СТРУКТУРНЫЕ И СЛОЖНОСТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)

1999 год Выпуск 165

УДК 512.54: 510.649

О ГРУППАХ С НЕЧЕТКИМИ ОПЕРАЦИЯМИ

В.П.Добрица, Г.Э.Яхъяева

В свое время появление формальной логики было шагом вперед в борьбе с неопределенностью, расплывчатостью представления человеческих знаний. Логика была призвана исключить нестрогость и неоднозначность из рассуждений. Теперь же возникла насущная необходимость создания теории, позволяющей формально описывать нестрогие, нечеткие понятия и обеспечивающей возможность продвинуться в познании процессов рассуждений, содержащих такие понятия. Крупным шагом в этом направлении является подход, основанный на использовании понятия нечеткого множества Л.Заде [1]. Этот подход позволяет дать строгое математическое описание в действительности расплывчатых утверждений, реализуя таким образом попытку преодолеть лингвистический барьер между человеком, суждения и оценки которого являются приближенными и нечеткими,и машинами, которые могут выполнять только четкие инструкции.

Изучение "нечеткости" на алгебраических системах может вестись в трех различных аспектах:

1. Рассматриваются нечеткие отношения, но четкие операции. Это направление активно разрабатывается на западе ("fuzzy") [2]. Множество A задается вместе с функцией приоритета μ_A, определенной на этом множестве и принимающей значения на отрезке $[0,1]$. Такое множество принято называть *нечетким*, т.е. отношение принадлежности объектов данному множеству нечеткое. Выполнение же операций над нечеткими объектами

остается обычное — "четкое". Если рассматривать векторные пространства с нечеткими объектами, то получаются нечеткие векторные пространства [3]. Если в алгебрах двузначной логики понятия "истинно" и "ложно" заменить значениями функции приоритета μ, то получается, так называемая, нечеткая логика [4].

2. Наоборот, в рассматриваемой системе все отношения четкие, а операции — "размытые", т.е. результатом выполнения операции является целое множество, на котором задана характеристика предпочтительности. В этом случае возникает много нюансов, связанных с нечеткостью выполнения операции. Например: что понимать под композицией нечетких операций? Так, выполняя первую операцию композиции, мы получаем множество, поэтому выполняя вторую операцию, мы вынуждены умножать элемент на множество. Не менее интересен вопрос о элементе нейтральном относительно этой операции. Как мы увидим ниже, нейтральных элементов в такой системе может оказаться несколько. А из этого вытекает, что единственность обратного элемента в такой классической алгебре как группа также нельзя утверждать.

Исследования в этом направлении начаты нашей группой. Ранее публикации по этому вопросу нами не встречались.

3. На системе и отношения, и операции являются нечеткими. Это направление ждет своего исследования. Публикаций по этому подходу нами так же не встречалось.

1. Определение нечеткой операции. Коммутативные и ассоциативные операции

Рассмотрим некоторое отображение $f : A^n \to P(A)$, где $P(A)$ — множество всех подмножеств произвольного множества A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение f назовем нечеткой n-арной операцией, если для каждого $S = f(a_1, ..., a_n) \in$ $\in P(A)$ задана функция приоритета μ_S, определяющая предпочтение или "вес" каждого элемента из S такая, что для любого $s \in S$ имеем $\mu_S(s) \in (0, 1]$.

Нечеткую функцию f будем называть нечеткозначной, если для каждого $S = f(a_1, ..., a_n) \in P(A)$ существует единственный элемент $s \in S$ такой, что $\mu_S(s) = 1$.

Если вне множества S функцию приоритета μ_S считать нулевой, то она фактически задает саму операцию, т.е.

$$\mu(a_1, ..., a_n, s) = \begin{cases} \mu_S(s), & s \in S, \\ 0, & s \notin S; \end{cases}$$

$$f(a_1, ..., a_n) = \{s \mid \mu(a_1, ..., a_n, s) > 0\} = S.$$

Для бинарной нечеткой операции можно использовать и традиционную запись, введя понятие равенства с данным весом $a * b =_\alpha s$, где $\alpha = \mu(a, b, s)$.

