ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
(Вычислительные системы)
1998 год **Выпуск 165**

УДК 512.56

ОБ УСЛОВНО РАЦИОНАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ[1]

А.Г.Пинус

Понятие условного терма было введено в работе автора [1]. На основе этого понятия в работе [2] введено понятие условной рациональной эквивалентности универсальных алгебр и найдена система инвариантов для классов условно рационально эквивалентных конечных алгебр, состоящая для данной алгебры $\mathcal{A}$ из пары $<\mathrm{Sub}\mathcal{A}, \mathrm{Iso}\mathcal{A}>$, где $\mathrm{Sub}\mathcal{A}$ — решетка подалгебры $\mathcal{A}$, рассматриваемая как система подмножеств основного множества алгебры $\mathcal{A}$, и $\mathrm{Iso}\mathcal{A}$ — совокупность изоморфизмов между подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$, рассматриваемая как система отображений между подмножествами из $\mathrm{Sub}\mathcal{A}$. В настоящей работе рассмотрен ряд вопросов, связанных с понятием условной рациональной эквивалентности конечных универсальных алгебр. В п.1 приводится верхняя оценка числа классов условно рационально эквивалентных n-элементных алгебр и составлен каталог двух и трехэлементных универсальных алгебр, являющихся представителями классов условно рационально эквивалентных двух- и трехэлементных алгебр. В п.2 приведены необходимые и достаточные условия при которых конечная универсальная алгебра будет условно рационально эквивалентна некоторой решетки, дистрибутивной, модульной решетке.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований № 96-01-01675.

Напомним некоторые необходимые определения из работ [1] [2]. Под условием сигнатуры σ понимаем конечную систему (конъюнкцию) равенств и неравенств термов сигнатуры σ, т.е. условие $\mathcal{T}(\overline{x})$ — это система

$$\mathcal{T}(\overline{x}) = \begin{cases} t_1^1(\overline{x}) =^{i_1} t_2^1(\overline{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1^n(\overline{x}) =^{i_n} t_2^n(\overline{x}), \end{cases}$$

где $t_j^i(\overline{x})$ термы сигнатуры σ, $i_j \in \{0,1\}$ и $=^0$ — это $\neq$, $=^1$ — это $=$.

Под полной системой условий понимается конечная совокупность $\{\mathcal{T}_1(\overline{x}),\dots,\mathcal{T}_k(\overline{x})\}$ условий такая, что формулы $\mathcal{T}_i(\overline{x})$ & $\mathcal{T}_i(\overline{x})$ при $i \neq j$ несовместны, а формула $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i(\overline{x})$ общезначима.

Понятие условного терма сигнатуры σ определяется индукцией по сложности терма:

а) любая переменная есть условный терм,

б) если $t_1(\overline{x}),\dots,t_n(\overline{x})$ — условные термы сигнатуры σ и $f(x_1,\dots,x_n)$ — функция сигнатуры σ, то $f(t_1(\overline{x}),\dots,t_n(\overline{x})$ также условный терм сигнатуры σ,

в) если $\{\mathcal{T}_1(\overline{x}),\dots,\mathcal{T}_k(\overline{x})\}$ — полная система условий сигнатуры σ, $t_1(\overline{x}),\dots,t_k(\overline{x})$ условные термы сигнатуры σ, то

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{T}_1(\overline{x}) \longrightarrow t_1(\overline{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{T}_k(\overline{x}) \longrightarrow t_k(\overline{x}), \end{cases}$$

также условный терм этой сигнатуры,

г) любой условный терм сигнатуры σ получается с помощью конечного числа применений правил "а"-"в".

Если $\mathcal{A}$ алгебра сигнатуры σ и $t(\overline{x})$ — условный терм сигнатуры σ, то соответствующая условно термальная функция на $\mathcal{A}$ определяется стандартным образом в соответствии с индуктивными шагами "а"-"б" в определении условного терма. Для индуктивного же шага "в" считаем, что $t(\overline{a}) = b$, где $\overline{a}, b \in \mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда $t_i(a) = b$ в случае, если $\mathcal{A} \models \mathcal{T}_i(\overline{a})$. Совокупность всех условно термальных функций на алгебре $\mathcal{A}$ обозначаем далее как $\mathrm{CT}(\mathcal{A})$.

Обобщая понятие рациональной эквивалентности алгебр со случая термов на случай условных термов, в работе [2] сформулировано понятие условно рационально эквивалентных алгебр: алгебры $\mathcal{A}_1 =< A_1;\ \sigma_1 >$ и $\mathcal{A}_2 =< A_2; \sigma_2 >$ условно рационально эквивалентны, если существуют взаимно-однозначное отображение f множества A_1 на множество A_2 и отображения $\varphi_1 : \sigma_1 \to$ $\to \mathrm{CT}(\mathcal{A}_2)$, $\varphi_2 : \sigma_2 \to \mathrm{CT}(\mathcal{A}_1)$ сохраняющие местность такие, что f, f^{-1} являются изоморфизмами для следующих пар алгебр:

$$\mathcal{A}_1 \text{ и } < A_2;\ \varphi_1(\sigma_1) >,$$

$$\mathcal{A}_2 \text{ и } < A_1;\ \varphi_2(\sigma_2) >$$

соответственно, где сигнатурные функции сигнатуры σ_1, определены на множестве A_2 с помощью соответствующих условно термальных функций из $\varphi_1(\sigma_1)$ (аналогично определяется алгебра $< A_1;\ \varphi_2(\sigma_2) >$).

В работе [2] доказано, что если алгебры $\mathcal{A}_1 =< A_1; \sigma_1 >$ и $\mathcal{A}_2 =< A_2; \sigma_2 >$ конечны, то они условно рационально эквивалентны с помощью отображения $f\ :\ A_1 \to A_2$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{Sub}\mathcal{A}_1) = \mathrm{Sub}\mathcal{A}_2$ и $f(\mathrm{Iso}\mathcal{A}_1) = \mathrm{Iso}\mathcal{A}_2$ где $\mathrm{Sub}\mathcal{A}_i$ — совокупность подмножеств основного множества алгебры $\mathcal{A}_i$, являющихся основными множествами подалгебр алгебры $\mathcal{A}_i$, $\mathrm{Iso}\mathcal{A}_i$ совокупность отображений между подмножествами из $\mathrm{Sub}\mathcal{A}_i$, являющихся изоморфизмами соответствующих подалгебр.

В связи с этим результатом отметим, что хотя отношение условной рациональной эквивалентности грубее отношения рациональной эквивалентности, но обладает по сравнению с последним и рядом преимуществ. Одним из этих преимуществ является следующее: для любого натурального n число классов условно рационально эквивалентных n-элементных алгебр конечно в отличие от бесконечного числа классов рационально эквивалентных n-элементных алгебр. Тем самым, возникает возможность конечной классификации конечных n-элементных алгебр по отношению условной рациональной эквивалентности, а для малых значений n и возможность полного описания n-элементных алгебр — представителей всех классов n-элементных алгебр по отношению условной рациональной эквивалентности.

