СТРУКТУРНЫЕ И СЛОЖНОСТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1999 год Выпуск 165

УДК 510.57

ВЫЧИСЛИМЫЕ КЛАССЫ КОНСТРУКТИВНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР[1]

М.В.Гайлит

Изучаются полурешетки вычислимых нумераций вычислимого класса конструктивных булевых алгебр. В работе [1] доказано, что если полурешетка вычислимых нумераций семейства рекурсивно-перечислимых множеств нетривиальна, тогда она счетна. В этой работе показано, что для любого бесконечного вычислимого класса конструктивных булевых алгебр, который имеет две рекурсивно неизоморфные бесконечные булевы алгебры существуют две вычислимые нумерации, не имеющие нижней грани. Этот результат несколько усиливает теорему Селиванова для полурешетки вычислимых нумераций семейства рекурсивно-перечислимых множеств.

Основные определения

Основные определения и обозначения читатель может найти в [2]. Напомним лишь некоторые из них.

Пусть $\langle B, \cup_B, \cap_B, \neg_B \rangle$ — булева алгебра. Нумерация ее основного множества $\nu : \omega \to B$ называется *конструктивизацией*, если:

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 99 01 00485, гранта РФФИ — ИНТАС № IR-97-139 и гранта "Университеты России" Министерства образования РФ № 3Н-334-99.

1) существуют общерекурсивные функции $f_\cup, f_\cap, f_\neg$ такие, что

$$\nu f_\cup(\langle x,y\rangle) = \nu(x) \cup \nu(y),$$
$$\nu f_\cap(\langle x,y\rangle) = \nu(x) \cap \nu(y),$$
$$\nu f_\neg(x) = \neg(\nu x);$$

2) множество $\{\langle m,n\rangle \mid \nu(m) = \nu(n)\}$ рекурсивно.

В этом случае пара $(\mathcal{B},\nu)$ называется *конструктивной булевой алгеброй*. Пусть L — линейный порядок, тогда через $\mathcal{B}_L$ будем обозначать булеву алгебру, построенную по этому линейному порядку.

Если $\mathcal{B}$ булева алгебра, $A \subset |\mathcal{B}|$, то через $gr(A)$ будем обозначать подалгебру булевой алгебры $\mathcal{B}$, порожденную элементами из A. Пусть $\mathbb{K}$ — вычислимый класс конструктивных булевых алгебр. (Определение вычислимого класса конструктивных систем можно найти в [3], однако, в нашем случае необходимо автоэквивалентность моделей заменить на рекурсивный изоморфизм, т.е например $\gamma(n) \equiv_a \nu(f(n))$ нужно заменить на $\gamma(n) \simeq_{rec} \nu(f(n))$ и так далее.)

Пусть $\mathcal{A}$ - конструктивная булева алгебра. Следуя [3], определим понятие *локальной вложимости*. Булева алгебра $\mathcal{B}$ называется *локально вложимой* в $\mathcal{A}$, если для любой конечной подалгебры $\mathcal{C} \leq \mathcal{B}$ существует конечная подалгебра $\mathcal{D} \leq \mathcal{A}$, которая имеет такое же число атомов. (Это переформулировка определения локальной вложимости конструктивных моделей произвольной природы, приведенное в [3].) Будем писать $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$, если $\mathcal{B}$ локально вложима в $\mathcal{A}$.

Для конструктивной булевой алгебры $\mathcal{A}_\nu$ обозначим через $L_\nu \rightleftharpoons \{\mathcal{B} \in \mathbb{K} \mid \mathcal{B} \equiv_{loc} \mathcal{A}_\nu\}$ *локальный подкласс, определенный* $\mathcal{A}_\nu$.

Также через $K_\nu \rightleftharpoons \{\mathcal{B} \in \mathbb{K} \mid \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}_\nu\}$ обозначим *локальный конус*, определенный $\mathcal{A}_\nu$.

Пусть α, β — две вычислимые нумерации класса $\mathbb{K}$. Тогда $\alpha \leq \beta$, если существует общерекурсивная функция f такая, что $\forall n \in \omega\ \alpha(n) \simeq_{rec} \beta(f(n))$.

Булева алгебра $\mathcal{B}$ называется *универсальной* для класса $\mathbb{K}$ рекурсивно-перечислимых булевых алгебр, если любая $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$ рекурсивно изоморфна подходящему главному идеалу в $\mathcal{B}$.

Через $L(\mathbb{K})$ будем обозначать полурешетку вычислимых нумераций вычислимого класса булевых алгебр $\mathbb{K}$ со сводимостью по рекурсивному изоморфизму.

Вспомогательные результаты

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Структура $(L(\mathbb{K}), \leq)$ является верхней полурешеткой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится стандартным образом: построением для двух вычислимых нумераций α и β их прямой суммы $\alpha \oplus \beta$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для вычислимого класса рекурсивно перечислимых булевых алгебр существует универсальная булева алгебра и она единственна с точностью до изоморфизма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — множество всех булевых термов от v_i. Определим отношение $\approx$ так: $t \approx s \Leftrightarrow$ из аксиом булевых алгебр $\models t = s$. Заметим, что это отношение будет также отношением конгруэнтности.