По аналогии с "четкими" операциями можно определить такие свойства бинарной нечеткой операции, как коммутативность и ассоциативность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Бинарная нечеткая операция на множестве A называется коммутативной, если для любых $a, b \in A$ $a * b = b * a$.

Заметим, что здесь равенство произведений понимается как равенство множеств, однако функции приоритета, определенные на этих множествах, могут и не совпадать.

Прежде, чем говорить об ассоциативности, необходимо рассмотреть такое понятие, как произведение конечного числа элементов из A. Введем это понятие, используя индукцию по числу элементов, входящих в произведение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть уже определено, что

$$a_1 * ... * a_n = S_1 \quad \text{и} \quad b_1 * ... * b_m = S_2.$$

Тогда под произведением $(a_1 * ... * a_n) * (b_1 * ... * b_m)$ будем понимать множество S, определяемое функцией приоритета

$$\mu_S(c) = \max\left\{ \min\{\mu_{S_1}(x), \mu_{S_2}(y), \mu_{x*y}(c)\} \middle| x, y \in A \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При n=1 мы будем иметь произведение элемента на класс, т.е. $a_1 * (b_1 * ... * b_m)$. В этом случае будем полагать, что $S_1 = \{a_1\}$ и $\mu_{S_1}(a_1) = 1$.

ЛЕММА 1. *Если операция "$*$" нечеткозначная, то для любых $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m$ из A существует единственный элемент c такой, что $(a_1 * ... * a_n) * (b_1 * ... * b_m) =_1 c$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение будем доказывать индукцией по числу элементов, входящих в произведение.

Покажем, что при $n = 2, m = 1$ лемма справедлива. По определению нечеткой операции, существует единственный элемент c_1 такой, что $a_1 * a_2 =_1 c_1$. Опять же по определению нечеткой операции, существует единственный элемент c такой, что $c_1 * b_1 =_1 c$.

Допустим, что для любого $k < n + m$ лемма доказана. Тогда существует единственный элемент c_1 такой, что $a_1 * ... * a_n =_1 c_1$, и существует единственный элемент c_2 такой, что $b_1 * ... * b_m =_1 c_2$. По определению нечеткой операции найдется такой элемент c, что $c_1 * c_2 =_1 c$, причем элемент c единственный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Нечеткую бинарную операцию "$*$" на множестве A будем называть ассоциативной, если $a * (b * c) = (a * b) * c$.

ТЕОРЕМА 1. *Результаты применения ассоциативной операции к какому угодно кортежу $< a_1, ..., a_n >$ совпадают для любых двух способов расстановки скобок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться индукцией по n. При $n = 3$ доказательство очевидно.

Пусть далее теорема верна для всех кортежей, длина которых меньше n. Докажем, что она верна и для кортежей длины n. Рассмотрим какие-нибудь два способа расстановки скобок:

$$S_1 = (a_1 * ... * a_k) * (a_{k+1} * ... * a_n),$$

$$S_2 = (a_1 * ... * a_l) * (a_{l+1} * ... * a_n).$$

Допустим, что $k < l$. Внутренние скобки можно расставлять как угодно в силу предположения индукции. Тогда данные выражения можно записать в следующем виде:

$$S_1 = (a_1 * ... * a_k) * ((a_{k+1} * ... * a_l) * (a_{l+1} * ... * a_n)),$$

$$S_2 = ((a_1 * ... * a_k) * (a_{k+1} * ... * a_l)) * (a_{l+1} * ... * a_n).$$

Возьмем произвольный элемент $b \in S_1$. Тогда найдется элемент s, принадлежащий произведению $a_1 * ... * a_k$, такой, что

$$b \in s * ((a_{k+1} * ... * a_l) * (a_{l+1} * ... * a_n)).$$

Тогда, в силу индукционного предположения, получим $b \in (s * (a_{k+1} * \dots * a_l)) * (a_{l+1} * \dots * a_n)$. А это означает, что элемент b принадлежит множеству S_2. Получили, что $S_1 \subseteq S_2$. Аналогично можно показать, что $S_2 \subseteq S_1$. Таким образом, имеем $S_1 = S_2$, что и требовалось доказать.

