ОБНАРУЖЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ
(Вычислительные системы)

1999 год **Выпуск 166**

УДК 519

ЛОГИКА И ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ[1]

К.Ф. Самохвалов

1. Логическое содержание специальной теории относительности

Все используемые без специальных оговорок формальные языки являются здесь языками первого порядка без равенства.

Пусть U — аксиоматическая система в языке сигнатуры $S = (g_1, \ldots; G_1, \ldots, R, \check{R})$, где $R, \check{R}$ — символы одноместных предикатов, а среди предикатных символов $G_1, \ldots$ может быть и символ равенства. Тогда посредством $\overset{o}{U}$ будем обозначать систему сигнатуры $\check{S} = (\check{g}_1, \ldots; \check{G}_1, \ldots, \check{R}, R)$, получающуюся из U заменой g_1 на $\check{g}_1, \ldots; G_1$ — на $\check{G}_1, \ldots, R$ — на $\check{R}$, $\check{R}$ — на R (подразумевается, что арности заменяемых символов сохраняются).

Аксиоматическая система W в языке сигнатуры

$$\Sigma = (g_1, \check{g}_1, \ldots; G_1, \check{G}_1, \ldots, R, \check{R})$$

называется $(U, \overset{o}{U})$-*симметричной*, если $W = \mathrm{Th}(U \cup \overset{o}{U})$; здесь $U, \overset{o}{U}$ — аксиоматические системы указанного выше типа с сигнатурами S и $\check{S}$ соответственно, Th указывает на дедуктивное замыкание (в логике первого порядка без равенства) множества $U \cup \overset{o}{U}$.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов: РФФИ № 97-06-80312 и РГНФ № 99-03-00204.

Пусть T — аксиоматическая система в языке сигнатуры $\sigma = (g_1, \ldots; G_1, \ldots)$. Тогда аксиоматическая система W в языке сигнатуры Σ называется $(U, \mathring{U}$–симметричной *над* T, если W — $(U, \mathring{U})$–симметричная система и U есть расширение T с помощью какой–то определяющей аксиомы для R и еще одной аксиомы, связывающей R и $\check{R}$ (R и $\check{R}$ не входят в сигнатуру σ): $\forall x(R(x) \to \neg\check{R}(x))$.

Всякая $(U, \mathring{U})$–симметричная над T аксиоматическая система является также, $(U, \mathring{U})$–симметричной над $\check{T}$.

Введем еще одно понятие. Пусть T такова же, как и в предыдущем определении. Тогда аксиоматическая система W в языке сигнатуры Σ называется *слабо* $(U, \mathring{U})$–симметричной *над* T, если W — $(U, \mathring{U})$–симметричная система и U есть расширение T с помощью какой–то определяющей аксиомы для R и еще одной аксиомы, связывающей R и $\check{R}$ (R и $\check{R}$ не входят в сигнатуру σ): $\forall x(R(x) \to \neg\check{R}(x))$.

Всякая слабо $(U, \mathring{U})$–симметричная над T аксиоматическая система является также слабо $(\mathring{U}, U)$-симметричной над $\check{T}$.

Теперь несколько замечаний, чтобы мотивировать последующую формулировку "логического содержания специальной теории относительности".

1. Как известно [1, с.112–115], *принцип относительности равномерного поступательного движения* гласит: все физические явления при одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех так называемых *инерциальных* системах, т.е. в системах, движущихся прямолинейно и равномерно относительно системы неподвижных звезд. Отсюда вовсе не следует, что некоторое *данное* явление наблюдается во всех этих системах одинаково. Напротив, если, например, точка M_1 покоится относительно одной инерциальной системы, скажем α, то относительно другой, скажем β, она движется.[2] Но если начальные условия движения

[2]Здесь и дальше предполагается, что α и β — инерциальные системы, движущиеся относительно друг друга (с ненулевой скоростью, меньшей скорости света).

