

АНАЛИЗ ДАННЫХ И СИГНАЛОВ (Вычислительные системы)

1998 год

Выпуск 163

УДК 519.2:621.391

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ РАСПОЗНАВАНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ В ГАУССОВСКОМ БЕЛОМ ШУМЕ¹

А.В.Кельманов, О.А.Кутненко

В в е д е н и е

В работе [1] приведено решение задачи и обоснован байесовский апостериорный вычислительный алгоритм распознавания (групповой классификации) квазипериодической последовательности одинаковых импульсов, искаженной аддитивной гауссовской некоррелированной помехой с известной дисперсией. Там же найдена верхняя граница вероятности ошибки распознавания.

Цель данной работы состоит в получении нижней границы вероятности ошибки для той же, что и в [1], задачи распознавания.

1. Постановка задачи

Пусть на числовой прямой заданы $K \geq 2$ различных последовательностей $u_n(k) \in \mathfrak{R}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, (\mathfrak{R} — числовая прямая), $k = \overline{1, K}$, таких, что для всех $k \in \{1, 2, \dots, K\}$:

$$u_n(k) = 0, \quad n < 0, \quad n > q - 1, \quad (1)$$

¹Работа выполнена в рамках проекта № 97-01-00866, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований.

$$0 < \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) < \infty. \quad (2)$$

Вектор $U(k) = (u_0(k), \dots, u_{q-1}(k))$, а также последовательность его компонент будем называть эталонным импульсом k -го класса, k — номером класса, а q — длительностью импульса. Подпоследовательности $u_i(k), \dots, u_{q-1}(k)$ и $u_0(k), \dots, u_j(k)$ последовательности $u_0(k), \dots, u_{q-1}(k)$, а также соответствующие им наборы $(u_i(k), \dots, u_{q-1}(k))$ и $(u_0(k), \dots, u_j(k))$, у которых $0 < i \leq q-1$ и $0 \leq j < q-1$, будем называть неполными импульсами k -го класса.

Предположим, что случайный вектор $Y = (y_0, \dots, y_{N-1})$ есть сумма двух независимых векторов:

$$Y = X(k) + E, \quad k \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad (3)$$

где $E = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1})$ — гауссовский вектор, компоненты которого независимы, одинаково распределены и имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию $\sigma^2 < \infty$, а компоненты вектора $X(k) = (x_0(k), \dots, x_{N-1}(k))$ при каждом $k = \overline{1, K}$ образуют последовательность, составленную из M подпоследовательностей (импульсов) $U(k)$, такую, что

$$x_n(k) = \sum_{i=1}^M u_{n-n_i}(k), \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (n_1, \dots, n_M) \in \Omega, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega(N, T_{\min}, T_{\max}, q) = \{ & (n_1, \dots, n_M) : N \geq T_{\max} + q - 1; \\ & 1 - q \leq n_1 \leq T_{\max} - q; \quad N - T_{\max} \leq n_M \leq N - 1; \\ & 2q \leq T_{\min} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}, \quad i = \overline{2, M} \} - \end{aligned} \quad (5)$$

множество всевозможных наборов (n_1, \dots, n_M) , элементы которого полностью определяются совокупностью ограничений, заключенных в фигурные скобки формулы (5). Выпишем эти ограничения отдельно, чтобы пояснить смысл каждого:

$$T_{\min} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}, \quad i = \overline{2, M}, \quad (6)$$

$$1 - q \leq n_1 \leq T_{\max} - q, \quad N - T_{\max} \leq n_M \leq N - 1, \quad (7)$$

$$T_{\min} \geq 2q, \quad (8)$$

$$N \geq T_{\max} + q - 1. \quad (9)$$

Совокупность компонент y_n , $n = \overline{0, N-1}$, вектора Y будем рассматривать как участок случайного процесса или как анализируемый кадр сигнала ширины N , образованный последовательностью (4), которая искажена аддитивным некоррелированным гауссовским шумом в соответствии с формулой (3). При этом компоненты y_0 и y_{N-1} вектора Y , компоненты x_0 и x_{N-1} вектора X , а также компоненты ϵ_0 и ϵ_{N-1} вектора E соответствуют левой: $n = 0$ и правой: $n = N - 1$ границам кадра. Величины n_1, \dots, n_M будем интерпретировать как моменты времени начала M импульсов $U(k)$, охваченных анализируемым кадром.

Полным импульсом k -го класса в анализируемом кадре будем называть любую подпоследовательность последовательности $x_0(k), \dots, x_{N-1}(k)$ из совокупности

$$X_j^i(k) = \{x_i(k), \dots, x_j(k) : x_n(k) = u_{n-1}(k);$$

$$n = \overline{i, j}; j = i + q - 1; 0 \leq i \leq N - q\}, k = \overline{1, K}.$$

Неполным импульсом k -го класса в анализируемом кадре будем называть любую подпоследовательность последовательности $x_0(k), \dots, x_{N-1}(k)$ из совокупностей:

$$X_0^i(k) = \{x_0(k), \dots, x_i(k) : x_n(k) = u_{n-i+q-1}(k);$$

$$n = \overline{0, i}; 0 \leq i < q - 1\}, k = \overline{1, K},$$

$$X_j^{N-1}(k) = \{x_j(k), \dots, x_{N-1}(k) : x_n(k) = u_{n-j}(k);$$

$$n = \overline{j, N-1}; N - q < j \leq N - 1\}, k = \overline{1, K}.$$

Формула (6) — это условие квазипериодичности моментов времени n_1, \dots, n_M начала импульсов. В этой формуле натуральные числа T_{\min} и T_{\max} задают минимальный и максимальный интервалы между двумя последовательными импульсами. Неравенства (7) определяют предельные значения моментов времени

начала первого и последнего импульсов в анализируемом кадре. Из этих неравенств следует, что допустимыми являются ситуации, когда анализируемый кадр рассекает импульсы своими границами так, что первый и/или последний импульсы кадра будут неполными.