2. Нейтральные и обратные элементы

В классических алгебраических системах нейтральный элемент можно получить из произведения некоторого элемента на элемент ему обратный. В случае нечеткой операции, когда результатом произведения является целый класс элементов, аналогичное произведение дает нам возможность говорить о множестве нейтральных элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Элемент $e \in A$ будем называть нейтральным, если для любого $a \in A$ найдутся такие числа $\alpha, \beta \in (0,1]$, что $e * a =_\alpha a$ и $a * e =_\beta a$.

Нейтральный элемент $1 \in A$ будем называть единицей, если для любого $a \in A$ $1 * a =_1 a$ и $a * 1 =_1 a$.

ЛЕММА 2. *Если операция "$*$" нечеткозначная, то в множестве A существует не более одной единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из определения нечеткой операции и определения единицы.

Очевидно, что произведение двух нейтральных элементов e_1 и e_2 с некоторой точностью дает каждый из этих элементов, т.е. $e_1 * e_2 =_\alpha e_1$ и $e_1 * e_2 =_\beta e_2$, при некоторых $\alpha, \beta \in (0,1]$. Но в результате выполнения нечеткого умножения $e_1 * e_2$ мы с некоторой вероятностью можем получить элемент не равный ни e_1, ни e_2. Вполне естественно выглядело бы, если этот элемент также был бы нейтральным. Возникает вопрос, при каких условиях это возможно? Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Нечеткую операцию "$*$" назовем **компактной**, если для любых $a, b, c, d \in A$ выполняется условие $a * b =_\alpha c \Rightarrow \Big((a * b) * d = c * d \ \wedge \ d * (a * b) = d * c\Big)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если нечеткая операция ассоциативна и компактна, то произведение двух любых нейтральных элементов с некоторой точностью дает каждый нейтральный элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E — множество нейтральных элементов. Нам нужно доказать, что для любых $e_1, e_2 \in E$ $e_1 * e_2 = E$.

Пусть $f \in E$, тогда $e_2 * f =_\alpha e_2$, при некотором $\alpha \in (0,1]$. Также имеем $e_1 * f =_{\beta_1} f$ и $e_2 * f =_{\beta_2} f$. Получим

$$f \in e_1 * f = e_1 * (e_2 * f) = e_1 * e_2.$$

Пусть теперь $f \in e_1 * e_2$. Тогда для любого $a \in A$ имеем

$$f * a = (e_1 * e_2) * a = e_1 * (e_2 * a) \ni a,$$

т.е. существует такое $\beta \in (0,1]$, что $f * a =_\beta a$.

СЛЕДСТВИЕ. *Если нечеткая операция ассоциативна и компактна,то для любых двух нейтральных элементов e_1 и e_2 имеют место следующие равенства: $a * e_1 = e_1 * a$ и $a * e_1 = = a * e_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу компактности операции "$*$" имеем $a * e_1 = (e_1 * a) * e_1$. Далее, применяя свойство ассоциативности, получим $(e_1 * a) * e_1 = e_1 * (a * e_1)$. Из чего, опять же в силу свойства компактности, следует $e_1 * (a * e_1) = e_1 *$.

Аналогичными рассуждениями получим

$$a * e_1 = a * (e_1 * e_2) = (a * e_1) * e_2 = a * e_2.$$

Из выше доказанного следует, что для любого $e \in E$ множества $a * e$ и $a * E$ совпадают.

Множество $a * E$ будем обозначать через $[a]$. Пусть $c \in [a] \cap [b]$. Тогда получим

$$[a] = e * a = e * (a * e) = e * c = e * (b * e) = e * b = [b].$$

Таким образом, на множестве A можно определить отношение эквивалентности $a \equiv b \Leftrightarrow \forall e \exists \alpha (a * e =_\alpha b)$.