относительно системы β другой точки M_2 взять такими же, каковы они были для точки M_1 относительно системы α, то оба эти движения будут одинаковыми. Иными словами *уравнения* физики имеют *один и тот же вид* в обеих системах α и β (или, как еще говорят, *инвариантны* по отношению к переходу от системы отсчета α к системе отсчета β), но *результаты конкретных измерений конкретных* событий должны, вообще говоря, при этом переходе *изменяться*.

2. Известно также [с.168–190], что в теории относительности "одновременность" — операционально определяемое понятие. Это значит, что одновременность или не одновременность двух конкретных событий — результат определенной измерительной процедуры. Но тогда, в силу п.1, эта процедура, с одной стороны, воспроизводима в каждой инерциальной системе, а, с другой стороны, конкретные результаты применения этой процедуры должны, вообще говоря, зависеть от того, в какой именно инерциональной системе она осуществляется. Фактически, рассматриваемая процедура определена в релятивистской физике таким образом, что, если она реализуется в системе отсчета α для измерения пространственно разнесенных событий E_1 и E_2, а для измерения *тех же* событий аналогичная процедура воспроизводится также и в системе отсчета β, то результаты этих двух измерений удовлетворяют следующему условию. Если E_1 и E_2 одновременны согласно результату измерения в α, то они не одновременны согласно результату измерения в β, и наоборот, если E_1 и E_2 одновременны согласно результату измерения в β, то они не одновременны согласно результату измерения в α.

Выразим пп.1,2 в иной форме. Давайте выделим тот фрагмент физики (те уравнения со всеми их следствиями), который необходим для упомянутого определения понятия одновременности. Путем подходящей логической обработки этот фрагмент, отнесенный, скажем, к инерциальной системе α, всегда можно представить как непротиворечивую аксиоматическую систему T

указанного выше вида[3] Дифференциально расширим T аксиомой, определяющей новый одноместный предикатный символ R таким образом, чтобы $\mathrm{R}(x)$ можно было интерпретировать как высказывательную форму "если x — пара пространственно разнесенных (в системе отсчета α) событий, то x — пара одновременных (в системе отсчета α) событий". Затем продолжим процесс расширения, введя еще один предикатный символ $\check{\mathrm{R}}$ с помощью аксиомы $\forall x(\mathrm{R}(x) \to \neg\check{\mathrm{R}}(x))$. То, что получилось, обозначим через U.

Теперь указанным выше способом получим из аксиоматической системы U соответствующую ей аксиоматическую систему $\overset{o}{U}$. В силу п.1 аксиоматическую систему $\overset{o}{U}$ можно трактовать как представление относительно β того же фрагмента физики, чьим представлением относительно α является аксиоматическая система U. При этом, очевидно, предикат $\check{\mathrm{R}}$ играет в $\overset{o}{U}$ ту же роль, какую в U играет предикат R. А это значит, он трактуется таким образом, что $\check{\mathrm{R}}(x)$ соответствует высказывательной форме "если x — пара пространственно разнесенных (в системе отсчета β) событий, то x — пара одновременных (в системе отсчета β) событий". В силу п.2 аксиоматические системы U и $\overset{o}{U}$ могут быть объединены в слабо $(U, \overset{o}{U})$-симметричную над T аксиоматическую систему $W = \mathrm{Th}(U \cup \overset{0}{U}$ таким образом, что W будет *консервативным* расширением T.

Логическое содержание специальной теории относительности — это утверждение, что физика содержит фрагмент, представляемый аксиоматической системой W, которая является слабо $(U, \overset{o}{U})$-симметричной над соответствующей другому фрагменту физики непротиворечивой системой T и является консервативным расширением T. Логическое содержание не следует путать с математическим содержанием, с физическим — тем более. Первое, так сказать, "менее богато", чем два последних.

---

[3] Например, T можно получить путем формализации выбранного фрагмента физики в теории множеств ZF и последующей трактовки логического равенства в этой формализации как сигнатурного термина.