Определим теперь $F_\omega = \{A/\!\approx, \beta, \cap, \cup, \neg, 0, 1\}$, где нумерация β индуцирована геделевой нумерацией термов. Так построенная булева алгебра будет рекурсивно-перечислимой. Покажем теперь, что любая рекурсивно-перечислимая булева алгебра рекурсивно изоморфна факторизации свободной булевой алгебры по некоторому рекурсивно-перечислимому идеалу. Пусть $\mathcal{B} = \{B, \beta, \cdots\}$ — произвольная рекурсивно-перечислимая булева алгебра. Рассмотрим отображение $\varphi : A \to B$, где A — множество термов, заданное так: $\varphi(v_k) = \beta(k)$, $\varphi(\emptyset) = 0_B$, $\varphi(1) = 1_B$, $\varphi(t \cup s) = \varphi(t) \cup_B \varphi(s)$ и аналогично с пересечением и дополнением. Очень легко проверить, что $t \approx s \Leftrightarrow \varphi(s) = \varphi(t)$. Значит отображение $\varphi^*[t] = \varphi(t)$ алгебры F_ω в $\mathcal{B}$ определено корректно. Тогда $\mathcal{B} \cong F_\omega/\mathrm{Ker}(\varphi^*)$. Осталось показать, что $\mathrm{Ker}(\varphi^*)$ рекурсивно перечислимо. $\mathrm{Ker}(\varphi^*) = \{a \in F_\omega | \varphi^*(a) = 0\}$. Последнее свойство ввиду того, что $\mathcal{B}$ — рекурсивно-перечислимая булева алгебра, рекурсивно перечислимо, значит это рекурсивно-перечислимое множество. Положим для каждого $i \in \omega$ $\mathcal{B}_i = F_\omega/J_i$, где $J_i = \{0\} \cup \{a | (\exists n \exists x_0 \cdots \exists x_n) a \leq_{F_\omega} \beta(x_0) \cup \cdots \cup \beta(x_n)\}$. Пусть $\mathcal{B} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая рекурсивно-перечислимая булева алгебра, тогда $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Каждому $b \in \mathcal{B}_i$

поставим в соответствие последовательность $(0, \cdots, b, \cdots, 0) \in \mathcal{B}$, где b стоит в этой последовательности на i-ом месте. Это отображение и определяет вложимость $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ как идеал. Так определенное $\mathcal{B}$ будем называть *универсальной* булевой алгеброй. Нумерация $\mathcal{B}$ индуцируется нумерацией всех конечных последовательностей.

Установим теперь, что так построенная универсальная булева алгебра единственна. Пусть $\mathcal{C}$ — тоже универсальная булева алгебра. Тогда $\mathcal{B} \simeq_{rec} \widehat{c}$, где $\widehat{c}$ — главный идеал в $\mathcal{C}$. Вспомним теперь, что $\mathcal{C} \cong \widehat{c} \oplus \widehat{\neg c}$. Идеал $\widehat{\neg c}$ — рекурсивно-перечислим, значит $\exists k \in \omega$ такое, что $\widehat{\neg c} \simeq_{rec} \mathcal{B}_k$. Значит $\mathcal{C} \cong \mathcal{B}_k \oplus \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \cdots$. Покажем теперь, что это изоморфно $\mathcal{B}$. Для этого рассмотрим новую нумерацию рекурсивно-перечислимых множеств $\nu_0 = \Pi_k$ для $i = 0$ и $\nu_i = \Pi_{i-1}$ для $i > 1$. Так введенная нумерация эквивалентна Π, значит по теореме Роджерса [4, с.76, теорема II] существует рекурсивная перестановка $p : \omega \to \omega$ такая, что $\nu_k = \Pi_{p(k)}$. Это p и дает искомый изоморфизм $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_k \oplus \mathcal{B} \cong \mathcal{C}$. Значит $\mathcal{B}$ существует и единственна. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Существует главная вычислимая нумерация для класса рекурсивно-перечислимых булевых алгебр* $\mathbb{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова воспользуемся таким фактом: любая рекурсивно-перечислимая булева алгебра $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$ изоморфна $\mathcal{B}/J$, где J — некоторый рекурсивно-перечислимый идеал в $\mathcal{B}$. Рассмотрим теперь W_i — главную вычислимую нумерацию рекурсивно-перечислимых множеств. Рассмотрим для W_i идеал в $\mathcal{B}$, порожденный этим множеством. Обозначим через D_i фактор-алгебру $\mathcal{B}$ по этому идеалу. Получаем $\{D_i\}$ — главную вычислимую нумерацию. ■

