неправильно опознанных выборок первого и второго классов соответственно. На контроль предъявлялось $V = 1000$ выборок (500 на класс) при различных значениях дисперсии σ^2 помехи, т.е. каждая точка экспериментальной кривой при различных значениях дисперсии помехи получена по 1000 выборкам.

Приведенные рисунки иллюстрируют согласованность теоретических и экспериментальных данных и демонстрируют высокую эффективность описанного алгоритма.

З а к л ю ч е н и е

В работе изложено решение задачи распознавания последовательности, образованной из заданного числа одинаковых импульсов с неизвестными (детерминированными) квазипериодическими моментами времени их начала, в предположении, что эта последовательность искажена некоррелированной гауссовской помехой с известной дисперсией. В отличие от аналогичной задачи с неизвестным числом импульсов, для корректной постановки данной задачи распознавания необходимо, чтобы заданное число импульсов лежало в интервале допустимых значений. Границы этого интервала (при фиксированной длине последовательности) установлены в лемме 1. В этой же лемме указана область допустимых

значений длины распознаваемой последовательности (при фиксированном числе импульсов).

Лемма 1 позволила интерпретировать поставленную задачу распознавания как специфическую задачу проверки гипотез о среднем гауссовского случайного вектора при заданной диагональной ковариационной матрице. Специфика задачи состоит в том, что:

1) для каждой из проверяемой гипотез компоненты вектора средних образуют квазипериодическую последовательность, включающую заданное число одинаковых подпоследовательностей (импульсов из одного класса);

2) выборочная (наблюдаемая) последовательность принадлежит одному из таких семейств гипотез (о среднем), которое порождается всевозможными квазипериодическими последовательностями, образованными из одинаковых подпоследовательностей;

3) мощность множества проверяемых гипотез растет экспоненциально с увеличением размерности вектора средних (или длины последовательности).

Из данной интерпретации следует, что поставленную задачу можно также трактовать как задачу совместного распознавания импульса, породившего ненаблюдаемую последовательность, и обнаружения моментов времени начала этого импульса в ненаблюдаемой последовательности.

Поскольку принятие оптимального статистического решения при проверке гипотез сопряжено с максимизацией функции правдоподобия, а процедура ее максимизации является ядром вычислительного алгоритма совместного распознавания и обнаружения, в работе обоснован алгоритм поиска экстремума этой функции. При этом сначала показано (лемма 2 и следствие 1), что максимизация функции правдоподобия сводится к минимизации вспомогательной целевой функции, а затем (лемма 3 и следствие 2) раскрыта двухэтапная структура алгоритма минимизации этой функции.

Сущность первого этапа состоит в решении однотипных экстремальных задач максимизации сепарабельной целевой функции со специфическими ограничениями в виде линейных неравенств. Число решаемых экстремальных задач равно числу эта-

лонных импульсов или числу распознаваемых классов. Так как типовая экстремальная задача, возникающая на первом этапе, представляет самостоятельный интерес и может возникнуть в других приложениях, в работе в качестве обобщения доказана теорема и следствие 3 к ней, в которых установлены рекуррентные формулы дискретной оптимизации. Далее (следствие 4) доказано, что при определенных значениях параметров каждая из однотипных экстремальных задач первого этапа алгоритма минимизации (распознавания) сводится к задаче, решение которой дано в теореме. Наконец, показано, что сущность второго этапа алгоритма состоит в простом выборе минимального элемента из набора значений функций, которые зависят от величин условных максимумов, найденных на первом этапе. Число элементов в этом наборе совпадает с мощностью множества эталонных импульсов.

Оценки временной и емкостной сложности, приведенные в следствиях 5–8, дают представление об эффективности как отдельных этапов алгоритма, так и алгоритма распознавания в целом. Эти оценки устанавливают взаимосвязь между параметрами решаемой задачи и необходимыми для ее решения ресурсами по памяти и времени и, кроме того, показывают, что поставленная в работе задача полиномиально разрешима с затратами по памяти, линейно зависящими от параметров.

Высокая эффективность (в смысле затрат по времени и памяти) и точность (в смысле вероятности ошибки) предложенного алгоритма подтверждена результатами численного моделирования. Представляется, что алгоритм найдет свое применение в разнообразных приложениях, связанных с обработкой и распознаванием несинхронизированных по времени данных, в частности в медицинской и технической диагностике, радиолокации и гидроакустике, при распознавании речевых сигналов и изображений и т.д.

Л и т е р а т у р а

1. КЕЛЬМАНОВ А.В., КУТНЕНКО О.А. Алгоритм распознавания квазипериодической последовательности импульсов и обнаружения моментов их начала в гауссовском шуме // Искусственный интеллект и экспертные системы. — Новосибирск, 1996. — Вып. 157: Вычислительные системы. — С. 137–180.

2. КЕЛЬМАНОВ А.В., КУТНЕНКО О.А. Нижняя граница вероятности ошибки распознавания квазипериодической последовательности импульсов в гауссовском белом шуме // Настоящий сборник. — С. 55–77.

Поступила в редакцию
30 ноября 1998 года