§ 1. Число n элементных попарно условно рационально не эквивалентных алгебр и каталоги двух– и трехэлементных подобных алгебр

В настоящем параграфе приведена оценка числа n–элементных алгебр, не являющихся условно рационально эквивалентными, и получено точное число таких алгебр при $n = 2, 3$, при этом указан полный список n–элементных универсальных алгебр представителей всех классов условно рациональной эквивалентности на двух– или трехэлементных алгебрах.

Пусть $s(n)$ — число n–элементных универсальных алгебр, не являющихся условно рационально эквивалентными. В силу результатов работы [2], для любого натурального n имеет место неравенство $s(n) \leq k(n)$, где $k(n)$ — число всевозможных пар $S \subseteq P(n)$, $H \subseteq \mathrm{Iso}(n)$ таких, что для некоторой универсальной алгебры $A =< n; \sigma >$, $S = \mathrm{Sub}A$, $H = \mathrm{Iso}A$. Здесь $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $P(n)$ — совокупность всех подмножеств множества n, $\mathrm{Iso}(n)$ — совокупность всех биекций между подмножествами множества n. Грубая верхняя оценка для числа $k(n)$ состоит в оценке всевозможных пар $< S, H >$ без требования существования алгебры A такой, что $S = \mathrm{Sub}A$, $H = \mathrm{Iso}A$ (условия, которым должны удовлетворять пары $< S, H >$, для которых существует подобная алгебра A, указаны в работе [2]), т.е. всевозможных пар $< S, H >$, где $S \subseteq P(n)$ и $H \subseteq \mathrm{Iso}(S)$, где $\mathrm{Iso}(S)$ совокупность всех возможных биекций между подмножествами из S.

Пусть $1 < k \leq n$, тогда число k–элементных подмножеств множества n равно C_n^k, число всевозможных совокупностей биекций между двумя k–элементными множествами равно $2^{k!}$. Таким образом, число всевозможных выборов некоторой совокупности k–элементных подмножеств множества n и некоторых совокупностей биекций между этими подмножествами равно $(2^{k!})^{(C_n^k)^2} = 2^{k! \cdot (C_n^k)^2} = 2^{\frac{(n!)^2}{k!((n-k)!)^2}}$. При $k = 1$, с учетом того, что все одноэлементные подалгебры изоморфны между собой, получаем, что число возможных выборов совокупности одноэлементных подалгебр и изоморфизмов между этими подалгебрами совпадает с числом выборов совокупности одноэлементных подмножеств множества n. Тем самым,

$$k(n) \le 2^n \cdot \prod_{k=2}^{n} 2^{\frac{(n!)^2}{k!((n-k)!)^2}} = 2^{n + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(n!)^2}{k!((n-k)!)^2}}$$

и

$$s(n) \le 2^{n + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(n!)^2}{k!((n-k)!)^2}}.$$

Для нахождения максимального значения числа $r(k) = \frac{1}{k!((n-k)!)^2}$ при $2 \le k \le n$ решим неравенство

$$\frac{r(k)}{r(k+1)} = \frac{k-1}{(n-k)^2} \le 1.$$

Таким образом, при $2 \le k \le n$, $r(k) \le r(k+1)$ тогда и только тогда, когда $k \le n + 1/2 - \sqrt{n + 5/4}$. С учетом целочисленности k получаем, что при $2 \le k \le n$ максимальное значение числа $r(k)$ принимается при $k = n - [\sqrt{n}]$.

Таким образом,

$$\sum_{k=2}^{n} r(k) \le (n-1)\frac{1}{(n-[\sqrt{n}])!([\sqrt{n}]!)^2}$$

и, значит, $k(n) \le 2^{n + \frac{(n!)^2(n-1)}{(n-[\sqrt{n}])!([\sqrt{n}]!)^2}}$.

В силу известных оценок факториала связанных с формулой Стирлинга $\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n} \le n! \le \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{1/12n}$, имеем неравенство:

$$k(n) \le 2^{n + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}} = 2^{n + \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{K}}} = 2^{n + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}}} \le 2^{n + \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{R}}},$$

где

$\mathcal{C} = 2\pi n \cdot n^{2n} \cdot (n-1) \cdot e^{1/6n} \cdot e^{n-[\sqrt{n}]} \cdot e^{2[\sqrt{n}]}$;

$\mathcal{D} = e^{2n} \cdot \sqrt{2\pi(n-[\sqrt{n}]} \cdot (n-[\sqrt{n}])^{n-[\sqrt{n}]} \cdot 2\pi([\sqrt{n}])^{2[\sqrt{n}]+1}$;

$$\mathcal{E} = n^{2n+1} \cdot (n-1);$$

$$\mathcal{K} = e^{n-[\sqrt{n}]-1/6n} \cdot \sqrt{2\pi}(n-[\sqrt{n}])^{n-[\sqrt{n}]+1/2}([\sqrt{n}])^{2[n]+1};$$

$$\mathcal{M} = n^{n+[\sqrt{n}]+1/2} \cdot (n-1)\left(\left(1-\frac{[\sqrt{n}]}{n}\right)^{-\frac{n}{[\sqrt{n}]}}\right)^{[\sqrt{n}]-\frac{[\sqrt{n}]^2}{n}+\frac{[\sqrt{n}]}{2n}};$$

$$\mathcal{N} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{n-[\sqrt{n}]-1/6n} \cdot ([\sqrt{n}])^{2[\sqrt{n}]+1};$$

$$\mathcal{P} = n^{n+[\sqrt{n}]+1/2} \cdot (n-1) \cdot e^{[\sqrt{n}]-\frac{[\sqrt{n}]^2}{n}+\frac{[\sqrt{n}]}{2n}};$$

$$\mathcal{R} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{n-[\sqrt{n}]-1/6n} \cdot [\sqrt{n}]^{2[\sqrt{n}]+1}.$$

В силу неравенства $\frac{n}{e} < [\sqrt{n}]^2$, последнее неравенство влечет следующее:

$$k(n) \le 2^{n+\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{V}}} = 2^{n+\frac{\mathcal{W}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{n-[\sqrt{n}]+1/2}},$$

где

$$\mathcal{S} = n^{n+[\sqrt{n}]+1/2} \cdot (n-1) \cdot e^{3[\sqrt{n}]-\frac{[\sqrt{n}]^2}{n}+\frac{[\sqrt{n}]}{2n}+1};$$

$$\mathcal{V} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{n-[\sqrt{n}]-1/6n};$$

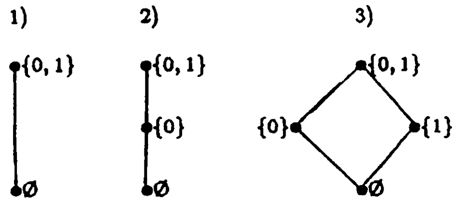
$$\mathcal{W} = e^{3[\sqrt{n}]} \cdot e^{(3/2)\cdot n+(1/2)\cdot[\sqrt{n}]+(1/6)-[\sqrt{n}]^2}.$$

При $n \ge 4$ можно, еще раз огрубляя оценку, упростить её: $s(n) \le 2^{n+\left(\frac{n}{e}\right)^{n-[\sqrt{n}]+1/2} \cdot e^{3([\sqrt{n}]+1/2)}}$.