Рассмотрим вопрос об оценке сложности индексного множества сводимости вычислимых нумераций класса конструктивных булевых алгебр. Пусть α и β — две вычислимые нумерации. Тогда

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow (\exists f)[f\text{-орф} \,\&((\forall n \in \omega)\, \alpha(n) \simeq \beta(f(n)))] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists f)[f\text{-орф} \,\&(\forall n \exists g[g\text{-орф} \,\& g(\alpha(n)) = \beta(f(n))])].$$

Используя алгоритм Тарского–Куратовского, получаем оценку Σ^0_5.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Пусть класс $\mathbb{K}$ конструктивных булевых алгебр состоит лишь из конечных систем. Тогда существует вычислимое семейство рекурсивно-перечислимых множеств S, такое, что $L(\mathbb{K}) \cong L_0(S)$, т.е. семейство S имеет ту же, с точностью до изоморфизма, верхнюю полурешетку Роджерса.*

Этот факт является частным случаем (см. [3, теорема 6]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Пусть $\mathbb{K}$ — вычислимый класс конструктивных моделей, γ — его вычислимая нумерация, $(\mathcal{M}_\nu, \nu) \in \mathbb{K}$ и $L_\nu(\mathbb{K})$ имеет более одного элемента и в $I^\nu(K_\nu)$ имеется Σ^0_2-простое множество. Тогда у класса $\mathbb{K}$ имеется счетное число попарно несравнимых вычислимых нумераций.*

Доказательство этого факта можно найти в [3, теорема 4].

Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathbb{K}$ — вычислимый класс конструктивных булевых алгебр, γ — его вычислимая нумерация, $(\mathcal{M}_\nu, \nu) \in \mathbb{K}$, $(\mathcal{M}_\nu, \nu)$ бесконечна и $|L_\nu(\mathbb{K})| = 1$. Тогда у класса $\mathbb{K}$ имеется счетное число попарно неэквивалентных вычислимых нумераций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве использованы идеи, заимствованные в [3] для случая $|L_\nu(\mathbb{K})| > 1$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если A — конструктивная булева алгебра, тогда существует вычислимая последовательность конечных подалгебр $\{A_i\}$ алгебры A такая, что $\cup A_i = A$ и $A_{i+1} = \mathrm{gr}(A_i \cup a_i)$, где a_i — атом в A_{i+1}.*

Доказательство этого факта можно найти в [2, с. 103, лемма 1]. ∎

Теперь с помощью этого предложения можно устроить аппроксимацию любой конструктивной булевой алгебры. В дальнейшем это построение будет использоваться.

Построим счетное число попарно неэквивалентных нумераций класса $\mathbb{K}$. Основная идея доказательства состоит в том, что если некоторые нумерации γ^i и γ^j сводимы с помощью соответствующей функции φ_m, тогда в нумерации γ^i будет построена бесконечная булева алгебра, а в нумерации γ^j — некоторая конечная. Очевидно, что эти нумерации не могут быть сводимы. В построении будем пользоваться метками двух типов $\langle m, i, j\rangle$, которые будут означать, что сводимость γ^i к γ^j с помощью φ_m уже нарушена и метки типа $[m, i, j]$, предназначенные для того факта, что сводимость может нарушиться не сразу после введения меток $\langle m, i, j\rangle$. Введем обозначение $d(i, s) = |\mathrm{At}(\mathcal{A}^s_{\gamma^i})|$ — число атомов в булевой алгебре $\mathcal{A}_{\gamma^i}$ на шаге s. При построении у каждой нумерации γ^i_k будет определен некоторый последователь γ_y, который может меняться, но только конечное число раз. Сами последователи могут также перемещаться с одних конструктивизаций на другие, но тоже только конечное число раз. В силу того, что $|L_\nu(\mathbf{K}) = 1|$, то в классе $\mathbf{K}$ имеется одна счетная бесконечная булева алгебра, а остальные конечны, тогда локальный конус, соответствующий $\mathcal{A}_\nu$ есть весь $\mathbf{K}$, а соответствующее индексное множество есть все ω. Поскольку в ω существуют Σ^0_2-простые множества, то пусть A — такое множество в $I^\gamma(\mathcal{A}_\nu)$. Часть булевой алгебры $\mathcal{A}_{\gamma^i}$, построенную на некотором шаге t, будем обозначать через $\mathcal{A}^t_{\gamma^i}$. Параллельно в построении будет использоваться список меток $\langle m, i, j\rangle$, которые требуют рассмотрения, т.е. где не нарушена сводимость γ^i к γ^j посредством функции φ_m. В случае введения меток типа $[m, i, j]$ будут определяться значения вспомогательной функции $l(m, i, j, t)$ и конечные модели $D(m, i, j, t, l)$. По ходу построения будет определяться $I(i, t)$ — часть нумерации γ^i, которая вычислена к шагу t.

Пусть $P(x, y)$ - рекурсивный предикат, который определяет множество A; $n \in A \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y > x)P(n, y)$ и $n \notin A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y > x)\neg P(n, y)$.