Неравенство (8) является ограничением на минимальный интервал между соседними импульсами. Ограничение (9) устаревает минимальную размерность векторов X , Y и E или наименьшую ширину кадра.

Задача распознавания состоит в том, чтобы по наблюдаемому кадру сигнала или вектору Y определить номер k того эталонного импульса или вектора $U(k)$, компоненты которого в виде M подпоследовательностей образуют последовательность (4) компонент ненаблюдаемого вектора $X(k)$. Параметры задачи N, T_{\min}, T_{\max} и σ^2 считаются известными, а набор $\{U(k), k = \overline{1, K}\}$ — заданным. Число M членов последовательности n_1, \dots, n_M и сами члены этой последовательности, составляющие квазипериодическую последовательность моментов времени начала импульсов, охваченных анализируемым кадром, предполагаются неизвестными.

Обозначим через $p_k, k = \overline{1, K}$, априорные вероятности импульсов и зададимся целью найти нижнюю границу вероятности ошибки распознавания для байесовского классификатора, минимизирующего вероятность ошибочных решений.

2. Нижняя граница вероятности ошибки распознавания

Поскольку набор (n_1, \dots, n_M) и его размерность M неизвестны, поставленная задача является задачей совместного распознавания квазипериодической последовательности импульсов и обнаружения (оценивания) моментов времени их начала. Ее можно интерпретировать как задачу групповой классификации несинхронизированных по времени данных.

ЛЕММА 1. Если условия (6)–(9) выполнены, то анализируемый кадр охватывает хотя бы один полный импульс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6)–(9) следует, что моменты времени начала импульсов удовлетворяют неравенствам: $1 - q \leq n_1 < n_2 < \dots < n_M \leq N - 1$. Требуется показать, что при $N \geq T_{\max} + q - 1$ среди M номеров импульсов найдется хотя бы

один такой номер $i \in \{1, \dots, M\}$, что момент времени n_i удовлетворяет двойному неравенству: $0 \leq n_i \leq N - q$.

Из первой формулы ограничений (7) видно, что точка $n_1 = T_{\max} - q$ является верхней границей для момента времени начала первого импульса. Поскольку из (9) следует: $N - q \geq T_{\max} - 1 \geq T_{\max} - q$, то при $n_1 \geq 0$ анализируемый кадр будет содержать полный импульс под номером $i = 1$. Если же $1 - q \leq n_1 \leq -1$, т.е. первый импульс неполный, то из (6) находим верхнюю и нижнюю границы для момента времени начала второго импульса (при условии, что первый импульс неполный), а именно: $T_{\min} - q + 1 \leq n_2 \leq T_{\max} - 1$. Комбинируя последние неравенства с (8) и (9), получим: $0 < q + 1 \leq n_2 \leq T_{\max} - 1 \leq N - q$, что означает наличие в кадре полного импульса с номером $i = 2$. Отсюда следует справедливость утверждения леммы. ■

Лемма 1 поясняет смысл введенного ранее ограничения (9).

Неизвестное число M импульсов в анализируемом кадре зависит от N, T_{\min}, T_{\max} и q и ограничено сверху и снизу, так как ширина кадра, длина импульса и интервал между импульсами — фиксированные, ограниченные величины, т.е.: $M_{\min} \leq M \leq M_{\max}$. Причем величина M_{\min} , очевидно, есть функция от T_{\max}, N и q , а M_{\max} — от T_{\min}, N и q .

Условимся обозначать через $\lfloor x \rfloor$ целую часть числа x .

ЛЕММА 2. Если условия (6)–(9) выполнены, то минимальное и максимальное число импульсов (включая неполные) на отрезке $[0, N - 1]$ задается формулами:

$$M_{\min} = \left\lfloor \frac{N + q - 1}{T_{\max}} \right\rfloor, \quad M_{\max} = \left\lfloor \frac{N + q - 2}{T_{\min}} \right\rfloor + 1. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6)–(9) моменты времени начала импульсов, охваченных анализируемым кадром ширины N , удовлетворяют ограничениям: $1 - q \leq n_1 < n_2 < \dots < n_M \leq N - 1$. Для того, чтобы суммарное число M полных и неполных импульсов на отрезке $[0, N - 1]$ было максимально, необходимо, чтобы интервал между всеми импульсами был минимален, а именно: $n_i - n_{i-1} = T_{\min}$, $i = \overline{2, M}$. Ясно, что при одинаковом интервале между всеми импульсами суммарное число M полных

и неполных импульсов в кадре — неубывающая функция от n_M . Поэтому при фиксированном интервале между всеми импульсами, равном T_{\min} , число импульсов на отрезке $[0, N-1]$ будет максимально, когда n_M максимально, т.е. когда $n_M = N-1$.

При фиксированном $n_M = N-1$ отрезок $[1-q, N-2]$ включает $N+q-2$ точек. На этом отрезке содержится $\frac{N+q-2}{T_{\min}}$ примыкающих друг к другу интервалов длины T_{\min} , если $N+q-2$ кратно T_{\min} . Если $N+q-2$ не кратно T_{\min} , то на этом же отрезке размещается $\left\lfloor \frac{N+q-2}{T_{\min}} \right\rfloor$ примыкающих друг к другу интервалов длины T_{\min} и один оставшийся интервал $[1-q, (N+q-2) \bmod T_{\min} - q]$, расположенный в начале отрезка $[1-q, N-2]$ и имеющий длину $(N+q-2) \bmod T_{\min} < T_{\min}$.

На каждом из интервалов длины T_{\min} имеется ровно один полный импульс, начало которого совпадает с левой границей интервала, так как $n_M = N-1$, $n_i - n_{i-1} = T_{\min}$, $i = \overline{2, M}$, и так как $q \leq \left\lfloor \frac{T_{\min}}{2} \right\rfloor < T_{\min}$, в соответствии с (8). По этим же причинам оставшийся интервал не содержит ни одного момента времени начала импульса. Следовательно, на отрезке $[1-q, N-2]$ имеется $\left\lfloor \frac{N+q-2}{T_{\min}} \right\rfloor$ моментов времени начала импульсов, а на отрезке $[1-q, N-1]$ — на единицу больше.