Тем самым имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Число классов условно рациональной эквивалентности n-элементных универсальных алгебр не превышает при $n \ge 4$ числа $2^{n+\left(\frac{n}{e}\right)^{n-[\sqrt{n}+1/2} \cdot e^{3([\sqrt{n}]+1/2)}}$.*

Пусть теперь $n = 2$. Тогда, если $\mathcal{A}$ двухэлементная универсальная алгебра, можно считать, что $\mathcal{A}$ определена на множестве $\{0,1\}$. В этом случае решетки подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ имеют (с точностью перестановок на $\{0,1\}$) один из следующих видов:



Для варианта 1 возможны следующие подварианты, связанные с внутренними изоморфизмами алгебры $\mathcal{A}$ (изоморфизмами подалгебр алгебры $\mathcal{A}$):

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\{0,1\}}\}$,

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\{0,1\}}, (0,1)\}$.

Для варианта 2 имеется единственная возможность: $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\{0,1\}}, \mathrm{id}_{\{0\}}\}$.

Для варианта 3 — опять две возможности:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\{0,1\}},\ 0 \leftrightarrow 1,\ \mathrm{id}_{\{0\}},\ \mathrm{id}_{\{1\}}\}$,

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\{0,1\}},\ 0 \leftrightarrow 1,\ \mathrm{id}_{\{0\}}, \mathrm{id}_{\{1\}},\ (0,1)\}$.

Здесь и выше id_C — тождественное отображение на множестве C, $(0,1)$ автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$, образованной перестановкой (0,1) а через $0 \leftrightarrow 1$ обозначен изоморфизм подалгебры $\{0\}$ на подалгебру $\{1\}$ и обратный к нему.

Нетрудно проверить, что следующие пять двухэлементных алгебр $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_5$ имеют в качестве своих инвариантов $< \mathrm{Sub}\mathcal{B}_i, \mathrm{Iso}\mathcal{B}_i >$ как раз указанные выше пары 1,а, 1,б, 2, 3,а, 3,б соответственно:

$\mathcal{B}_1 =< \{0,1\}; +, \neg >$,

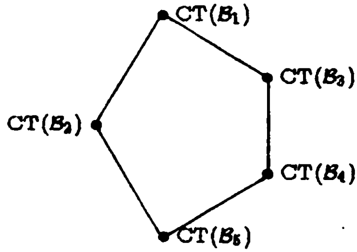
$\mathcal{B}_2 =< \{0,1\}; \neg >$,

$\mathcal{B}_3 =< \{0,1\}; + >$,

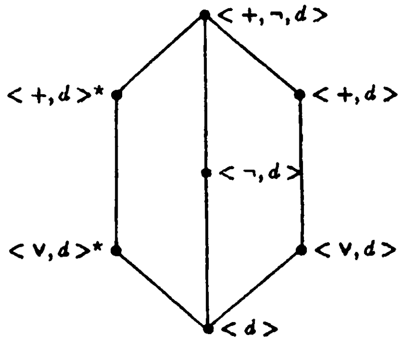
$\mathcal{B}_4 =< \{0,1\}; \vee >$,

$\mathcal{B}_5 =< \{0,1\}; \emptyset >$.

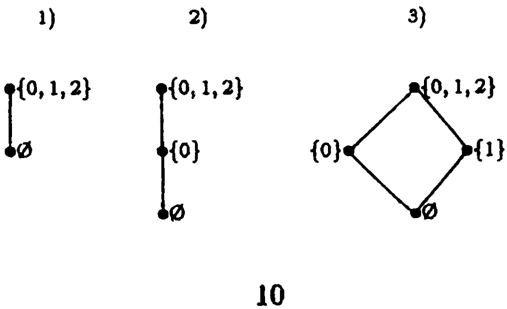
Очевидно, что имеет место следующая диаграмма (по отношению включения) для классов функций $\mathrm{CT}(\mathcal{B}_i)$:



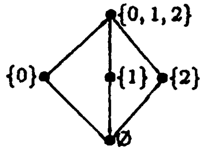
Данная решетка позволяет, с учетом самодвойственности, изобразить решетку дискриминаторных клонов (клонов, содержащих дискриминаторную функцию) на множестве $\{0,1\}$. На следующей диаграмме через $\mathcal{F}^*$ обозначен клон двойственный клону $\mathcal{F}$, через $< f_1, \ldots, f_n >$ — замыкание системы функций $\{f_1, \ldots, f_n\}$ с добавленными к ним проекциями, относительно операторов суперпозиций, а через d — дискриминаторная функция:



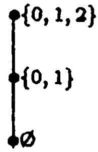
Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Будем считать, что соответствующие алгебры определены на множестве $\{0,1,2\}$. В этом случае решетки подалгебры алгебры A имеют (с точностью до перестановок на $\{0,1,2\}$) один из следующих видов:



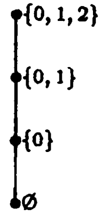
4)


{0, 1, 2}
{0}
{1}
{2}
Ø

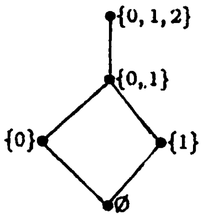
5)


{0, 1, 2}
{0, 1}
Ø

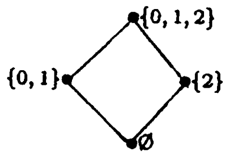
6)


{0, 1, 2}
{0, 1}
{0}
Ø

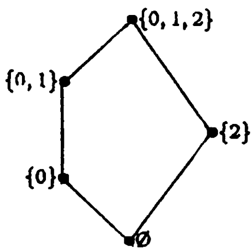
7)


{0, 1, 2}
{0, 1}
{0}
{1}
Ø

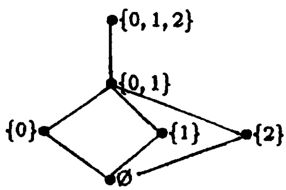
8)


{0, 1, 2}
{0, 1}
{2}
Ø

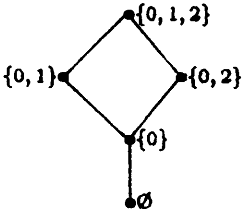
9)


{0, 1, 2}
{0, 1}
{2}
{0}
Ø

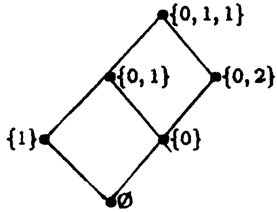
10)


{0, 1, 2}
{0, 1}
{0}
{1}
{2}
Ø

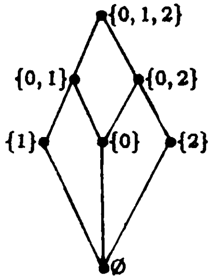
11)



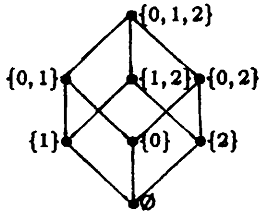
12)



13)



14)



Отметим теперь для каждого из перечисленных вариантов решеток Sub$\mathcal{A}$ априори возможные ситуации с совокупностями Iso$\mathcal{A}$ внутренних изоморфизмов алгебры.