Проведем построение.

Этап 1.

Шаг 0. Для всех $i \neq j$ определяем $\gamma^i_0 = \gamma^j_0 = \emptyset$, все метки $\langle m, i, j\rangle$ при $i \neq j$ включаем в список для рассмотрения. Для всех $i \in \omega$ полагаем $d(i, 0) = 0$ и $\mathcal{A}^0_{ij} = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Пусть $d^t_{\langle m,i,j\rangle}$ — число нумераций, которые имеют метки не большие, чем $\langle m, i, j\rangle$. Пусть $S^t_{\langle m,i,j\rangle} = \max\{2d^t_{\langle m,i,j\rangle}, 3c_3(m, i, j)\} + 1$.

Шаг $t+1$. Рассмотрим $\gamma^i_{\varphi_m(2k)}$, которые имеют метку $[m, i, j]$, причем соответствующие метки $\langle m, i, j\rangle$ исключены из рассмотрения. Рассмотрим наименьшую метку $[m^*, i^*, j^*]$ такую, что $|\mathrm{At}(D(m^*, i^*, j^*, t, l))| < d(\nu, t+1)$. Для всех меньших $[m', i', j'] < [m^*, i^*, j^*]$ полагаем $l(m', i', j', t+1) = l(m', i', j', t)$ и $D(m', i', j', t+1, l) = D(m', i', j', t, l)$. Для последователей γ_s нумерации $\gamma^j_{\varphi_m(2k)}$ проверяем истинность предиката $P(s,t)$. Если он истинен, то рассмотрим следующие случаи.

1. Имеем $d(i, 2k, t+1) = d(i, 2k, t)$ и $d(j, \varphi_m(2k), t+1) > d(j, \varphi_m(2k), t)$. Поскольку метка $\langle m, i, j\rangle$ исключена из списка для рассмотрения, тогда объявляем ν последователем для $\gamma^j_{\varphi_m(2k)}$. Если $\mathcal{A}_{i,2k} \in I(i,t)$, то это означает, что эта алгебра уже строилась и можно вместо нее построить любую конечную булеву алгебру. Например, если $\mathcal{B}_\mu$ — локально вложимая алгебра для всего класса $\mathbb{K}$, то объявляем μ последователем для γ^i_{2k}. Если же $\mathcal{A}_{i,2k} \notin I(i,t)$, значит это некоторая новая алгебра. Полагаем $I(i, t+1) = I(i,t) \cup \mathcal{A}_{i,2k}$, у нумерации γ^i_{2k} снимаем последователь (если он уже был). Заметим, что из дальнейшего построения будет видно, что если у некоторой нумерации γ^i_{2k} нет последователя, то $\mathcal{A}_{i,2k}$ расти на последующих шагах не будет.

2. Если $d(i, 2k, t+1) > d(i, 2k, t)$ и $d(j, \varphi_m(2k), t+1) = d(j, \varphi_m(2k), t)$, то поступаем наоборот.

3. Имеем $d(i, 2k, t+1) = d(i, 2k, t)$ и $d(j, \varphi_m(2k), t+1) = d(j, \varphi_m(2k), t)$. Раз метка $\langle m, i, j\rangle$ исключена из списка для рассмотрения, тогда изоморфизма между этими булевыми алгебрами нет. Снимаем последователи с нумераций γ^i_{2k} и $\gamma^j_{\varphi_m(2k)}$.

4. Имеем $d(i, 2k, t+1) > d(i, 2k, t)$ и $d(j, \varphi_m(2k), t+1) > d(j, \varphi_m(2k), t)$. Этот случай невозможен, так как метка $\langle m, i, j\rangle$ исключена из рассмотрения, а в этом случае оказывается, что обе алгебры растут к $\mathcal{A}_\nu$ и получаем изоморфизм $\mathcal{A}_{i,2k}$ и $\mathcal{A}_{j,\varphi_m(2k)}$ (это одна и та же $\mathcal{A}_\nu$).

В конце каждого случая переходим на этап 2.

Этап 2.

Рассмотрим такую наименьшую метку $\langle m, i, j\rangle$ в списке для рассмотрения, что $c_3(m, i, j) \le t$ для $k \in \omega$. $k \in S^t_{\langle m,i,j\rangle} \Rightarrow 2k \in \delta\varphi^t_m$. Если такой метки нет, то переходим на этап 3. Иначе рассмотрим один из следующих случаев.