2. Обобщенный принцип относительности

Итак, логическое содержание специальной теории относительности — не что иное, как метавысказывание о двух конкретных (только что охарактеризованных в конце предыдущего параграфа) аксиоматических системах T и W. Это метавысказывание можно рассматривать как результат подстановки конкретных T и W вместо соответственно метапеременных X и Y, входящих в метапредикат "X — непротиворечивая аксиоматическая система, а Y консервативно расширяет X и слабо $(U,\overset{o}{U})$-симметрична над X". Такой метапредикат — обозначим его через $G(X,Y)$ — и есть то, что в данной статье называется "обобщенным принципом относительности", точнее говоря *узким обобщенным принципом слабой относительности*.

Рассмотрим несколько другой метапредикат "X — непротиворечивая автоматическая система, а Y консервативно расширяет X и $(U,\overset{o}{U})$-симметрична над X".Обозначим его через $G^0(X,Y)$ и назовем узким обобщенным принципом *сильной* относительности. Очевидно, для любых X,Y справедлива импликация $G^0(X,Y) \to G(X,\acute{Y})$, где аксиоматическая система $\acute{Y}$ получается из аксиоматической системы Y заменой в последней аксиомы $\forall x(\mathrm{R}(x) \leftrightarrow \neg\check{\mathrm{R}}(x))$ (и если она вообще есть в Y) на аксиому $\forall x(\mathrm{R}(x) \to \neg\check{\mathrm{R}}(x))$. А раз так, то достаточные условия выполнимости предиката $G^0(X,Y)$ являются также достаточными условиями выполнимости предиката $G(X,\acute{Y})$. Иными словами, найдя достаточные условия выполнимости узкого обобщенного принципа *сильной* относительности, мы тем самым укажем достаточные условия выполнимости узкого обобщенного принципа *слабой* относительности. Вопрос о достаточных условиях выполнимости узкого обобщенного принципа сильной относительности решает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если X — непротиворечивая аксиоматическая система, а Y – $(U,\overset{o}{U})$-симметричная система над X, то Y консервативно расширяет систему X тогда, когда определяющая аксиома для* R *в* U *такова, что предложения* $\exists x\neg\mathrm{R}(x)$ *и* $\exists x\mathrm{R}(x)$ *доказуемы в* U (ср. [2, с.75–77]).

Мы рассмотрели две версии (слабую и сильную) узкого обобщенного принципа относительности. Рассмотрим также две аналогичные версии несколько менее ограничительного обобщенного принципа относительности. А именно: метапредикат "X — непротиворечивая аксиоматическая система, а Y непротиворечиво расширяет X и слабо $(U,\overset{o}{U})$-симметричная над X" назовем *широким* обобщенным принципом *слабой* относительности, а предикат "X — непротиворечивая аксиоматическая система, а Y непротиворечиво расширяет X и $(U,\overset{o}{U})$-симметрична над X" назовем *широким* обобщенным принципом *сильной* относительности. Взаимоотношения между этими двумя новыми версиями совершенно аналогичны прежним, при этом вопрос о достаточных условиях выполнимости широкого обобщенного принципа сильной относительности решает следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если X — непротиворечивая аксиоматическая система, и Y – $(U,\overset{o}{U})$-симметричная система над X, то Y непротиворечиво расширяет систему X тогда, когда определяющая аксиома для* R *в U такова, что предложения $\forall x \neg \mathrm{R}(x)$ и $\forall x \mathrm{R}(x)$ не доказуемы в U* (ср.[3,с.52–57]).

3. Комментарии

Предыдущие рассуждения мотивируют следующее определение. Если аксиоматическая система Y имеет непротиворечивую подсистему X такую, что X и Y удовлетворяют узкому или широкому обобщенному принципу слабой или сильной относительности, то Y называется *логически похожей на (специальную) теорию относительности*. Но тогда приведенные две теоремы говорят, в сущности, о том, как и при каких условиях можно произвольную научную теорию X превратить в некую теорию Y, логически похожую на теорию относительности. Но, разумеется, они не говорят, что всегда, когда это только возможно, стоит произвольную научную теорию подвергать такой операции. Все зависит от конкретных обстоятельств, содержательного (не формального) характера. Чтобы намекнуть читателю, какие случаи могут при этом встретиться, обратимся к примерам.