Для варианта 1 возможны следующие подварианты, соответствующие тому, что Iso$\mathcal{A}$ (с точностью до перестановок на множестве $3 = \{0, 1, 2\}$) суть:

а) Iso$\mathcal{A}$ = Aut$\mathcal{A}$ = $\{e\}$ — тождественная перестановка на $\{0, 1, 2\}$;

б) Iso$\mathcal{A}$ = Aut$\mathcal{A}$ = $\{e, (0, 1)\}$;

в) Iso$\mathcal{A}$ = Aut$\mathcal{A}$ = $\{e, (0, 1, 2),\ (0, 2, 1)\}$;

г) Iso$\mathcal{A}$ = Aut$\mathcal{A}$ = S_3 — симметричная группа на $\{0, 1, 2\}$.

Для варианта 2 возможны следующие подварианты, соответствующие тому, что Iso$\mathcal{A}$ (с точностью до перестановок на $\{0, 1, 2\}$) суть:

а) Iso$\mathcal{A}$ = Aut$\mathcal{A}$ = $\{e\}$,

б) Iso$\mathcal{A}$ = Aut$\mathcal{A}$ = $\{e, (1, 2)\}$.

Для варианта 3 возможны следующие подварианты:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, 0 \leftrightarrow 1\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (0,1), 0 \leftrightarrow 1\}$.

Здесь $0 \leftrightarrow 1$ изоморфизм подалгебры $\{0\}$ на подалгебру $\{1\}$ и обратный к нему.

Для варианта 4 возможны следующие подварианты:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (0,1), 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

в) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (0,1,2), (0,2,1), 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

г) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = S_3 \cup \{0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

Для варианта 5 возможны следующие подварианты:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \mathrm{Aut}\mathcal{A} = \{e\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \mathrm{Aut}\mathcal{A} = \{e, (0,1)\}$;

в) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, {}^{0\leftrightarrow 1}_{1\leftrightarrow 0}\}$.

Здесь ${}^{0\leftrightarrow 1}_{1\leftrightarrow 0}$ автоморфизм φ подалгебры $\{0,1\}$ алгебры $\mathcal{A}$ такой, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$ и обратный к φ.

Для варианта 6 возможен лишь один подвариант:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \mathrm{Aut}\mathcal{A} = \{e\}$.

Для варианта 7 возможны три подварианта:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, 0 \leftrightarrow 1\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (0,1), 0 \leftrightarrow 1\}$;

в) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, {}^{0\leftrightarrow 1}_{1\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1\}$.

Для варианта 8 также возможны три подварианта:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \mathrm{Aut}\mathcal{A} = \{e\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \mathrm{Aut}\mathcal{A} = \{e, (0,1)\}$;

в) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, {}^{0\leftrightarrow 1}_{1\leftrightarrow 0}\}$.

Для варианта 9 возможен лишь один подвариант:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, 0 \leftrightarrow 2\}$.

Для варианта 10 возможны три подварианта:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, {}^{0\leftrightarrow 1}_{1\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

в) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (0,1), {}^{0\leftrightarrow 1}_{1\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$.

Для варианта 11 возможны следующие подварианты:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \mathrm{Aut}\mathcal{A} = \{e\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, {}^{0\leftrightarrow 0}_{1\leftrightarrow 2}\}$

(здесь ${}^{0\leftrightarrow 0}_{1\leftrightarrow 2}$ изоморфизм φ подалгебры $\{0,1\}$ на подалгебру $\{0,2\}$ такой, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 2$ и обратный к этому изоморфизму);

в) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (1,2), \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}\}$.

Для варианта 12 возможны лишь следующие подварианты:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, 0 \leftrightarrow 1\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1\}$.

Для варианта 13 возможны следующие подварианты:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

в) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 1\}$;

г) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (1,2), \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

д) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

е) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

ж) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 0\\0\leftrightarrow 2}, \substack{1\leftrightarrow 2\\0\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 2\}$;

з) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (1,2), \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{1\leftrightarrow 0\\0\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 0\\0\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 2\}$.

Для варианта 14 возможны подварианты:

а) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

б) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

в) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

г) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

д) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

е) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

ж) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

з) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

и) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

к) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 1\\2\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

л) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 1\\2\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

м) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{c, (1,2), \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

н) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (1,2), \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1,\ 0 \leftrightarrow 2,\ 1 \leftrightarrow 2\}$;

о) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (1,2), \substack{0\leftrightarrow 0\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 1\\2\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

п) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (0,1,2), (0,2,1), \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{2\leftrightarrow 0\\0\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

р) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, (0,1,2), (0,2,1), \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 1\\2\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

с) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = S_3 \cup \{\substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 1\\2\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 2}, \substack{0\leftrightarrow 2\\1\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 1}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$;

т) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 2\}$;

у) $\mathrm{Iso}\mathcal{A} = \{e, \substack{1\leftrightarrow 2\\2\leftrightarrow 0}, \substack{0\leftrightarrow 1\\1\leftrightarrow 0}, 0 \leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 2\}$.

Непосредственно проверяется, что инварианты $< \mathrm{Sub}\mathcal{A}, \mathrm{Iso}\mathcal{A} >$ классов условно рационально эквивалентных трехэлементных алгебр $\mathcal{A}$, перечисленные выше в подвариантах 1,а -14,у, имеют соответственно следующие алгебры $\mathcal{A}$ (всюду далее под сложением и умножением понимаем сложение и умножение по модулю три).

1,а) $\mathcal{A}_1 = < 3;\ x+1,\ x+y >$.

1,б) Этот подвариант невозможен. К примеру, если $\mathcal{A}$ соответствует этому подварианту и если $\varphi = (0,1) \in \mathrm{Aut}\mathcal{A}$, то, так как $\{2\} \notin \mathrm{Sub}\mathcal{A}$, найдется функция $f(\overline{x})$ сигнатуры σ алгебры $\mathcal{A}$ такая, что $f(\overline{2}) = 0$ или $f(\overline{2}) = 1$. Допустим первое: $f(\overline{2}) = 0$, но тогда $0 = f(\overline{2}) = f(\varphi(\overline{2})) = \varphi(f(\overline{2})) = \varphi(0) = 1$. Полученное противоречие и аналогичное рассмотрение случая, когда $f(\overline{2}) = 1$, и доказывает невозможность данного подслучая.

1,в) $\mathcal{A}_2 = < 3;\ x+1 >$.

1,г) Этот подвариант невозможен по той же причине, по которой невозможен подвариант 1,б.

2,а) $\mathcal{A}_3 = < 3;\ x+y,\ x \cdot y >$.

2,б) $\mathcal{A}_4 = < 3;\ x+y >$.

3,а) $\mathcal{A}_5 = < 3;\ x \times y >$, где функция $x \times y$ задается табл.1.

3,б) Этот подвариант невозможен по той же причине, по которой невозможен подвариант 1,б.

4,а) $\mathcal{A}_6 = < 3;\ x \circ y >$, где функция $x \circ y$ задается табл.2.

4,б) $\mathcal{A}_7 = < 3;\ x * y >$, где функция $x * y$ задается табл.3.

Таблица 1

y \ x	0	1	2
0	0	2	2
1	2	1	2
2	1	2	0

Таблица 2

y \ x	0	1	2
0	0	1	1
1	2	1	0
2	1	0	2

Таблица 3

y \ x	0	1	2
0	0	2	1
1	2	1	0
2	0	1	2

Таблица 4

y \ x	0	1	2
0	0	2	0
1	1	1	0
2	1	2	2

4,в) $\mathcal{A}_8 = < 3;\ x \div y >$, функция $x \div y$ задается табл.4.