1'. Пусть $\exists k_1 < k_2 < S^t_{\langle m,i,j\rangle}$, $\varphi_m(2k_1) = \varphi_m(2k_2)$ и нумерации $\gamma^i_{2k_1}$ и $\gamma^j_{2k_2}$ свободны от меньших меток. Рассматриваем случаи этапа 1 со следующим изменением. Пусть $d(j, 2k_2, t+1) = d(j, 2k_2, t)$ и $d(i, 2k_1, t+1) = d(i, 2k_1, t)$. Если $A_{j,2k_2} \in I(j,t)$, то эта алгебра уже строилась; поступаем так: ν объявляем последователем для $\gamma^i_{2k_1}$, для $\gamma^j_{2k_2}$ можем построить некоторую конечную булеву алгебру (например, минимальную по вложимости). Если $A_{j,2k_2} \notin I(j,t)$, то в нумерации $\gamma^j_{2k_2}$ построена некоторая новая конечная булева алгебра и тогда определим $I(j,t+1) = I(j,t) \cup A_{j,2k_2}$. Последователь для $\gamma^j_{2k_2}$, если он был, снимаем. Аналогично разбираются все остальные случаи. На все свободные от меньших меток γ^i_k, где $k \leq 2S^t_{\langle m,i,j\rangle}$, ставим метку $\langle m,i,j\rangle$. Все большие метки, если они были, включаем в список для рассмотрения и снимаем их со строящихся нумераций, на них навешиваем метку $\langle m,i,j\rangle$, а саму метку $\langle m,i,j\rangle$ исключаем из рассмотрения.

$2'$. Условие п.$1'$ не выполнено и существует $k \leq S^t_{\langle m,i,j\rangle}$ такое, что $\varphi_m(2k)$ четно и нумерации γ^i_{2k} и $\gamma^j_{\varphi_m(2k)}$ не отмечены меньшими метками. Снова надо рассмотреть случаи 1–4 этапа 1 и соответствующие множества $I(j,t)$ и $I(i,t)$. Поступаем как в случае $1'$, нарушая сводимость. Далее снимаем со всех строящихся нумераций метки $\langle m',i',j'\rangle$, большие $\langle m,i,j\rangle$, и включаем их в список для рассмотрения. Освободившиеся нумерации помечаем меткой $\langle m,i,j\rangle$. Нумерации γ^i_s и γ^j_l, где $s,l \leq \max\{2S^t_{\langle m,i,j\rangle}, \varphi_m(2k)\}$, также помечаем меткой $\langle m,i,j\rangle$, а саму метку $\langle m,i,j\rangle$ исключаем из списка для рассмотрения.

$3'$. Пусть $\varphi_m(2k)$ нечетно. Тогда на $\gamma^j_{\varphi_m(2k)}$ устанавливаем метку $[m,i,j]$, последователь γ_y для нумерации $\gamma^j_{\varphi_m(2k)}$, если он был, перемещаем на γ_{2p+1}, где $2p+1 > 2S^t_{\langle m,i,j\rangle}$ и конструктивизация γ_{2p+1} еще не участвовала в построении. Снова рассматриваем случаи 1-4 этапа 1 с учетом множеств $I(i,t)$ и $I(j,t)$. На нумерацию $\gamma^j_{\varphi_m(2k)}$ ставим $[m,i,j]$. Снимаем все метки, большие $\langle m,i,j\rangle$, и включаем их в список для рассмотрения, отмечаем все освободившиеся нумерации меткой $\langle m,i,j\rangle$. Также навешиваем метку $\langle m,i,j\rangle$ на все нумерации γ^i_r и γ^j_l такие, что $r,l \leq \max\{2S^t_{\langle m,i,j\rangle}, 2p+1\}$.Определяем $D(m,i,j,l(m,i,j,t+1)) \rightleftharpoons A^t_{j,\varphi_m(2k)}$, $l(m,i,j,t+1) = l(m,i,j,t)+1$, если $l(m,i,j,t)$ определено, иначе полагаем $l(m,i,j,t+1)=0$. Метку $\langle m,i,j\rangle$ исключаем из списка для рассмотрения.

Этап 3.

У нумерации γ^i_{2p}, которая не имеет последователя и $c(i,2p)\leq t$, объявляем последователем ν. Для всех $i\leq t$ находим γ_k, который есть последователь для γ^i. Объявляем γ_k последователем нумерации γ^i_{2p+1} с наименьшим $2p+1$ не имеющем последователя.

Этап 4.

Для любой нумерации γ^i_k с последователем γ_y и не отмеченной меткой $[m,i,j]$ или с меткой $[m,i,j]$, но с ложным значением предиката $P(y,t)$ полагаем $\mathcal{A}^{t+1}_{i,k}=\mathrm{gr}(\mathcal{A}^t_{i,k}\cup\mathcal{A}^t_{\gamma_y})$. Если же γ^i_k с последователем γ_y отмечена меткой и $P(y,t)$ истинен или у γ^i_k нет последователя, то $\mathcal{A}^{t+1}_{i,k}=\mathcal{A}^t_{i,k}$, и γ^i_k — конструктивизация $\mathcal{A}_{i,k}$. Построение равномерно по i,k, тогда γ^i — вычислимая нумерация для класса $\mathbb{K}_i=\{(\mathcal{A}_{i,k},\gamma^i_k\mid k\in\omega\}$.