Первопорядковую арифметику Пеано N можно рассматривать как формальную теорию в языке исчисления предикатов без равенства, если символ равенства $\approx$ считать сигнатурным предикатным символом. Пусть $\mathrm{A}(x)$ — какая-то формула арифметики, слабо определяющая рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество $\mathbf{R}$ в N (предполагаем, что N непротиворечива) и такая, что в N доказуемы высказывания $\exists\neg\mathrm{A}(x)$ и $\exists x\mathrm{A}(x)$.[4] Расширим арифметику N, добавляя к ее аксиомам еще две:

(i) $\forall x(\mathrm{R}(x) \leftrightarrow \mathrm{A}(x))$;

(ii) $\forall x(\mathrm{R}(x) \leftrightarrow \neg\breve{\mathrm{R}}(x))$.

Полученную таким образом систему в сигнатуре $S_0 = (+, *, ', 0; \approx, \mathrm{R}, \breve{\mathrm{R}})$ обозначим через U_0. Отправляясь от U_0, образуем систему $\breve{U}_0$, как указано выше. Очевидно, сигнатурой системы $\breve{U}_0$ будет $\breve{S}_0 = (\breve{+}, \breve{*}, \breve{'}, \breve{0}; \breve{\approx}, \breve{R}, R)$.

Рассмотрим систему W_0 сигнатуры $\Sigma_0 = (+, \breve{+}, *, \breve{*}, ', \breve{'}, 0, \breve{0}; \approx, \breve{\approx}, \mathrm{R}, \breve{\mathrm{R}})$, положив $W_0 = \mathrm{Th}(U_0 \cup \breve{U}_0)$. Ясно, что W_0 – $(U_0, \breve{U}_0)$–симметричная над N система, причем удовлетворяющая условиям приведенной выше теоремы в качестве Y, если N рассматривать в качестве X. Значит, N и W_0 удовлетворяют узкому обобщенному принципу сильной относительности: $G^0(N, W_0)$. Но это обстоятельство вызывает ряд интересных вопросов

Как уже сказано, формула $\mathrm{A}(x)$ выбрана так, чтобы она слабо определяла в N, а значит, и в U_0 (ибо U_0 — консервативное расширение N) рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество $\mathbf{R}$. Точно так же можно утверждать, что формула $\breve{\mathrm{A}}(x)$, получаемая из $\mathrm{A}(x)$ при указанном выше переходе от U_o к $\breve{U}_0$, слабо

---

[4] Числовое n–местное отношение Q называется *слабо определимым* в системе S сигнатуры $\Omega \supseteq \sigma$, где σ — сигнатура арифметики Пеано, если существует формула B сигнатуры Ω со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ такая, что для натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n$ и их нумералов $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n$

$$(k_1, \ldots, k_n) \in Q \Leftrightarrow \text{в } S \text{ доказуемо } B\ (\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n).$$

Если арифметика Пеано непротиворечива, а система S — консервативное расширение этой арифметики, то числовое отношение слабо определимо в S тогда и только тогда, когда оно рекурсивно перечислимо.