4,г) $\mathcal{A}_9 = < 3;\ x|y >$, где функция $x|y$ задается табл.5.

5,а) $\mathcal{A}_{10} = < 3; f(x) >$, где f — одноместная функция такая, что $f(1) = f(2) = 0$ и $f(0) = 1$.

5,б) Этот подвариант невозможен в силу того, что $\{2\} \notin \mathrm{Sub}\mathcal{A}$ и значит найдется функция $f(\overline{x})$ сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$ такая, что $f(\overline{2}) \in \{0,1\}$, но в этом случае $(0,1) \notin \mathrm{Aut}\mathcal{A}$.

5,в) $\mathcal{A}_{11} = < 3; \overset{\frown}{xy} >$, где функция $\overset{\frown}{xy}$ определяется табл.6.

6,а) $\mathcal{A}_{12} = < 3; x \oplus y >$, где функция $x \oplus y$ определяется табл.7.

7,а) $\mathcal{A}_{13} =< 3; x \odot y >$, где функция $x \odot y$ определяется табл.8.

7,б) Этот подвариант невозможен по той же причине, по которой невозможен подвариант 5,б.

7,в) $\mathcal{A}_{14} = < 3; \underset{\smile}{xy} >$, где функция $\underset{\smile}{xy}$ определяется табл.9.

8,а) $\mathcal{A}_{15} = < 3; f_1(x), f_2(x) >$, где $f_1(0) = 1,\ f_1(1) = 0, f_1(2) = 2$ и $f_2(0) = f_2(1) = 0,\ f_2(2) = 2$.

8,б) $\mathcal{A}_{16} = < 3;\ f_1(x) >$, где функция f_1 из сигнатуры алгебры $\mathcal{A}_{15}$.

Таблица 5

y \ x	0	1	2
0	0	2	1
1	2	1	0
2	1	0	2

Таблица 6

y \ x	0	1	2
0	1	1	2
1	0	0	0
2	1	1	0

Таблица 7

y \ x	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	0
2	2	0	1

Таблица 8

y \ x	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	0
2	2	0	1

Таблица 9

y \ x	0	1	2
0	1	1	2
1	0	0	0
2	1	1	2

Таблица 10

y \ x	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	0
2	1	1	0

Таблица 11

y \ x	0	1	2
0	0	1	1
1	1	0	0
2	1	0	2

Таблица 12

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	1	2

8,в) $\mathcal{A}_{17} = < 3;\ \widehat{xy} >$, где функция $\widehat{xy}$ определяется табл.10.

9,а) $\mathcal{A}_{18} = < 3;\ x \oslash y >$, где $x \oslash y$ определяется табл.11.

10,а) $\mathcal{A}_{19} =< 3;\ x \backslash y >$, где функция $x \backslash y$ определяется табл.12.

10,б) $\mathcal{A}_{20} = < 3; x/y, >$ где функция x/y определяется табл.13.

10,в) $\mathcal{A}_{21} = < 3; x \dagger y >$, где функция $x \dagger y$ определяется табл.14.

Таблица 13

y \ x	0	1	2
0	0	1	0
1	0	1	0
2	1	1	2

Таблица 14

y \ x	0	1	2
0	0	1	1
1	0	1	0
2	1	0	2

Таблица 15

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	1	0

Таблица 16

y \ x	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	0

Таблица 17

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	2
2	0	1	0

Таблица 18

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	0

Таблица 19

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	1	1	0
2	2	0	0

Таблица 20

y \ x	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	0
2	2	1	2

11,а) $\mathcal{A}_{22} = < 3; x \upharpoonright y >$, где функция $x \upharpoonright y$ определяется табл.15.

11,б) $\mathcal{A}_{23} = < 3; x \downarrow y >$, где функция $x \downarrow y$ определяется табл.16.

11,в) $\mathcal{A}_{24} = < 3; x \upharpoonleft y >$, где функция $x \upharpoonleft y$ определяется табл.17.

12,а) $\mathcal{A}_{25} = < 3; x \downharpoonleft y >$, где функция $x \downharpoonleft y$ определяется табл.18.

12,б) $\mathcal{A}_{26} = < 3; x \underset{\vee}{\ } y >$, где функция $x \underset{\vee}{\ } y$ определяется табл.19.

13,а) $\mathcal{A}_{27} = < 3; x \vdots\, y >$, где функция $x \vdots\, y$ определяется табл.20.

Таблица 21

$y \backslash x$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	0
2	2	1	2

Таблица 22

$y \backslash x$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	1	2

Таблица 23

$y \backslash x$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	1	2

Таблица 24

$y \backslash x$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	0
2	2	1	2

Таблица 25

$y \backslash x$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	1	1
2	0	0	2

Таблица 26

$y \backslash x$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	0	2

13,б) $\mathcal{A}_{28} = < 3; x|\, y >$, где функция $x|\, y$ определяется табл.21.

13,в) $\mathcal{A}_{29} = < 3;\ x \rightharpoonup y >$, где функция $x \rightharpoonup y$ определяется табл.22.

13,г) $\mathcal{A}_{30} = < 3;\ x < y >$, где функция $x < y$ определяется табл.23.

13,д) $\mathcal{A}_{31} = < 3; u(x, y) >$, где функция $u(x, y)$ определяется табл.24.

13,е) $\mathcal{A}_{32} = < 3; v(x, y) >$, где функция $v(x, y)$ определяется табл.25.

13,ж) $\mathcal{A}_{33} = < 3; w(x, y) >$, где функция $w(x, y)$ определяется табл.26.

13,з) $\mathcal{A}_{34} = < 3; p(x,y) >$, где функция $p(x,y)$ определяется табл.27.

Таблица 27

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	0
2	2	0	2

14,а) $\mathcal{A}_{35} = < 3; f_1, f_2, f_3 >$, где двухместные функции f_1, f_2, f_3 определяются табл.28–30.

Таблица 28

f_1

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	1
2	2	1	2

Таблица 29

f_2

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	2	2

Таблица 30

f_3

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	1	2

14,б) $\mathcal{A}_{36} = < 3; g_1, g_2 >$, где двухместные функции g_1, g_2 определяются табл.31–32.

Таблица 31

g_1

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	2	2

Таблица 32

g_2

y \ x	0	1	2
0	0	1	0
1	0	1	1
2	0	1	2

14,в) $\mathcal{A}_{37} = < 3; h_1, h_2 >$, где двухместные функции h_1, h_2 определяются табл.33–34.

Таблица 33

h_1

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	2	2

Таблица 34

h_2

y \ x	0	1	2
0	0	1	0
1	0	1	1
2	0	2	2

14,г) $A_{38} = < 3; \varphi_1, \varphi_2 >$, где двухместные функции φ_1, φ_2 определяются табл.35–36.

Таблица 35

φ_1

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	1	1	1
2	0	2	2

Таблица 36

φ_2

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	1	1	2
2	0	1	2

14,д) $A_{39} = < 3; \psi_1, \psi_2 >$, где двухместные функции ψ_1, ψ_2 определяются табл.37–38.