Конец построения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если на некотором шаге выполнен этап 2, тогда выполнено либо* $1'$, *либо* $2'$, *либо* $3'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на некотором шаге $t+1$ выполняется этап 2 и $1'$ не выполнено, тогда после шага t метками, которые не превосходят $\langle m,i,j\rangle$ отмечено $d^t_{\langle m,i,j\rangle}$ нумераций. Из множества $\{2k|k\leq S^t_{\langle m,i,j\rangle},2k\in\delta\varphi^t_m\}$ чисел вида $2k$ таких, что нумерация γ^i_{2k} отмечена меткой, не превосходящей $\langle m,i,j\rangle$, не более $d^t_{\langle m,i,j\rangle}$. Оставшихся чисел в этом множестве не менее $d^t_{\langle m,i,j\rangle}+1$. Поскольку $1'$ не выполнено, тогда функция φ_m на разных элементах этого множества тоже дает различные значения. Значит, существует элемент $2k\in\{2k|k\leq S^t_{\langle m,i,j\rangle},2k\in\delta\varphi^t_m\}$ такой, что нумерация $\gamma^i_{\varphi_m(2k)}$ не отмечена меткой, не превосходящей $\langle m,i,j\rangle$. Если $\varphi_m(2k)$ четно, то выполнен случай $2'$, если $\varphi_m(2k)$ нечетно, тогда выполнен случай $3'$. ∎

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Каждая метка стабилизируется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения совпадает с доказательством сходного утверждения теоремы 4 из [3]. ∎

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. γ^i — *вычислимая нумерация для* $\mathbb{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Установим, что $\mathbb{K}_i \subseteq \mathbb{K}$. Каждая нумерация γ_k^i получает последователя. Если она отмечена меткой $\langle r, l, s\rangle$, то последователь может смениться только при навешивании меньшей метки. Если на ней стоит метка $[m, i, j]$, то последователь может смениться только один раз и притом на ν. Все метки стабилизируются. Значит каждая нумерация γ_k^i получает метку, которая уже не снимается, а значит и ее последователь γ_y уже не снимается. Откуда $\gamma_k^i \simeq_{rec} \gamma_y$, а значит и $(A_{i,k}, \gamma_k^i) \in \mathbb{K}$.

2) Покажем теперь, что $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_i$. Пусть $i \in \omega$. По этапу 3 каждая γ_y будет некоторым последователем γ_k^i при некотором k. Последователь может перемещаться только конечное число раз, поскольку снятие меток происходит только в случае навешивания меньших меток. Пусть γ_r^i — такая конструктивизация, что γ_y ее последователь, который не двигается на дальнейших шагах. Тогда по построению $\gamma_y \simeq_{rec} \gamma_r^i$ или $(A_{\gamma_y}, \gamma_y) \in \mathbb{K}_i$.

Из вышеизложенного получаем, что $\mathbb{K} = \mathbb{K}_i$, значит для каждого $i \in \omega$ выполнено $\gamma^i \in L_0(\mathbb{K})$. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *$\forall i \neq j$ выполнено $\gamma^i \not\equiv \gamma^j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так и существует m такое, что $(\forall x)\, \gamma^i(x) \simeq_{rec} \gamma^j(\varphi_m(x))$. Рассмотрим метку $\langle m, i, j\rangle$. Существует шаг t, на котором она стабилизируется. Так как φ_m общерекурсивна, тогда выполнен этап 2 построения и значит выполнено либо $1'$, либо $2'$, либо $3'$. Если выполнен случай $1'$, то существуют $k_1 \neq k_2$ такие, что $\varphi_m(k_1) = \varphi_m(k_2)$. Тогда по конструкции одна из $\gamma_{k_1}^i$ и $\gamma_{k_2}^j$ строится по бесконечной булевой алгебре, а вторая по конечной. Они не могут быть рекурсивно изоморфны.

Если выполнен $3'$, тогда существуют $k_1, \cdots, k_l$ такие, что $1 \leq s \leq l$ и $\gamma^j_{\varphi_m(k_s)}$ отмечены метками $[m, i, j]$. Существует $t_2 > t \mid D(m, i, j, t_2, s) = D(m, i, j, t, s)$, но тогда выполнен один из случаев 1–4 этапа 1 и в одной нумерации будет построена бесконечная булева алгебра, а в другой некоторая конечная.