Из условий леммы следует, что в промежутке $[0, N-1]$ содержится столько же импульсов, сколько моментов времени начала импульсов имеется на отрезке $[1-q, N-1]$. Поэтому максимальное число M_{\max} полных и неполных импульсов в промежутке $[0, N-1]$ при любом $k = \overline{1, K}$ равно $\left\lfloor \frac{N+q-2}{T_{\min}} \right\rfloor + 1$.

С другой стороны, для того, чтобы суммарное число M полных и неполных импульсов на отрезке $[0, N-1]$ было минимально, необходимо, чтобы $n_i - n_{i-1} = T_{\max}$, $i = \overline{2, M}$. Как было отмечено выше, при одинаковом интервале между всеми импульсами суммарное число M полных и неполных импульсов в кадре — неубывающая функция от n_M . Следовательно, при фиксированном интервале между всеми импульсами, равном T_{\max} , число импульсов на отрезке $[0, N-1]$ будет минимально, когда n_M минимально, т.е. когда $n_M = N - T_{\max}$.

На отрезке $[1 - q, N - 1]$ размещается $\frac{N + q - 1}{T_{\max}}$ примыкающих друг к другу интервалов длины T_{\max} , если $N + q - 1$ кратно T_{\max} . Если $N + q - 1$ не кратно T_{\max} , то на этом отрезке содержится $\left] \frac{N + q - 1}{T_{\max}} \left[$ интервалов длины T_{\max} и один оставшийся интервал $[1 - q, (N + q - 1) \bmod T_{\max} - q]$, расположенный в начале отрезка $[1 - q, N - 1]$ и имеющий длину $(N + q - 1) \bmod T_{\max} < T_{\max}$.

Левая граница каждого из интервалов длины T_{\max} совпадает с моментом времени начала ровно одного импульса, так как $n_M = N - T_{\max}$, $n_i - n_{i-1} = T_{\max}$, $i = \overline{2, M}$, и так как $q \leq \left] \frac{T_{\min}}{2} \left[< T_{\max}$, в соответствии с (6) и (8). По этим же причинам в оставшемся интервале нет ни одного момента времени начала импульса. Следовательно, на отрезке $[1 - q, N - 1]$ имеется $\left] \frac{N + q - 1}{T_{\max}} \left[$ моментов времени начала импульсов.

В соответствии с условиями (6)–(9), промежутков $[0, N - 1]$ содержит столько же импульсов, сколько моментов времени начала импульсов имеется на отрезке $[1 - q, N - 1]$. Поэтому минимальное число M_{\min} полных и неполных импульсов в промежутке $[0, N - 1]$ при любом $k = \overline{1, K}$ равно $\left] \frac{N + q - 1}{T_{\max}} \left[\cdot \blacksquare$

ЛЕММА 3. Пусть условия (6)–(9) выполнены. Тогда минимальное и максимальное число полных импульсов в промежутке $[0, N - 1]$ задается формулами:

$$M_{\min}^* = \left\lceil \frac{N - q + 1}{T_{\max}} \right\rceil, \quad M_{\max}^* = \left\lceil \frac{N - q + T_{\min}}{T_{\min}} \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость леммы устанавливается аналогично доказательству леммы 2. Следует лишь учесть, что в отличие от моментов времени начала полных и неполных импульсов, удовлетворяющих ограничениям: $1 - q \leq n_1 < n_2 < \dots < n_M \leq N - 1$, моменты времени начала полных импульсов, охваченных анализируемым кадром, лежат в промежутке $[0, N - q]$ и удовлетворяют цепочке неравенств: $0 \leq n_1^* < n_2^* < \dots < n_M^* \leq N - q$.

Как и ранее, необходимыми условиями максимума и минимума числа M^* полных импульсов на отрезке $[0, N - 1]$ являются соответственно минимум и максимум интервала между всеми импульсами. При соблюдении указанных условий число полных импульсов на отрезке $[0, N - 1]$ не возрастает с ростом n_i^* и, следовательно, будет максимально, когда n_i^* минимально, т.е. когда $n_i^* = 0$. Отсюда и из ограничений (6), (8) следует, что

$$M_{\max}^* = \begin{cases} \left\lfloor \frac{N}{T_{\min}} \right\rfloor + 1, & \text{если } N \bmod T_{\min} \geq q, \\ \left\lfloor \frac{N}{T_{\min}} \right\rfloor, & \text{если } N \bmod T_{\min} < q. \end{cases}$$

Далее, если $N \bmod T_{\min} \geq q$, то

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{N}{T_{\min}} \right\rfloor + 1 &= \left\lfloor \frac{N - N \bmod T_{\min} + N \bmod T_{\min}}{T_{\min}} \right\rfloor + 1 = \\ &= \left\lfloor \frac{N - N \bmod T_{\min}}{T_{\min}} + \frac{N \bmod T_{\min}}{T_{\min}} \right\rfloor + 1 = \\ &= \left\lfloor \frac{N - N \bmod T_{\min}}{T_{\min}} + \frac{N \bmod T_{\min} - q}{T_{\min}} + \frac{T_{\min}}{T_{\min}} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{N - N \bmod T_{\min} + N \bmod T_{\min} - q + T_{\min}}{T_{\min}} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{N - q + T_{\min}}{T_{\min}} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Если же $N \bmod T_{\min} < q$, то аналогичным образом получим тот же результат:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{N}{T_{\min}} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{N - N \bmod T_{\min}}{T_{\min}} + \frac{N \bmod T_{\min}}{T_{\min}} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{N - N \bmod T_{\min}}{T_{\min}} + \frac{N \bmod T_{\min} - q + T_{\min}}{T_{\min}} \right\rfloor = \end{aligned}$$

$$= \left\lceil \frac{N - q + T_{\min}}{T_{\min}} \right\rceil,$$

определяющий M_{\max}^* .