Таблица 37

ψ_1

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	2	2

Таблица 38

ψ_2

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

14,е) $A_{40} = < 3; \psi_1, \eta >$, где двухместная функция ψ_1 определяется так же, как в сигнатуре алгебры A_{39}, а трехместная функция η определяется следующими условиями: $\eta(0,1,2) = 0$, во всех остальных случаях, когда x, y, z попарно различны, $\eta(x,y,z) = 1$, для случаев же когда $|\{x,y,z\}| \le 2$, пусть $\eta(x,y,z) = u$, где u — равно кратному значению аргументов функции η.

14,ж) $A_{41} = < 3; \mu >$, где двухместная функция μ определена табл.39.

14,з) $A_{42} = < 3; \Theta, \eta >$, где двухместная функция Θ определена табл.40, а трехместная функция η определена так же, как функция в сигнатуре алгебры A_{40}.

14,и) $A_{43} = < 3; \alpha, \eta >$, где двухместная функция α определена табл. 41, а трехместная функция η определена так же, как функция η в сигнатуре алгебр A_{40} и A_{42}.

Таблица 39

y \ x	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	1
2	0	1	2

Таблица 40

y \ x	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	1
2	0	2	2

Таблица 41

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	1
2	2	1	2

Таблица 42

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

14,к) $A_{44} = < 3; \beta >$, где двухместная функция β определена табл.42.

14,л) $A_{45} = < 3; \eta >$, где трехместная функция η определена так же, как функция η в сигнатуре алгебр A_{40}, A_{42}, A_{43}.

14,м) $A_{46} = < 3; \psi_1 >$, где двухместная функция ψ_1 определена так же, как функция ψ_1 в сигнатуре алгебр A_{39}, A_{40}.

14,н) $A_{47} = < 3; \Theta >$, где двухместная функция Θ определена так же, как функция Θ в сигнатуре алгебры A_{42}.

14,о) $A_{48} = < 3; \gamma >$, где трехместная функция γ определяется условиями: $\gamma(x, y, z) = 0$, если 0 встречается среди значений x, y, z, в противном случае $\gamma(x, y, z)$ равно кратному значению аргументов функции γ.

14,п) $A_{49} = < 3; \alpha >$, где двухместная функция α определена так же, как функция α в сигнатуре алгебры A_{43}.

14,р) $A_{50} = < 3; \delta >$, где трехместная функция δ определена условиями: $\delta(0,1,2) = 0$, $\delta(1,2,0) = 1$, $\delta(2,0,1) = 2$, $\delta(0,2,1) =$

$= 1$, $\delta(2,1,0) = 0$, $\delta(1,0,2) = 2$, в противном случае $\delta(x,y,z)$ равно кратному значению аргументов функции δ.

14,с) $A_{51} = < 3; \emptyset >$.

14,т) $A_{52} =< 3;\ q(x,y),\ r(x,y) >$, где функции $q(x,y)$, $r(x,y)$ определяется табл.43–44.

Таблица 43

q

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	1
2	2	1	2

Таблица 44

r

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	1	1	1
2	2	1	2

14,у) $A_{53} = < 3; s(x,y) >$, где функция $s(x,y)$ определяется табл.45.

Таблица 45

y \ x	0	1	2
0	0	0	2
1	1	1	1
2	2	1	2

В итоге этих рассмотрений имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Любая двухэлементная универсальная алгебра условно рационально эквивалентна одной из пяти попарно условно рационально не эквивалентных алгебр $B_1, \ldots, B_5$. Любая трехмерная универсальная алгебра условно рационально эквивалентна одной из пятидесяти трех попарно условно рационально не эквивалентных алгебр $A_1, \ldots, A_{53}$.*

Заметим, что в работе [3] дан список пятидесяти трех трехэлементных квазипримальных алгебр, которым рационально эквивалентна любая трехэлементная квазипримальная алгебра. Фактически приведенные выше алгебры $A_1 - A_{53}$ соответствуют (с точностью до перестановки номеров) алгебрам из работы [3] (т.е. условно рационально эквивалентны соответствующим алгебрам из [3]), однако сигнатуры и сигнатурные функции приведенных здесь алгебр $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_{53}$ значительно проще сигнатур и сигнатурных функций алгебр из [3] (к примеру, сигнатуры тридцати восьми алгебр из работы [3] включают в себя помимо дискриминатора еще трехместную функцию, в то время как сигнатуры лишь шести приведенных выше алгебр содержат трехместные функции).

§ 2. Инварианты конечных алгебр условно рационально эквивалентных решеткам

Основные вопросы рассмотрений данного параграфа — это вопросы, связанные с условной рациональной эквивалентностью решеток. Будут приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы конечная универсальная алгебра была условно рационально эквивалентна какой-либо решетке, и будет замечено, что любые две решетки условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны, либо двойственны друг другу. Как доказано в работе [2] и отмечалось в п.1, инвариантом для класса универсальных алгебр условно рационально эквивалентных некоторой конечной алгебре $\mathcal{A}$ служит пара $< \mathrm{Sub}\mathcal{A}, \mathrm{Iso}\mathcal{A} >$.

Через $\mathrm{Sub}_k\mathcal{A}$ обозначим далее совокупность всех k-элементных подалгебр алгебры $\mathcal{A}$. Для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ через $< a_1, \ldots, a_n >$ обозначим подалгебру алгебры $\mathcal{A}$, порожденную элементами $a_1, \ldots, a_n$. Через $P_k(A)$ обозначим совокупность k-элементных подмножеств множества A.

Рассмотрим совокупность следующих условий на алгебру $\mathcal{A}$, сформулированных на языке пары $< \mathrm{Sub}\mathcal{A}, \mathrm{Iso}\mathcal{A} >$, где $\mathrm{Sub}\mathcal{A}$ рассматривается как конкретная решетка подмножеств основного множества A алгебры $\mathcal{A} =< A; \sigma >$.

1. $\mathrm{Sub}_1\mathcal{A} = P_1(A)$, т.е. все однопорожденные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ одноэлементны.

2. Для любых $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathrm{Sub}_1\mathcal{A}$, если $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$, то либо $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \in \mathrm{Sub}_2\mathcal{A}$, либо $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \in \mathrm{Sub}_4\mathcal{A}$, т.е. любая двупорожденная подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ либо двухэлементна, либо четырехэлементна.

3. Для любых $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathrm{Sub}_2\mathcal{A}$ существует единственный $g \in \mathrm{Iso}\mathcal{A}$ такой, что $\mathrm{Dom} g = \mathcal{B}_1$ и $\mathrm{Rang} g = \mathcal{B}_2$, т.е. любые

двухэлементные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ изоморфны и таковой изоморфизм единственный.