Если выполнен $2'$, то снова построение дает γ_k^i конечную, а $\gamma^j_{\varphi_m(2k)}$ построится по A_ν. Во всех трех случаях получаем противоречие. ■

Теорема 1 доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Этим же методом может быть доказана и более общая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть вычислимый класс* $\mathbb{K}$ *содержит систему* A *такую, что для любой* $B \in \mathbb{K}$ *выполнено условие локальной вложимости* $B \hookrightarrow A$. *Тогда у класса* $\mathbb{K}$ *существует счетное число попарно неэквивалентных вычислимых нумераций.*

Перейдем теперь к усилению теоремы Селиванова для вычислимых классов конструктивных булевых алгебр. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если вычислимый бесконечный класс конструктивных булевых алгебр* $\mathbb{K}$ *содержит* A *и* B *— бесконечные не рекурсивно изоморфные системы, то существуют* γ, δ *— вычислимые нумерации класса* $\mathbb{K}$ *такие, что* $\forall n$; *если* $\pi_n \in L(\mathbb{K})$, *то неверно, что* $\pi_n \leq \gamma$ *и* $\pi_n \leq \delta$, *т.е.* γ *и* δ *не имеют под собой ни одного элемента.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем пошаговым построением этих нумераций. Основная идея доказательства состоит в следующем: если некоторая нумерация π_n сводится к γ и δ с помощью общерекурсивных функций φ_i и φ_j соответственно на некотором начальном отрезке, то $\forall x$ выполнены условия $\pi_n(x) \simeq_{rec} \gamma(\varphi_i(x))$ и $\pi_n(x) \simeq_{rec} \delta(\varphi_j(x))$. Тогда на образе некоторого элемента y $\varphi_i(y)$ и $\varphi_j(y)$ в нумерации γ построим A, а в нумерации δ построим B. Если некоторое $\pi_n \leq \gamma$ и $\pi_n \leq \delta$, то получаем, что $A \simeq_{rec} B$, что неверно по условию.

Будем использовать два списка натуральных чисел γ–список и δ список. На эти числа будем ставить метки вида A_a^m. Также нами будет использоваться метка типа $[m]$, которая будет отмечать построенную часть некоторой нумерации на $m = l(s)$. Наличие A_a^m–метки на числе n из γ–списка на шаге s означает, что $\gamma^s(\cdot)$ строится по типу $\alpha(a)$. Здесь α — некоторая нумерация класса $\mathbb{K}$.

Проведем построение.

Шаг $s = 0$. $\gamma^0 = \delta^0 = \emptyset$. Никаких меток нет.

Шаг $s > 0$. Пусть n такое, что $n = \langle i, j \rangle$. Пусть $m = l(s)$. После шага $s - 1$ конечное множество чисел в γ–, δ–списках отмечено некоторыми метками, и γ^{s-1}, δ^{s-1} уже определены

($s \geq 0$). Некоторые числа в γ– и δ–списках также имеют метку $[m]$.

Через $I_\gamma(a, s)$ будем обозначать множество чисел в γ–списке, которые имеют некоторые метки. На каждом шаге s это множество будет конечным и значит, рекурсивным. Аналогично будем определять множество $I_\delta(a, s)$ для δ–списка.

Этап 1.

Если у γ–списка нет метки A_0^m, то метку A_0^m ставим около наименьшего непомеченного числа в γ–списке. Помечаем это число также меткой $[m]$. Так же поступаем и с δ–списком. Если же у γ–списка уже поставлена метка A_a^m для некоторого a (а значит, поставлена некоторая метка $[m]$), то ничего не делаем и переходим к рассмотрению δ–списка. Если и в δ–списке есть метка типа A_0^m, то обозначим через e_γ наибольшее число a такое, что метка A_a^m стоит в γ–списке. Аналогично определяем e_δ. Переходим на этап 2.

Этап 2.

Пусть $k_1 < \cdots < k_n < s$ таковы, что $\varphi_i(k_d)$ отмечены некоторой меткой в γ–списке и числа $\varphi_j(k_d)$ также имеют некоторую метку в δ–списке. Рассмотрим k_{n+1} в π_n–списке. Возможен один из следующих случаев.

1. Число $\varphi_i(k_{n+1})$ не имеет метки в γ–списке, а число $\varphi_j(k_{n+1})$ имеет некоторую метку в δ–списке, т.е. $\varphi_i(k_{n+1}) \notin$ $\notin I_\gamma(a, s)$ и $\varphi_j(k_{n+1}) \in I_\delta(a, s)$. Ничего не делаем, переходим к (*). Если имеет место симметричная ситуация, то также переходим к (*).

2. Разобьем его на несколько подслучаев.

а) Оба числа $\varphi_i(k_{n+1})$ и $\varphi_j(k_{n+1})$ еще не помечены. Пусть $\alpha(N_0) = A$ и $\alpha(N_1) = B$. Тогда на $\varphi_i(k_{n+1})$ из γ–списка ставим метку $A_{N_0}^m$, ставим на числе $\varphi_i(k_{n+1})$ метку $[m]$, все метки $A_a^{m'}$, где $m' > m$, перемещаем на наименьшие непомеченные числа в γ–списке, также ставим на них метку $[m]$, а на освободившееся место ставим метки $A_{N_0}^m$ и метку $[m]$. Для всех чисел из начального отрезка, которые имеют метку $[m'] > [m]$ и на этом шаге не перемещаются, меняем только метку $[m']$ на $[m]$. У числа $\varphi_j(k_{n+1})$ в δ–списке ставим метку $A_{N_1}^m$, все большие метки также меняем на $A_{N_1}^m$. Аналогично заменяем метки типа $[m]$. Заметим, что постановка метки типа $[m]$ на начальный отрезок строящейся нумерации будет фиксировать то, что уже построено. Переходим к $(*)$.