определяет в $\check{N}$, а значит, и в $\check{U}_0$ (ибо $\check{U}_0$ — консервативное расширение $\check{N}$) некоторое рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество, скажем, $\check{\mathbf{R}}$. Какие — рекурсивно перечислимые или нет — множества слабо определяют формулы $\mathrm{A}(x)$ и $\check{\mathrm{A}}(x)$ в системе W_0? Вопрос не имеет однозначного ответа и, следовательно, бессмысленен. В самом деле, с одной стороны, W_0 консервативно расширяет системы N и $\check{N}$, и эти системы как и формулы $\mathrm{A}(x)$ и $\check{\mathrm{A}}(x)$, играют совершенно симметричные роли в W_0. С другой стороны, согласно аксиомам (i), (ii), в W_0 выводимо предложение $\forall x(\mathrm{A}(x) \leftrightarrow \neg\check{\mathrm{A}}(x))$. В результате, множество $\mathbf{R}$ мы обязаны полагать рекурсивно перечислимые, а множество $\check{\mathbf{R}}$ — не рекурсивно перечислимым, *если* мы считаем арифметикой Пеано систему N. Наоборот, *если* мы считаем арифметикой Пеано систему $\check{N}$, то множество $\mathbf{R}$ мы обязаны полагать *не* рекурсивно перечислимым, а множество $\check{\mathbf{R}}$ — рекурсивно перечислимым. Спрашивать здесь, какая из этих систем, N или $\check{N}$, является подлинной арифметикой, а какая нет, столь же нелепо, как и спрашивать в теории относительности, какая из инерциальных систем отсчета α или β является правильной, а какая нет. Дело не в том, что только одна из систем N или $\check{N}$ представляет "настоящую" арифметику — обе они в равной степени могут считаться описаниями арифметики, — но в том, что рамках W_0 имеет смысл не "абсолютное" понятие "быть рекурсивно перечислимым множеством", а "релятивистское" понятие "быть рекурсивно перечислимым *относительно* N (или $\check{N}$)". Очевидна аналогия с релятивистским понятием одновременности.

В этой связи возникает другой вопрос: а как быть в рассматриваемой ситуации с тезисом Чёрча? Тут возможны два подхода.

Во-первых, мы можем считать, что применительно к W_0 тезис Чёрча равнозначен утверждению: множество $\mathbf{R}$ эффективно перечислимо тогда и только тогда, когда не эффективно перечислимо множество $\check{\mathbf{R}}$. Отсюда невозможно извлечь никаких новых интересных следствий для философии математики, и тем самым факту относительности рекурсивной перечислимости придается статус всего лишь формального "курьеза".

Во вторых, мы можем пытаться релятивизовать само понятие "эффективности" как *эмпирической* возможности исполнить с любой желаемой точностью любую программу для абстрактной машины Тьюринга. Возможный успех такой попытки существенно повлиял бы, в частности, на философию математики. В свою очередь, первый шаг на пути к нему должен, очевидно, заранее предполагать удачный поиск детерминированных физических процессов, принципиально не модулируемых с нужной точностью на любых вычислительных устройствах, основанных на общественных физических эффектах. Я не знаю, ведутся ли где-нибудь подобные разработки.

Рассмотрим еще один пример. Принято считать, что в так называемых "правовых государствах" человек может быть официально объявлен преступником только по приговору суда и только по конкретному обвинению. Это значит, что всякому такому приговору должна предшествовать формулировка обвинения и установление факта применимости этой формулировки к данному лицу (подсудимому).

Что такое формулировка обвинения? Как бы это понятие ни трактовалось юристами, с логической точки зрения, во всяком случае, оно есть некий одноместный предикат, скажем $R(x)$, имеющий смысл сокращения для фразы "x виновен в том-то и том-то". Причем предполагается, что этот предикат *определим* в рамках некоторой, назовем ее юридической, *теории*. Последняя может включать в себя уголовный и гражданский кодексы, подзаконные акты, постановления правительства и т.д. Не вдаваясь в детали строения и обоснования такой теории, будем предполагать, что — опять-таки с логической точки зрения — ее всегда можно представить в виде аксиоматической системы T указанного в самом начале статьи вида. Таким образом, суд имеет дело с аксиоматической системой D, являющейся дефинициальным расширением системы T с помощью определяющей аксиомы для R: $D = \mathrm{Th}(T \cup \{\forall x(\mathrm{R}(x) \leftrightarrow \mathrm{F}(x))\})$, где $\mathrm{F}(x)$ — дефиниенс в T для $\mathrm{R}(x)$.

Следует заметить, что если суд не вырождается в фарс, то определяющая аксиома $\forall x(\mathrm{R}(x) \leftrightarrow \mathrm{F}(x))$ определяет формулировку обвинения $\mathrm{R}(x)$ таким образом, чтобы выполнялось следующее условие (*условие невырожденности*): в D не доказуемы предложения $\forall x \mathrm{R}(x)$, $\forall x \neg \mathrm{R}(x)$.