С другой стороны, при максимальном интервале между всеми импульсами число полных импульсов на отрезке $[0, N - 1]$ не убывает с ростом n_M^* , и, следовательно, их число будет минимально, когда момент времени n_M^* начала последнего полного импульса минимален. В свою очередь, n_M^* минимален, когда последний импульс в анализируемом кадре неполный и момент времени его начала тоже минимален, т.е. когда $n_M = N - q + 1$. Поэтому для размещения полных импульсов остается интервал $[0, N - q]$, включающий $N - q + 1$ точек. Действуя далее также, как и при выводе формулы для M_{\min} при доказательстве леммы 2, получим:

$$M_{\min}^* = \left\lceil \frac{N - q + 1}{T_{\max}} \right\rceil. \blacksquare$$

ЛЕММА 4. Если $N \geq q > 0$, $T_{\min} > 0$ и $T_{\max} > 0$, то:

1) $M_{\max} = M_{\max}^*$ тогда и только тогда, когда $T_{\min} - (N - q) \bmod T_{\min} > 2(q - 1)$;

2) $M_{\min} = M_{\min}^*$ тогда и только тогда, когда $T_{\max} - (N - q + 1) \bmod T_{\max} > 2(q - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $N \geq q > 0$, $T_{\min} > 0$, то формулы для M_{\max}^* и M_{\min}^* можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} M_{\max}^* &= \left\lceil \frac{N - q + T_{\min}}{T_{\min}} \right\rceil = \\ &= \left\lceil \frac{N - q - (N - q) \bmod T_{\min} + (N - q) \bmod T_{\min} + T_{\min}}{T_{\min}} \right\rceil = \\ &= \frac{N - q - (N - q) \bmod T_{\min}}{T_{\min}} + \left\lceil \frac{(N - q) \bmod T_{\min} + T_{\min}}{T_{\min}} \right\rceil = \\ &= \frac{N - q - (N - q) \bmod T_{\min}}{T_{\min}} + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\max} &= \left\lfloor \frac{N+q-2}{T_{\min}} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{N-q+2q-2}{T_{\min}} \right\rfloor + 1 = \\
&= \left\lfloor \frac{N-q - (N-q) \bmod T_{\min} + (N-q) \bmod T_{\min} + 2q-2}{T_{\min}} \right\rfloor + 1 = \\
&= \frac{N-q - (N-q) \bmod T_{\min}}{T_{\min}} + \left\lfloor \frac{(N-q) \bmod T_{\min} + 2q-2}{T_{\min}} \right\rfloor + 1.
\end{aligned}$$

Сравнивая правые части полученных выражений, замечаем, что для равенства M_{\max} и M_{\max}^* необходимо и достаточно, чтобы $\left\lfloor \frac{(N-q) \bmod T_{\min} + 2q-2}{T_{\min}} \right\rfloor = 0$. Последнее равенство эквивалентно неравенству $|(N-q) \bmod T_{\min} + 2q-2| < T_{\min}$, которое при $N \geq q > 0$, $T_{\min} > 0$ равносильно сформулированному в лемме условию $T_{\min} - (N-q) \bmod T_{\min} > 2(q-1)$.

Необходимое и достаточное условие равенства $M_{\min} = M_{\min}^*$ получаем аналогичным образом после следующих преобразований:

$$\begin{aligned}
M_{\min}^* &= \left\lfloor \frac{N-q+1}{T_{\max}} \right\rfloor = \\
&= \left\lfloor \frac{N-q+1 - (N-q+1) \bmod T_{\max} + (N-q+1) \bmod T_{\max}}{T_{\max}} \right\rfloor = \\
&= \frac{N-q+1 - (N-q+1) \bmod T_{\max}}{T_{\max}} + \left\lfloor \frac{(N-q+1) \bmod T_{\max}}{T_{\max}} \right\rfloor, \\
M_{\min} &= \left\lfloor \frac{N+q-1}{T_{\max}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N-q+1+2q-2}{T_{\max}} \right\rfloor = \\
&= \frac{N-q+1 - (N-q+1) \bmod T_{\max}}{T_{\max}} + \\
&+ \left\lfloor \frac{(N-q+1) \bmod T_{\max} + 2q-2}{T_{\max}} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Обозначим через

$$\Theta(k) = \left\{ X(k) : x_n(k) = \sum_{i=1}^M u_{ni} - n_i(k), n = \overline{0, N-1}, \right. \\ \left. (n_1, \dots, n_M) \in \Omega \right\}, k = \overline{1, K}, \quad (11)$$

множество всевозможных векторов $X(k)$ размерности N , порождаемых эталонным импульсом k -го класса. Тогда задача совместного распознавания и обнаружения есть задача проверки гипотез

$$H(k) = \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X \in \Theta(k)\}, k = \overline{1, K}, \quad (12)$$

о среднем X гауссовского случайного вектора Y с известной диагональной ковариационной матрицей, а алгоритм распознавания — это измеримое отображение (решающее правило) $\delta : \mathcal{R}^N \rightarrow \{H(1), \dots, H(K)\}$ пространства \mathcal{R}^N значений случайного вектора Y на совокупность проверяемых гипотез (12). В формуле (12) через $\Phi_{X, \sigma^2 I}$ обозначено нормальное распределение с параметрами $(X, \sigma^2 I)$. При этом вероятность ошибки классификации

$$\alpha = \sum_{k=1}^K p_k \alpha(k), \quad (13)$$

где p_k — априорные вероятности предъявления выборок k -го класса или априорные вероятности гипотез, а $\alpha(k) = Pr\{\delta(Y) \neq H(k) | H(k)\}$, $k = \overline{1, K}$, — вероятность ошибки распознавания k -го класса.

При фиксированных N , T_{\min} , T_{\max} и q множество Ω , очевидно, содержит конечное число элементов (n_1, \dots, n_M) . Положим

$$W = \|\Omega\| \quad (14)$$

и пронумеруем все наборы из множества Ω , присвоив им номер w , так что

$$\Omega = \bigcup_{w=1}^W (n_1, \dots, n_M)_w. \quad (15)$$

Непосредственно из определения (11) вытекает следующее важное замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждому элементу (n_1, \dots, n_M) из множества Ω соответствует единственный элемент $X(k)$ из множества $\Theta(k)$, $k = \overline{1, K}$.