4. Для любых $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2 \in \mathrm{Sub}_1\mathcal{A}$, если $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}'_1 \vee \mathcal{B}'_2 \in \mathrm{Sub}_4\mathcal{A}$, то существует ровно два $g_1, g_2 \in \mathrm{Iso}\mathcal{A}$ такие, что $\mathrm{Dom} g_i = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, $\mathrm{Rang} g_i = \mathcal{B}'_1 \vee \mathcal{B}'_2$ и при этом, если $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_4 \in \mathrm{Sub}_1\mathcal{A}$ и таковы, что $\{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4\} \cap \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\} = \{\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_4\} \cap \{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2\} = \emptyset$, $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4 \subseteq \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_4 \subseteq \mathcal{B}'_1 \vee \mathcal{B}'_2$, $\mathcal{B}_3 \neq \mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}'_3 \neq \mathcal{B}'_4$, то $g_1(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}'_1$, $g_1(\mathcal{B}_2) = \mathcal{B}'_2$, $g_2(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}'_2$, $g_1(\mathcal{B}_2) = \mathcal{B}'_1$, и если при этом $g_1(\mathcal{B}_3) = \mathcal{B}'_3$, то $g_2(\mathcal{B}_3) = \mathcal{B}'_3$, $g_1(\mathcal{B}_4) = g_2(\mathcal{B}_4) = \mathcal{B}'_4$. Кроме того для данных $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$ имеют место включения $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}_3 \vee \mathcal{B}_4 \in \mathrm{Sub}_2\mathcal{A}$ и для любого $g \in \mathrm{Iso}\mathcal{A}$ такого, что $\mathrm{Dom} g = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3$, $\mathrm{Rang} g = \mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_3 (\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3 \vee \mathcal{B}_4)$ имеют место равенства $g(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2(\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_4)$ и $g(\mathcal{B}_3) = \mathcal{B}_3(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$.

5. Существует не более одной (с точностью до изоморфизма) трехэлементной подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ и если $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \in \mathrm{Sub}_1\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_3 \in \mathrm{Sub}_2\mathcal{A}$ и $g \in \mathrm{Iso}\mathcal{A}$, $\mathrm{Dom} g = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, $g(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$, $g(\mathcal{B}_2) = \mathcal{B}_3$, то $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_3 \in \mathrm{Sub}_3\mathcal{B}$.

6. Для любых $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{C} \in \mathrm{Sub}_1\mathcal{A}$, если $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \in \mathrm{Sub}_4\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{C}$, $\mathcal{B}_2 \vee \mathcal{C} \in \mathrm{Sub}_2\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \vee \mathcal{C} \in \mathrm{Sub}_5\mathcal{A}$ и при этом, если $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4 \in \mathrm{Sub}_1\mathcal{A}$, $\{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4\} \cap \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\} = \emptyset$, $\mathcal{B}_3 \neq \mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4 \subseteq \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ и $g \in \mathrm{Iso}\mathcal{A}$ таков, что $g(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_1$, $g(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_3$, $\mathrm{Dom} g = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{C}$, то существует $h \in \mathrm{Iso}\mathcal{A}$ такой,что $\mathrm{Dom} h = \mathcal{C} \vee \mathcal{B}_3$ и $h(\mathcal{B}_3) = \mathcal{B}_1$, $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Пусть далее $|\mathcal{A}| = m$ и $P(\mathrm{Sub}_1\mathcal{A})$ — совокупность всех подмножеств множества $\mathrm{Sub}_1\mathcal{A}$.

7. Для любых $n \leq m, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, $\mathcal{C} \in \mathrm{Sub}_1\mathcal{A}$, если $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n$, то существует отображение f множества $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ в совокупность $P(\mathrm{Sub}_1\mathcal{A})$ такое, что $f(0) = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$, для любого $0 < i \leq m-1$, для любой $\mathcal{A}' \in f(i) \setminus f(i-1)$ найдутся $\mathcal{A}'', \mathcal{A}''' \in f(i-1)$ такие, что $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}'' \vee \mathcal{A}'''$ и, при этом, $\mathcal{C} \in f(m-1)$.

8. Если взаимно-однозначное отображение h между множествами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathrm{Sub}\mathcal{A}$ таково, что для любых $a, b \in \mathcal{B}_1$ $h| < a, b > \in \mathrm{Iso}\mathcal{A}$, то $h \in \mathcal{A}$. Здесь $h| < a, b >$ ограничение h до множества $< a, b >$.

Непосредственно замечается, что для любой конечной m–элементной решетки $\mathcal{B} =< L; \vee, \wedge >$ выполнимость условий 1–8 имеет место. Покажем теперь, что если $\mathcal{A}$ m–элементная универсальная алгебра, для которой условия 1–8 выполнены, то $\mathcal{A}$ условно рационально эквивалентна некоторой m–элементной решетке.

Прежде всего отметим ряд простых следствий выполнимости условий 1–8 для алгебры $\mathcal{A}$. Будем считать далее, что $|\mathcal{A}| \neq 1$. Тогда, в силу условий 2–4 существует, причем единственная, с точностью до изоморфизма, двухэлементная подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. Пусть $a, b \in \mathcal{A}$, $a \neq b$ и $| < a, b > | = 2$. Пусть также $D(x, y)$ — диаграмма подалгебры $< a, b >$ алгебры $\mathcal{A}$ такая, что $\mathcal{A} \models D(a, b)$. Заметим, что в силу условия 3 $\mathcal{A} \not\models D(b, a)$. Воспользовавшись теперь обозначениями из условия 4 заметим, что в силу условия 5 и того, что $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}_3 \vee \mathcal{B}_4 \in$ $\in \mathrm{Sub}_2(\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3 \vee \mathcal{B}_4)$, подалгебра $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_3$ — трехэлементна и при этом, если $\mathcal{B}_1 = \{c\}$, $\mathcal{B}_2 = \{d\}$, $\mathcal{B}_3 = \{e\}$, $\mathcal{B}_4 = \{f\}$ и если, к примеру, $\mathcal{A} \models D(c, e)$ то $\mathcal{A} \models D(f, c)$ & $D(f, e)$.

Определим теперь отношение $\leq$ на элементах основного множества A алгебры $\mathcal{A}$ следующим образом:

для $a, b \in A$, $a \leq b$ тогда и только тогда, когда либо $a = b$, либо $\mathcal{A} \models D(a, b)$.

Приведенные выше замечания о непосредственных следствиях условий 1–8, вкупе с еще одним применением условия 5, влекут то, что отношение $\leq$ является отношением частичного порядка на множестве A.

Рассмотрим теперь два возможных случая: 1) существует четырехэлементная двупорожденная подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ и 2) все двупорожденные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ двухэлементны. Подробно остановимся лишь на первом случае (второй случай, т.е. когда $< A; \leq >$ — линейно упорядоченное множество рассматривается аналогично). Итак, пусть $\mathcal{A} =< A; \sigma >$, $|A| = m$ и $a, b \in A$ таковы, что $a \neq b$ и $| < a, b > | = 4$. Пусть $< a, b >= \{a, b, t_1(a, b), t_2(a, b)\}$, где $t_1(x, y), t_2(x, y)$ — некоторые термы сигнатуры σ алгебры $\mathcal{A}$. В силу условия 4, $\{t_1(a, b), t_2(a, b)\}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ и, значит, в силу условия 2, с точностью до перестановки термов $t_1(x, y), t_2(x, y)$, можно считать, что $\mathcal{A} \models D(t_1(a,b), t_2(a,b))$, т.е. $t_1(a,b) \leq t_2(a,b)$. Кроме того, из условия 4 вытекают также неравенства: $t_1(a,b) \leq a$, $t_1(a,b) \leq b, a \leq t_2(a,b)$, $b \leq t_2(a,b)$. Условие же 6 влечет, что $t_1(a,b) = \inf\{a,b\}$ и $t_2(a,b) = \sup\{a,b\}$ в частично упорядоченном множестве $< A; \leq >$ для любых таких элементов $a, b \in A$, что $a \nleq b$ и $b \nleq a$. Тем самым, $< A; \leq >$ является решеточно упорядоченным множеством.