ЛЕММА 3. *Для любых $a, b, c, d \in A$ справедливы следующие свойства:*

1) $(a * b =_\alpha c \wedge d \equiv b) \Rightarrow \exists \beta \in (0,1]\, a * d =_\beta c$,
2) $(a * b =_\alpha c \wedge d \equiv a) \Rightarrow \exists \beta \in (0,1]\, d * b =_\beta c$,
3) $c, d \in a * b \Rightarrow c \equiv d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. $(d \equiv b) \Rightarrow (b * e =_\alpha d) \Rightarrow (a * d = a * (b * e) = (a * b) * e = = c * e \ni c)$.

2. Доказательство симметрично предыдущему.

3. $(a * b =_{\alpha_1} c \wedge a * b =_{\alpha_2} d) \Rightarrow \forall f (c * f = (a * b) * f = = d * f) \Rightarrow (c * e = d * e) \Rightarrow c \equiv d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Элемент $b \in A$ будем называть нечетко обратным к элементу $a \in A$ относительно нейтрального элемента e и обозначать a^{-e}, если для некоторого $e \in E$ найдутся такие числа $\alpha, \beta \in (0,1]$, что $a * b =_\alpha e$ и $b * a =_\beta e$.

Элемент $b \in A$ будем называть (четко) обратным элементу $a \in A$ и обозначать a^{-1}, если $a * b =_1 1$ и $b * a =_1 1$.

Используя лемму 3, легко убедиться, что если для элемента $a \in A$ существует хотя бы один нечетко обратный элемент a^{-e}, то существует целый класс нечетко обратных элементов $[a^{-e}]$. В силу этой же леммы очевидно, что для любых нейтральных элементов e_1, e_2 классы $[a^{-e_1}]$ и $[a^{-e_2}]$ совпадают.

Для четко обратного элемента подобное утверждение будет ошибочным, однако справедлива следующая

ЛЕММА 4. *Если нечеткозначная операция ассоциативна, то для каждого элемента существует не более одного четко обратного.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b_1, b_2 четко обратные к a. В силу ассоциативности имеем $b_2 * (a * b_1) = (b_2 * a) * b_1$. Однако по определению конечного произведения и единственности произведения с приоритетом 1 имеем $b_2 * (a * b_1) =_1 b_2$ и $(b_2 * a) * b_1 =_1 b_1$. И в силу леммы 1, получим $b_1 = b_2$.

3. Группы с нечеткими операциями

Определив характерные для группы свойства, мы можем перейти к определению самой группы с нечеткой операцией. Естественно было бы назвать такую алгебраическую систему "нечеткой группой", но так как этот термин уже использован для определения систем с нечеткостью иного рода, то мы предлагаем термин "размытая группа".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Множество A, с определенной на нем нечеткой операцией называется **размытой** группой, если

1) операция ассоциативна,

2) операция компактна,

3) в множестве A существует подмножество E нейтральных элементов,

4) для каждого элемента $a \in A$ существует по крайней мере один нечетко обратный элемент.

Пусть B подмножество множества A. Будем говорить, что подмножество B замкнуто относительно операции "$*$", если для любых $b_1, b_2 \in B$ $b_1 * b_2 \subseteq B$ и незамкнуто в противном случае. Очевидно, для того, чтобы замкнутое подмножество B размытой группы A было размытой подгруппой, необходимо и достаточно выполнение пп.3 и 4 определения 8. Причем, в силу замкнутости операции, все нейтральные элементы из A будут содержаться в B.

В случае нечеткой операции также интересен случай "частичной замкнутости", т.е. когда для любых $b_1, b_2 \in B$ $b_1 * b_2 \cap B \neq \emptyset$. Тогда нечеткую операцию "$*$" можно ограничить на множестве B, зануляя результат выполнения операции на всех элементах, не лежащих в B. Ограничение операции "$*$" на множество B будем обозначать $*_B$. Множество B будет замкнуто относительно этой операции. Легко понять, что замкнутая система $< B, *_B >$ будет размытой группой, если она содержит хотя бы один нейтральный элемент и для каждого элемента $b \in B$ найдется по крайней мере один нечетко обратный элемент b^{-e}. Если операция "$*$" замкнута на множестве B, то она совпадает со своим ограничением $*_B$.