Поэтому из формул (14), (15) и сделанного замечания следует, что векторы $X(k) \in \Theta(k)$ можно также пронумеровать, присвоив им те же, что и для наборов $(n_1, \dots, n_M) \in \Omega$, номера:

$$X(k/w) = \left(x_0(k/w), x_1(k/w), \dots, x_{N-1}(k/w) \right), \quad w = \overline{1, \overline{W}};$$

$$\bigcup_{w=1}^W X(k/w) = \Theta(k); \quad k = \overline{1, K}. \quad (16)$$

Тогда в соответствии с (12) и (16) проверяемые гипотезы можно представить в виде:

$$H(k) = \left\{ Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X \in \bigcup_{w=1}^W X(k/w) \right\}, \quad k = \overline{1, K},$$

так что

$$H(k) = \bigcup_{w=1}^W H(k/w), \quad k = \overline{1, K}, \quad (17)$$

где

$$H(k/w) = \left\{ Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X = X(k/w) \right\}, \quad k = \overline{1, K}, \quad w = \overline{1, \overline{W}}. \quad (18)$$

Отсюда видно, что исходная задача совместного распознавания и обнаружения есть задача проверки простых гипотез о среднем гауссовского случайного вектора.

Задача распознавания образов при числе классов больше двух сводится к последовательному решению задач распознавания образов двух классов. К тому же из (13) следует, что вероятность ошибки оценивается снизу суммой двух любых членов, входящих в правую часть (13), т.е. для любой пары (k, l) классов такой, что $k \neq l$, $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ и $l \in \{1, 2, \dots, K\}$, справедливо неравенство: $\alpha \geq p_k \alpha(k) + p_l \alpha(l) \geq \min_{k \neq l} \{p_k \alpha(k) + p_l \alpha(l)\}$. Поэтому ограничимся анализом нижней границы вероятности ошибки

распознавания для случая двух классов и далее будем считать, что $K = 2$.

Обозначим через

$$\begin{aligned}\alpha(v/1) &= Pr\{\delta(Y) \neq H(1/v)/H(1/v)\} = \\ &= Pr\{\delta(Y) = H(2/w)/H(1/v)\}, \quad v = \overline{1, W},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(w/2) &= Pr\{\delta(Y) \neq H(2/w)/H(2/w)\} = \\ &= Pr\{\delta(Y) = H(1/v)/H(2/w)\}, \quad w = \overline{1, W},\end{aligned}$$

вероятности ошибок при проверке гипотез $H(1/v)$ и $H(2/w)$ соответственно, а через $\alpha_{vw} = p_1\alpha(v/1) + p_2\alpha(w/2)$, $v = \overline{1, W}$, $w = \overline{1, W}$, — вероятности ошибок при разделении гипотез $H(1/v)$ и $H(2/w)$ при условии, что априорные вероятности этих гипотез равны p_1 и p_2 соответственно.

ЛЕММА 5. Пусть $H(k) = \bigcup_{w=1}^W H(k/w)$, $H(k/w) = \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X = X(k/w)\}$, $w = \overline{1, W}$; $k = 1, 2$, — пара семейств гипотез о случайном векторе Y ; $\{p(w/k) : p(w/k) = Pr\{H(k/w)\}, w = \overline{1, W}; \sum_{w=1}^W p(w/k) = 1\}$, $k = 1, 2$, — априорные условные распределения на семействе гипотез $\{H(1/1), \dots, H(1/w), \dots, H(1/W)\}$ при $k = 1$ и на семействе гипотез $\{H(2/1), \dots, H(2/w), \dots, H(2/W)\}$ при $k = 2$, соответственно; $p_k = Pr\{H(k)\}$, $k = 1, 2$, — априорные вероятности семейства и $p_1 + p_2 = 1$. Тогда для любого критерия $\delta : \mathcal{R}^N \rightarrow \{H(1), H(2)\}$ вероятность ошибки удовлетворяет неравенству $\alpha \geq \min_{v, w} \alpha_{vw}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость леммы вытекает из следующей записи:

$$\alpha = \sum_{k=1}^2 p_k \alpha(k) = \sum_{k=1}^2 p_k Pr\{\delta(Y) \neq H(k)/H(k)\} =$$

$$\begin{aligned}
&= p_1 Pr \left\{ \delta(Y) = H(2) / H(1) \right\} + p_2 Pr \left\{ \delta(Y) = H(1) / H(2) \right\} = \\
&= p_1 Pr \left\{ \delta(Y) = \bigcup_{w=1}^W H(2/w) / \bigcup_{v=1}^W H(1/v) \right\} + \\
&+ p_2 Pr \left\{ \delta(Y) = \bigcup_{v=1}^W H(1/v) / \bigcup_{w=1}^W H(2/w) \right\} = \\
&= p_1 \sum_{v=1}^W p(v/1) Pr \left\{ \delta(Y) = \bigcup_{w=1}^W H(2/w) / H(1/v) \right\} + \\
&+ p_2 \sum_{w=1}^W p(w/2) Pr \left\{ \delta(Y) = \bigcup_{v=1}^W H(1/v) / H(2/w) \right\} = \\
&= p_1 \sum_{v=1}^W \sum_{w=1}^W p(v/1) p(w/2) Pr \left\{ \delta(Y) = H(2/w) / H(1/v) \right\} + \\
&+ p_2 \sum_{w=1}^W \sum_{v=1}^W p(w/2) p(v/1) Pr \left\{ \delta(Y) = H(1/v) / H(2/w) \right\} = \\
&= p_1 \sum_{v=1}^W \sum_{w=1}^W p(v/1) p(w/2) \alpha(v/1) + p_2 \sum_{w=1}^W \sum_{v=1}^W p(w/2) p(v/1) \alpha(w/2) = \\
&= \sum_{v=1}^W \sum_{w=1}^W p(v/1) p(w/2) \left(p_1 \alpha(v/1) + p_2 \alpha(w/2) \right) = \\
&= \sum_{v=1}^W \sum_{w=1}^W p(v/1) p(w/2) \alpha_{vw} \geq \min_{v,w} \alpha_{vw}. \blacksquare
\end{aligned}$$

В работе [2] получен результат, устанавливающий нижнюю границу вероятности ошибки при проверке двух гипотез о среднем случайного вектора. Для рассматриваемого в данной работе случая классификации гауссовских векторов с равными диагональными ковариационными матрицами этот результат можно сформулировать в виде следующей леммы.