Рассмотрим следующие условные термы сигнатуры σ:

$$x \wedge y = \begin{cases} x = y \to x, \\ x \neq y \ \&\ x \neq t_1(x,y) \ \&\ x \neq t_2(x,y) \ \& \\ \quad \&\ y \neq t_1(x,y) \ \&\ y \neq t_2(x,y) \to t_1(x,y), \\ x \neq y \ \&\ D(x,y) \to x, \\ x \neq y \ \&\ D(y,x) \to y, \\ \text{иначе } \to x, \end{cases}$$

$$x \vee y = \begin{cases} x = y \to x, \\ x \neq y \ \&\ x \neq t_1(x,y) \ \&\ x \neq t_2(x,y) \ \& \\ \quad \&\ y \neq t_1(x,y) \ \&\ y \neq t_2(x,y) \to t_2(x,y), \\ x \neq y \ \&\ D(x,y) \to x, \\ x \neq y \ \&\ D(y,x) \to y, \\ \text{иначе } \to x. \end{cases}$$

В силу отмеченного выше, если на m-элементной алгебре $\mathcal{A} =< A; \sigma >$ выполнены условия 1–8, то для любых $a, b \in \in A, a \wedge b = \inf\{a,b\}$, $a \vee b = \sup\{a,b\}$ в решеточно упорядоченном множестве $< A; \leq >$ и, значит, алгебра $\mathcal{B} =< A; \wedge, \vee >$ является решеткой. Для доказательства того, что алгебра $\mathcal{A} =< A; \sigma >$ и решетка $\mathcal{B} =< A; \wedge, \vee >$ условно рационально эквивалентны достаточно показать, что любая сигнатурная (сигнатуры σ) функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры $\mathcal{A}$ определима на множестве A некоторым условным термом решетки $< A; \wedge, \vee >$.

В силу построения операций $\wedge, \vee$ на A и условий 1–5, совокупности двупорожденных (а в силу условия 7 и любых) подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ и решетки $\mathcal{B}$ совпадают. Точно также совпадают совокупности изоморфизмов между двупорожденными (а в силу условия 8 и любыми) подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$ и решетки $\mathcal{B}$ соответственно.

Пусть $A_1, \ldots, A_{g(n)}$ — представители всех типов изоморфизма n–порожденных подалгебр алгебры $A' =< A; \wedge, \vee >$ с выделенными порождающими $a_1^i, \ldots, a_n^i$, $i \leq g(n)$. Тогда для любого $i \leq g(n)$ имеет место включение $f(a_1^i, \ldots, a_n^i) \in A_i = =< a_1^i > \vee \ldots \vee < a_n^i >$. В силу условия 7, и того, что элементы в двупорожденных (элементами x, y) подалгебрах алгебры A совпадают со значениями термов $x, y, t_1(x,y)$ или $t_2(x,y)$ и, в конечном итоге, со значениями на x, y операций $\wedge, \vee$, найдется терм $t_i(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры $< \wedge, \vee >$ такой, что $A \models f(a_1^i, \ldots, a_n^i) = = t_i(a_1^i, \ldots, a_n^i)$. Пусть $D_i(x_1, \ldots, x_n)$ - диаграмма алгебры A_i и $A' \models D_i(a_1^i, \ldots, a_n^i)$. Тогда очевидно, что условный терм

$$t(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} D_1(x_1, \ldots, x_n) \to t_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{g(n)}(x_1, \ldots, x_n) \to t_{g(n)}(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

сигнатуры $< \wedge, \vee >$ определяет на решетке $< A; \wedge, \vee >$ функцию $f \in \sigma$.

Тем самым, действительно доказано условно рациональная эквивалентность алгебры $A =< A; \sigma >$ и решетки $B =< A; \wedge, \vee >$ т.е. доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Конечная m–элементная алгебра $A =< A : \sigma >$ условно рационально эквивалентна некоторой решетке $< A; \wedge, \vee >$ тогда и только тогда, когда для алгебры A выполняются условия* 1–8.

Рассмотрим еще два условия:

9. Для любой $\mathcal{L} \in \mathrm{Sub}_6 A$ число различных двухэлементных подалгебр алгебры $\mathcal{L}$ равно 7,9 или 10;

9$'$. Для любой $\mathcal{L} \in \mathrm{Sub}_5 A$ число различных двухэлементных подалгебр алгебры $\mathcal{L}$ равно 9 или 10.

В построенной при доказательстве теоремы решетке $< A; \wedge, \vee >$ условие 9 запрещает подрешетки вида N_5 а условие 9$'$ — подрешетки вида N_5 и M_3. Таким образом имеет место

СЛЕДСТВИЕ. *Конечная m–элементная алгебра $A = =< A; \sigma >$ условно рационально эквивалентна некоторой модулярной (дистрибутивной) решетке $< A; \wedge, \vee >$ тогда и только тогда, когда для алгебры A выполняются условия* 1–9 (1–8, 9$'$).

В заключение остановимся на вопросе об условно рациональной эквивалентности двух решеток. Пусть $\mathcal{B} = < B; \vee, \wedge >$ — некоторая решетка и условные термы $t_1(x,y), t_2(x,y)$ сигнатуры $< \vee, \wedge >$ таковы, что $< B; t_1(x,y),\ t_2(x,y) >$ снова является решеткой. Так как условия от переменных x, y на решетках сводятся к дизъюнкции диаграмм двупорожденых алгебр, то можно считать, что условия в записи условных термов $t_1(x,y), t_2(x,y)$ принадлежат множеству $\{x = y, x \neq y \ \&\ x \wedge y = x,\ x \neq y \ \&\ x \wedge y = y, x \wedge y \neq x \ \&\ x \wedge y \neq y\}$. Точно также термы от двух переменных x, y на решетках (с точностью до тождественно им равных) исчерпываются списком $\{x, y, x \vee y, x \wedge y\}$.

Исходя из этих замечаний, с учетом требуемой выполнимости на $< B; t_1(x,y), t_2(x,y) >$ аксиом теории решеток получаем, что возможны лишь два варианта:

1) $t_1(x,y) = x \vee y,\ t_2(x,y) = x \wedge y$

или

2) $t_1(x,y) = x \wedge y,\ t_2(x,y) = x \vee y.$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Отношение условно рациональной эквивалентности совпадает на классе решеток с отношением рациональной эквивалентности и при этом две решетки условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны, либо двойственны друг другу.*

Литература

1. ПИНУС А.Г. Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах. — Новосибирск, 1996. — Вып. 156: Вычислительные системы. — С. 59–78.

2. ПИНУС А.Г. Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность. — Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 4. — С. 432–459.

3. CSAKANY B., GAVALCOVA T. Three-element quasiprimal algebras. //Studia Scientarum Math. Hungarica. - 1981. - Vol.16, № 1-2. - P. 237-248.

Поступила в редакцию
4 ноября 1998 года