Наименьшей возможной подгруппой будет подгруппа E нейтральных элементов. Эта подгруппа даже является нормальной, в классическом смысле данного определения. В самом деле, в силу следствия, имеем $\forall a \in A \quad (aE = Ea)$. Если теперь факторизовать размытую группу A по размытой подгруппе E, то мы получим четкую группу $A/_E$ с заданной на ней операцией $aE \cdot bE = (a * b)E$, где $(a * b)E$ совпадает с классом cE $(a * b =_\alpha c)$. Каждый элемент aE группы $A/_E$ совпадает с классом эквивалентности $[a]$, определенным в предыдущем параграфе. Что это действительно так, следует из леммы 3. Группу $A/_B$ в дальнейшем будем называть скелетной или скелетом для размытой группы A.

4. Гомоморфизмы и фактор-группы

Согласно одному из классических определений, отображение φ группы G в группу G' называется гомоморфизмом, если оно сохраняет операцию, т.е. если для любых элементов $a, b \in G$ выполняется условие $\varphi(a*b) = \varphi(a)\circ\varphi(b)$, где через "$*$" обозначена операция в группе G, а $\circ$ — операция в группе G'.

Принимая это определение в качестве базового, в случае нечеткой операции будем говорить, что при отображении φ операция сохраняется, если для любых $a, b, c \in G$ и для любого $\alpha \in (0, 1]$ выполняется условие

$$a * b =_\alpha c \Rightarrow \exists\beta \in (0, 1]\, \varphi(a) \circ \varphi(b) =_\beta \varphi(c). \tag{1}$$

В общем случае, образ гомоморфизма $\varphi(G)$ может быть незамкнутым множеством. Однако, если операцию "$\circ$" ограничить до операции $\circ_{\varphi(G)}$, то множество $\varphi(G)$ всегда будет замкнуто. Тогда формулу (1) можно записать в виде

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ_{\varphi(G)} \varphi(b). \tag{2}$$

Далее, для удобства записи, будем полагать, что операция "$\circ$" ограничена на $\varphi(G)$.

Пусть e один из нейтральных элементов группы G. Тогда для любого $a \in G$, в силу (2), справедливы утверждения: $\varphi(a) \in \varphi(a) \circ \varphi(e)$ и $\varphi(a) \in \varphi(e) \circ \varphi(a)$.

Таким образом, мы показали, что гомоморфизм переводит нейтральные элементы в нейтральные.

Также легко убедиться, что гомоморфизм сохраняет обратные элементы. В самом деле, для любого $a \in G$

$$\varphi(e) \in \varphi(a) \circ \varphi(a^{-e}) \Rightarrow \varphi(a^{-e}) = (\varphi(a))^{-e}.$$

Возьмем произвольные элементы a, b, c из группы G. Имеем

$$\varphi(a) \circ (\varphi(b) \circ \varphi(c)) = \varphi(a) \circ \varphi(b * c) = \varphi(a * (b * c)) = \\ = \varphi((a * b) * c) = \varphi(a * b) \circ \varphi(c) = (\varphi(a) \circ \varphi(b)) \circ \varphi(c),$$

что показывает сохранение свойства ассоциативности.

Пусть теперь $a * b =_\alpha c$, где $a, b, c \in G$. Тогда для любого d из G получим $\varphi(c) \circ \varphi(d) = \varphi(c * d) = \varphi((a * b) * d) = \varphi(a * b) \circ \varphi(d) = (\varphi(a) \circ \varphi(b)) \circ \varphi(d)$. Аналогично $\varphi(d) \circ \varphi(c) = \varphi(d) \circ (\varphi(a) \circ \varphi(b))$.

Таким образом, мы доказали следующую лемму

ЛЕММА 5. *Гомоморфным образом размытой группы G является размытая группа с операцией $\circ_{\varphi(G)}$.*

Так же легко проверить справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 6. *Гомоморфным прообразом размытой группы будет размытая группа.*

Пусть e' - нейтральный элемент группы G' и B - множество прообразов элемента e'. Тогда для любых $b_1, b_2 \in B$ справедливо $e' \in \varphi(b_1) \circ \varphi(b_2)$. Однако, по лемме 3, любой элемент $e'' \equiv e'$ будет принадлежать произведению $\varphi(b_1) \circ \varphi(b_2)$. Тем самым мы показали, что прообраз одного нейтрального элемента частично замкнут.