ЛЕММА 6 [2]. Пусть $H(1) = \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X = X(1)\}$, $H(2) = \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X = X(2)\}$ — пара гипотез о векторе

Y ; p_1 и p_2 — априорные вероятности этих гипотез, $p_1 + p_2 = 1$. Тогда для байесовского критерия $\delta : \mathcal{R}^N \rightarrow \{H(1), H(2)\}$ вероятность α^* ошибки разделения этих гипотез удовлетворяет неравенству $\alpha^* \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ 1 - 4p_1p_2 \exp(-2\mu) \right\}^{\frac{1}{2}}$, где $\mu = \frac{1}{8\sigma^2} \|X(1) - X(2)\|^2$ — расстояние Влатачария.

ЛЕММА 7. Пусть компоненты векторов $X(1) \in \Theta(1)$ и $X(2) \in \Theta(2)$ образуют последовательности:

$$x_n(1) = \sum_{i=1}^{M(1)} u_n - n_i(1), \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (n_1, \dots, n_{M(1)}) \in \Omega, \quad (19)$$

$$x_n(2) = \sum_{j=1}^{M(2)} u_n - m_j(2), \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (m_1, \dots, m_{M(2)}) \in \Omega. \quad (20)$$

Тогда если условия (1) и (2) имеют место, то для любых $X(1) \in \Theta(1)$ и $X(2) \in \Theta(2)$

$$\|X(1) - X(2)\|^2 \leq M_{\max} [U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\min}], \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} U^2(1) &= \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(1), \quad U^2(2) = \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(2), \\ R_{\min} &= \min_{|l| \leq q} \sum_{n=0}^{q-|l|} u_n(1)u_{n+l}(2). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (1) следует, что для любого $n = \overline{0, N-1}$, при каждом $k = 1, 2 : 1) u_n - n_i(k)u_n - n_j(k) = 0$ при таких $i = \overline{1, M(k)}$ и $j = \overline{1, M(k)}$, для которых $|n_i - n_j| \geq q$. Поэтому из ограничений (6)–(8), входящих в определение множества Ω , заключаем, что $u_n - n_i(k)u_n - n_j(k) = 0$, если $i \neq j$ при $i = \overline{1, M(k)}$ и $j = \overline{1, M(k)}$; 2) $u_n - n_i(k) = 0$, если

$n \neq \overline{n_i, n_i + q - 1}$, при всех $i = \overline{1, M(k)}$. Так что, учитывая (19) и (20), получим:

$$\begin{aligned} \|X(k)\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2(k) = \sum_{i=1}^{M(k)} \sum_{j=1}^{M(k)} \sum_{n=0}^{N-1} u_{n-n_i}(k) u_{n-n_j}(k) = \\ &= \sum_{i=1}^{M(k)} \sum_{n=0}^{N-1} u_{n-n_i}^2(k) \leq \sum_{i=1}^{M(k)} \sum_{n=1-q}^{N+q-2} u_{n-n_i}^2(k) = \\ &= \sum_{i=1}^{M(k)} \sum_{n=n_i}^{n_i+q-1} u_{n-n_i}^2(k) = \\ &= M(k) U^2(k) \leq M_{\max} U^2(k), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (23)$$

где $U^2(k)$ задается формулой (22). Знак равенства в (23) имеет место при соблюдении достаточного условия: $M(k) = M_{\max} = M_{\max}^*$. Равенство $M_{\max} = M_{\max}^*$ является необходимым. Условие, при котором $M_{\max} = M_{\max}^*$, определено в лемме 4.

Рассмотрим функцию целочисленных аргументов

$$R(s, t) = \sum_{n=a}^{b+q-1} u_{n-s}(1) u_{n-t}(2), \quad s, t \in [a, b], \quad (24)$$

определенную в прямоугольнике $[a, b] \times [a, b]$. В силу формулы (1) эта функция обладает свойствами:

$$R(s, t) = \sum_{n=0}^{q-|s-t|} u_n(1) u_{n+s-t}(2) = R(s-t), \quad s, t \in [a, b], \quad (25)$$

$$R(s, t) = 0, \quad s, t \in [a, b], \quad |s-t| \geq q. \quad (26)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \min_{s,t} R(s, t) &= \min_{|s-t| \leq q} R(s-t) = \\ &= \min_{|l| \leq q} \sum_{n=0}^{q-|l|} u_n(1) u_{n+l}(2) = R_{\min} \leq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Легко заметить, что для любых наборов $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_{M(1)}) \in \Omega$ и $(m_1, \dots, m_j, \dots, m_{M(2)}) \in \Omega$ справедливо свойство: число пар (i, j) , $i = \overline{1, M(1)}$, $j = \overline{1, M(2)}$, таких что $|n_i - m_j| \leq q$, не превосходит M_{\max} .