б) Оба числа имеют некоторые метки. Пусть $\varphi_i(k_{n+1})$ отмечено меткой $A_{a_1}^{m_1}$, а $\varphi_j(k_{n+1})$ отмечено меткой $A_{a_2}^{m_2}$. Также пусть эти числа помечены и метками $[m_3]$ и $[m_4]$ соответственно. Тогда поступаем так: в γ списке все метки $A_a^{m'}$ с $m' > m_1$ снимаем и заменяем их на $A_{N_0}^m$, а также устанавливаем у этих чисел метку $[m_3]$, если $[m] > [m_3]$, иначе ставим метку $[m]$. Снятые метки перемещаем на наименьшие непомеченные числа из γ–списка, также ставим там метку $[m_3]$. Также все метки для которых $[m] > [m_3]$ помечаем вместо $[m]$ меткой $[m_3]$. В δ-списке все метки $A_a^{m'}$, где $m' > m_2$, заменяем на $A_{N_1}^m$, а также устанавливаем у них метку $[m_4]$, если их метки $[m] > [m_4]$. Снятые метки также перемещаем на наименьшие непомеченные числа δ–списка, а также устанавливаем на них метку $[m_4]$, если $[m] > [m_4]$, иначе ставим метку $[m]$. Метки $A_{e_7+1}^m$ и $A_{e_8+1}^m$ устанавливаем около наименьших непомеченных чисел в γ– и δ-списках. Также проставляем у этих чисел метку $[m]$. Переходим к $(*)$.

$(*)$ Полагаем

$$\gamma^s := \begin{cases} \gamma^{s-1} \cup \alpha(a), & \text{если } \varphi_i(k_{n+1}) \text{ имеет метку } A_a \text{ в } \gamma\text{–списке}, \\ \gamma^s, & \text{если } s+1 \text{ не имеет меток в } \gamma\text{–списке}. \end{cases}$$

Аналогично поступаем с δ-списком, заменяя φ_i на φ_j.

Конец построения.

Заметим, что наше построение дает, что γ и δ — вычислимые нумерации класса $\mathbb{K}$, так как из-за введения вспомогательной метки типа $[m]$ начальный кусок перестраивается только при установке меньшей метки и так как к концу каждого шага все числа соответствующего списка отмечены некоторой меткой типа $[m]$, а также все передвинутые метки типа A_a^m также приобретают метку $[m]$, которая снимается при установке меньшей метки, то через конечное число шагов все метки стабилизируются, а также ни одна из них потеряна не будет.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Нумерации γ и δ не имеют под собой ни одного элемента.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это неверно и $\exists n_0$ такое, что $\pi_{n_0} \leq \gamma$ и $\pi_{n_0} \leq \delta$ с помощью φ_i и φ_j соответственно. Пусть γ и δ определяются на некотором шаге s. Рассмотрим этап 2 построения на этом шаге. Если выполняется 2,а, то при переходе к $(*)$ в нумерации γ построится весь класс $\mathbb{K}$, а в нумерации δ, поскольку на числе вида k_{n+1} метки не появляется, построится лишь конечная часть $\mathbb{K}$, а так как $\pi_{n_0} \leq \delta$, тогда π_{n_0} нумерует не весь $\mathbb{K}$, а лишь некоторую его часть, т.е. $\pi_{n_0} \notin L_0(\mathbb{K})$.

Пусть теперь выполняется 2,б. Тогда по построению числа $\varphi_i(k_{n+1})$ и $\varphi_j(k_{n+1})$ получают метки $A^m_{N_0}$ и $A^m_{N_1}$ соответственно. Метки могут меняться только если поставится меньшая метка. Поэтому есть m_1, m_2 начиная с которых метки типа $A^m_{N_0}$ и $A^m_{N_1}$ постоянно стоят при любых m. Тогда по $(*)$ на месте $\varphi_i(k_{n+1})$ будет построена $\mathcal{A}$, а на $\varphi_j(k_{n+1})$ построится $\mathcal{B}$. Тогда получаем, что $\mathcal{A} = \gamma(\varphi_i(k_{n+1})) \simeq_{rec} \pi_{n_0}(k_{n+1}) \simeq_{rec} \delta(\varphi_j(k_{n+1})) = \mathcal{B}$. Противоречие. ■

Литература

1. ХУТОРЕЦКИЙ А.Б. Две теоремы существования для вычислимых нумераций // Алгебра и логика. - 1969. - Т.8, № 4. - С. 483 492.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры. — Новосибирск: Наука, 1988.

3. ДОБРИЦА В.П. О полурешетках вычислимых индексаций классов конструктивных моделей //Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 558–576.

4. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М., 1972.

Поступила в редакцию
14 февраля 2000 года