Пусть теперь $B = \varphi^{-1}(E')$, где E' - множество всех нейтральных элементов группы G'. Выберем произвольно $b_1, b_2 \in B$. Допустим $\varphi(b_1) = e'_1$ и $\varphi(b_2) = e'_2$. Тогда, в силу теоремы 2, $\varphi(b_1) \circ \varphi(b_2) = e'_1 \circ e'_2 = E'$. Тем самым мы показали, что множество B замкнуто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Прообраз множества всех нейтральных элементов группы G' назовем ядром гомоморфизма и будем обозначать $Ker\varphi$.

ТЕОРЕМА 3. *$Ker\varphi$ — размытая группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1-3 определения 8 размытой группы выполняются автоматически. Покажем выполнимость условия существования обратного элемента.

Пусть $b \in Ker\varphi$, т.е. найдется такой нейтральный элемент e', что $\varphi(b) = e'$. Предположим, что $(\varphi(b))^{-e} = a \notin E'$. Тогда $\varphi(b) \circ (\varphi(b))^{-e} = e' \circ a \neq E'$, что противоречит определению обратного элемента.

Гомоморфизм $a \mapsto [a]$, переводящий размытую группу в соответствующую ей скелетную группу назовем естественным. Ядром такого гомоморфизма служит множество нейтральных элементов E.

Если размытые группы G_1 и G_2 естественными гомоморфизмами переводятся в изоморфные группы, то будем говорить, что G_1 и G_2 обладают общим скелетом. Однако говорить об изоморфности таких групп нельзя, так как между ними не всегда можно установить взаимно-однозначное соответствие. Например, пусть $G_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ и $G_2 = \{e'_1, e'_2\}$. Очевидно, что $G_1/_{E_1} \cong G_2/_{E_2}$, однако эти группы не равномощны, а значит не могут быть изоморфными.

В случае нечетких операций в группах видоизменяется и основная теорема о гомоморфизмах.

ТЕОРЕМА 4. *Если φ — гомоморфизм размытой группы G на размытую группу G' с ядром $Ker\varphi = H$, то $G/_H \cong G'/_{E'}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим отображение τ : $G/_H \Rightarrow G'/_{E'}$, полагая $\tau(aH) = \varphi(a)E'$. Это действительно отображение, так как для некоторого $h \in H$

$$aH = bH \Rightarrow a * h =_\alpha b \Rightarrow \varphi(a) \circ \varphi(h) =_\beta \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a) \equiv \varphi(b).$$

Отображение τ переводит разные элементы в разные, так как для некоторого $e' \in E'$

$$\varphi(a)E' = \varphi(b)E' \Rightarrow \varphi(a) \circ e' =_\alpha \varphi(b) \Rightarrow b \in aH \Rightarrow aH = bH.$$

Далее τ — отображение "на", что очевидно. Наконец, τ сохраняет операцию, так как

$$\tau(aH \cdot bH) = \tau(cH) = \varphi(c)E' = \varphi(a)E' \cdot \varphi(b)E' = \tau(aH) \cdot \tau(bH),$$

где $a * b =_\alpha c$.

Литература

1. ZADEH L.A. Fuzzy sets// Inform. and control. - 1965. - Vol. 8. - P. 338-353.

2. MALIK D.S., MORDESON John N. Fuzzy subgroups of abelian groups// Chinese J. of Math. Soc. — 1991. - Vol.1'9, № 2.- P. 129-145.

3. ABDUKHALIKOF D.S., TULRNBAEV M.S., UMIRBAEV U.U. On fuzzy bases of vector spaces// Fuzzy sets and sistems. - 1994. - Vol.63. - P. 201-206.

4. ДОБРИЦА В.П. Нечеткие алгебры как модели булевозначной логики: //Материалы 4-й международной конф. по прикладной логике.– Иркутск, 1995.– С. 25–26.

Поступила в редакцию
3 сентября 1999 года