Положим $a = 1 - q$, $b = N - 1$ в формулах (24)–(26) и, учитывая (23), (27) и только что отмеченное свойство, получим:

$$\begin{aligned}
 \|X(1) - X(2)\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{i=1}^{M(1)} u_{n-n_i}(1) - \sum_{j=1}^{M(2)} u_{n-m_j}(2) \right]^2 \leq \\
 &\leq \sum_{n=1-q}^{N+q-2} \left[\sum_{i=1}^{M(1)} u_{n-n_i}(1) - \sum_{j=1}^{M(2)} u_{n-m_j}(2) \right]^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^{M(1)} \sum_{j=1}^{M(2)} \sum_{n=1-q}^{N+q-2} u_{n-n_i}(1) u_{n-m_j}(2) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{M(2)} \sum_{j=1}^{M(2)} \sum_{n=1-q}^{N+q-2} u_{n-m_i}(2) u_{n-m_j}(2) - \\
 &- 2 \sum_{i=1}^{M(1)} \sum_{j=1}^{M(2)} \sum_{n=1-q}^{N+q-2} u_{n-n_i}(1) u_{n-m_j}(2) = \sum_{i=1}^{M(1)} \sum_{n=n_i}^{n_i+q-1} u_{n-n_i}^2(1) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{M(2)} \sum_{m=m_i}^{m_i+q-1} u_{n-m_i}^2(2) - 2 \sum_{i=1}^{M(1)} \sum_{j=1}^{M(2)} R(n_i, m_j) = \\
 &= M(1)U^2(1) + M(2)U^2(2) - 2 \sum_{\substack{(i,j) \\ |n_i - m_j| \leq q}} R(n_i, m_j) \leq \\
 &\leq M_{\max}U^2(1) + M_{\max}U^2(2) - 2 \sum_{(i,j)} \min_{|n_i - m_j| \leq q} R(n_i - m_j) \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M_{\max} U^2(1) + M_{\max} U^2(2) - 2M_{\max} \min_{|n_i - m_j| \leq q} R(n_i - m_j) = \\ &= M_{\max} [U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\min}]. \blacksquare \end{aligned} \quad (28)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $H(k) = \{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X \in \Theta(k)\}$, $k = 1, 2$, — пара гипотез о векторе Y , p_1 и p_2 — априорные вероятности этих гипотез, $p_1 + p_2 = 1$; $\Theta(k) = \{X(k) : x_n(k) = \sum_{i=1}^M u_n - n_i(k), n = \overline{0, N-1}, (n_1, \dots, n_M) \in \Omega\}$, $k = 1, 2$, и $\Omega = \{(n_1, \dots, n_M) : N \geq T_{\max} + q - 1; 1 - q \leq n_1 \leq T_{\max} - q; N - T_{\max} \leq n_M \leq N - 1; 2q \leq T_{\min} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}, i = \overline{2, M}\}$. Тогда если условия (1) и (2) имеют место, то для байесовского критерия $\delta : \mathcal{R}^N \rightarrow \{H(1), H(2)\}$ вероятность ошибки разделения этих гипотез удовлетворяет неравенству

$$\alpha \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ 1 - 4p_1 p_2 \exp \left[-\frac{1}{4\sigma^2} M_{\max} (U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\min}) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (29)$$

где M_{\max} , $U^2(1)$, $U^2(2)$ и R_{\min} задаются формулами (10) и (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя нумерацию (14), (15) наборов из множества Ω и замечание, гипотезы $H(k)$, $k = 1, 2$, можно представить в виде (17), (18), перенумеровав в соответствии с формулой (16) векторы из множеств $\Theta(1)$ и $\Theta(2)$. Поэтому, обозначив $\mu_{vw} = \frac{1}{8\sigma^2} \|X(1/v) - X(2/w)\|^2$, $v = \overline{1, \overline{W}}$, $w = \overline{1, \overline{W}}$, где $X(1/v)$ и $X(2/w)$ определяются формулой (16), из леммы 5, 6 и замечания имеем:

$$\alpha \geq \min_{v,w} \alpha_{vw} \geq \min_{v,w} \alpha_{vw}^* = \min_{v,w} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [1 - 4p_1 p_2 \exp(-2\mu_{vw})] \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[1 - 4p_1 p_2 \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} \max_{v,w} \| X(1/v) - X(2/w) \|^2 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[1 - 4p_1 p_2 \exp \left(-\frac{1}{4\sigma^2} \max_{\substack{X(1) \in \Theta(1) \\ X(2) \in \Theta(2)}} \| X(1) - X(2) \|^2 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, опираясь на леммы 3, 4 и 7, получаем окончательный результат (29). ■

3. Численное моделирование и анализ результатов

При фиксированных априорных вероятностях p_1 и p_2 правая часть (29), т.е. нижняя граница вероятности ошибки распознавания, зависит от $U^2(1)$, $U^2(2)$, R_{\min} , σ^2 и M_{\max} , причем величину M_{\max} определяют параметры N , T_{\min} и q в соответствии с формулой (10). Как видно из (29) и (10), изменение одного или одновременное изменение нескольких из перечисленных аргументов при фиксированных оставшихся, увеличивающее модуль члена под знаком экспоненты в правой части (29), приводит к уменьшению нижней границы и, наоборот, изменение аргументов, уменьшающее модуль этого члена, увеличивает нижнюю границу. Ясно, что подобным образом ведет себя и вероятность ошибки распознавания. Поэтому вероятность ошибки будет тем меньше, чем больше N , q , $U^2(1)$, $U^2(2)$, M_{\max} и, чем меньше T_{\min} , R_{\min} и σ^2 .

Хорошо известно, что при увеличении отношения «сигнал/помеха» (SNR-отношения), равного

$$\eta = \frac{\| X(1) \|^2 + \| X(2) \|^2}{2\sigma^2},$$

вероятность ошибки распознавания уменьшается. Указанная зависимость видна из формулы (29). Действительно, когда последовательности компонент векторов $X(1)$ и $X(2)$ образуют квазипериодические последовательности вида (19) и (20), максимальное отношение «сигнал/помеха» равно

$$\eta_{\max} = \frac{M_{\max} (U^2(1) + U^2(2))}{2\sigma^2}.$$

Этому значению отношения соответствует нижняя граница вероятности ошибки распознавания.

Величины $Q = \|X(1) - X(2)\|^2$ и $\mu = \frac{Q}{8\sigma^2}$ характеризуют близость в среднеквадратическом двух квазипериодических последовательностей. Чем больше Q и μ , тем меньше «похожи» последовательности, тем меньше шансов их перепутать. В самом деле, максимальным значениям $Q_{\max} = M_{\max}(U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\min})$ и $\mu_{\max} = \frac{Q_{\max}}{8\sigma^2}$ соответствует нижняя граница вероятности ошибки.