Модели аксиоматической системы D, носители которых суть множества людей, — обозначим класс всех таких моделей через $\mathcal{M}$ — можно рассматривать как *возможные (законные, юридически допустимые) истолкования* терминов, употребляемых в судопроизводстве, а стало быть, выбор конкретной модели из $\mathcal{M}$ — как выбор конкретного такого истолкования.

Процесс суда развивался по следующей схеме.Выбирается конкретная модель $M \in \mathcal{M}$, содержащая в составе своего носителя подсудимого, и суд, ошибочно или нет, выясняет, принадлежит ли подсудимый подмножеству $\mathbf{R}$, соответствующему предикату $\mathrm{R}(x)$, носителя $|M|$ модели M. Если суд решает, что подсудимый $\in \mathbf{R}$, то подсудимый объявляется преступником. Если суд решает, что подсудимый $\notin \mathbf{R}$, то подсудимый является невиновным. Заметим, что исход суда зависит, среди прочего, от выбора истолкования M. Этот выбор целиком лежит на ответственности суда, так как любая другая модель, скажем, M' из $\mathcal{M}$ такая, что подсудимый принадлежит $|M'|$, юридически столь же допустима, как и M.

Если расширить систему D аксиомой $\forall x(\mathrm{R}(x) \leftrightarrow \neg \check{\mathrm{R}}(x))$, обозначить расширенную систему через U, и по уже известной схеме получить сначала систему $\mathring{U}$, а затем $(U, \mathring{U})$-симметричную над T систему W, то мы обнаружим, что условие невырожденности с точностью до обозначений совпадает с условиями теоремы 2. А это значит, что система W непротиворечива и, следовательно, имеет модели. Очевидно, среди этих моделей всегда будут и модели, носители которых суть множества людей, содержащие в своем составе подсудимого. Рассмотрим произвольную такую модель K. Обеднение этой модели до сигнатуры системы D дает модель L, которая, очевидно, принадлежит классу $\mathcal{M}$, и, следовательно, является юридически допустимым истолкованием терминов. Обеднение этой модели до сигнатуры системы $\check{D}$ дает модель L', которая, очевидно, также принадлежит классу $\mathcal{M}$, и, следовательно, также является юридически допустимым истолкованием терминов. Допустим, в модели L предикату $\mathrm{R}(x)$ соответствует подмножество $\mathbf{I}$ множества $|K|$, а в модели L' этому предикату соответствует подмножество $\check{\mathrm{I}}$ множества $|K|$ (в модели K подмножеству $\check{\mathrm{I}}$ соответствует предикату $\check{\mathrm{R}}(x)$). Тогда, в силу аксиомы $\forall x(\mathrm{R}(x) \leftrightarrow \neg\check{\mathrm{R}}(x))$, мы имеем для всякого x из $|K| : x \in \mathrm{I}$ тогда и только тогда, когда $x \notin \check{\mathrm{I}}$. Следовательно, тот факт, что система W вообще имеет модель, означает, в частности, следующее. Суд всегда имеет выбор между двумя законными истолкованиями юридической системы такими, что согласно одному истолкованию подсудимый виновен, согласно другому — нет.

Спрашивается может ли это обстоятельство служить в качестве перманентного основания для апелляций защиты к вышестоящей судебной инстанции? Если нет, то почему? Если да, то как должна реагировать вышестоящая инстанция на подобную апелляцию?

Литература

1. МАНДЕЛЬШТАМ Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М.: Наука, 1972. — 440 с.

2. ГОНЧАРОВ С.С., ЕРШОВ Ю.Л., САМОХВАЛОВ К.Ф. Введение в логику и методологию науки. — М.: Интерпракс, 1994. — 256 с.

3. САМОХВАЛОВ К.Ф. Уточнения обычной интерпретации теорем Гёделя о неполноте и понятия рекурсивной перечислимости //Проблемы логики и методологии науки. — Новосибирск: Наука, 1982. — С. 42–57.

Поступила в редакцию
13 сентября 1999 года