Все перечисленные зависимости были подтверждены в результате серии численных экспериментов по распознаванию квазипериодических последовательностей импульсов разнообразной формы при различных значениях аргументов, входящих в формулу для нижней границы вероятности ошибки. В каждой серии моделировалась байесовская процедура принятия решения о наблюдаемой последовательности, принадлежащей одному из двух равновероятных классов.

В случае $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ из (29) следует, что формула для нижней границы вероятности ошибки имеет вид:

$$\alpha^d = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{4\sigma^2} M_{\max}(U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\min}) \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

а верхняя граница вероятности ошибки в этом случае задается формулой [1]:

$$\alpha^u = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{8\sigma^2} M_{\min}^*(U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\max}) \right],$$

где R_{\max} — максимальное значение свертки (24).

На рис. 1, 2 в качестве примера приведены данные, полученные в двух сериях экспериментов. В первой серии моделировались разнополярные прямоугольные импульсы длительности $q = 20$ вида: $u_{1n}(1) = 60$, $u_{1n}(2) = -60$, $n = 0, \dots, 19$, а во второй — разнополярные ступенчатые импульсы (с той же длительностью и энергией) вида: $u_{2n}(1) \cong 83.33$, $u_{2n}(2) \cong -83.33$, $n = 0, \dots, 9$; $u_{2n}(1) = 16$, $u_{2n}(2) = -16$, $n = 10, \dots, 19$.

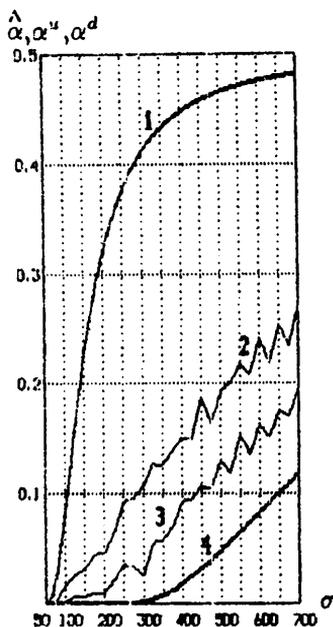


Рис. 1

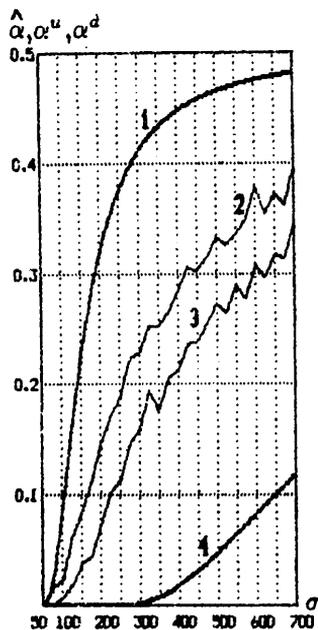


Рис. 2

Экспериментальная оценка вероятности ошибки получена по схеме селективной выборки. В условиях равных априорных вероятностей распознаваемых классов общее число V выборок (сгенерированных квазипериодических последовательностей, искаженных гауссовской помехой) в каждой из серий было разбито на 2 части — по $V/2$ выборок на класс. Подсчет оценки вероятности ошибочного распознавания проводился по формуле $\hat{\alpha} = (V_1 + V_2)/V$, где V_1 и V_2 — число неправильно опознанных выборок первого и второго классов соответственно. На контроль предъявлялось по $V = 1000$ выборок (500 на класс) при различных значениях дисперсии σ^2 помехи.

На рис.1 совмещены графики функций α^u (кривая № 1), α^d (кривая № 4) и экспериментальные кривые (№ 2, № 3) оценок $\hat{\alpha}$ вероятности ошибки распознавания последовательностей разнополярных прямоугольных импульсов (первая серия) в зависи-

мости от стандартного отклонения σ . Представленные результаты получены при $N = 200$, $T_{\min} = 40$ и двух значениях T_{\max} : $T_{\max} = 181$ (кривая № 2) и $T_{\max} = 135$ (кривая № 3). Каждая точка экспериментальной кривой при различных значениях дисперсии помехи получена по 1000 выборкам. Аналогичные данные (вторая серия) для разнополярных ступенчатых импульсов при тех же значениях параметров N , T_{\min} и T_{\max} приведены на рис. 2. Соответствие номеров кривых и функций такое же, как и на рис. 1. Рисунки иллюстрируют согласованность теоретических и экспериментальных данных.

З а к л ю ч е н и е

В работе найдена нижняя граница вероятности ошибки распознавания квазипериодической последовательности импульсов, искаженной некоррелированной гауссовской помехой с известной дисперсией, приведены результаты численного моделирования. Формула для нижней границы вероятности ошибки, связывающая параметры задачи в замкнутой форме, позволяет аналитически характеризовать возможные изменения вероятности ошибки при варьировании параметров. Данные численного моделирования хорошо согласуются как с теоретической оценкой нижней границы вероятности ошибки распознавания, полученной в данной работе, так и с оценкой ее верхней границы, представленной в [1].

Приведенные результаты логически завершают работу [1], в которой вместе с формулой для верхней границы вероятности ошибки изложен и обоснован байесовский вычислительный алгоритм распознавания зашумленных квазипериодических импульсных последовательностей. Представляется, что полученные результаты будут полезны при решении разнообразных прикладных задач групповой классификации несинхронизованных по времени данных.

Л и т е р а т у р а

1. КЕЛЬМАНОВ А.В., КУТНЕНКО О.А. Алгоритм распознавания квазипериодической последовательности импульсов и

обнаружения моментов их начала в гауссовском шуме // Искусственный интеллект и экспертные системы. — Новосибирск, 1966. — Вып. 157: Вычислительные системы. — С. 137-180.

2. KAPLATH T. The Divergence and Bhattacharyya Distance Measures in Signal Selection // IEEE Transactions on Communication Technology, 1967. — Vol.Com-15, № 1, February. — P. 52-60.

Поступила в редакцию
10 июля 1998 года