

МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ (Вычислительные системы)

2001 год

Выпуск 167

УДК 519.2+621.391

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ОШИБКИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ¹

С.А.Хамидуллин

В в е д е н и е

В работах [1-3] рассматриваются вопросы, связанные с обработкой искаженных аддитивной помехой квазипериодических последовательностей, состоящих из заданного числа подпоследовательностей. Под числовой квазипериодической последовательностью подразумевается всякая числовая последовательность, образованная из подпоследовательностей, в которой величина интервала между моментами времени начала двух последовательных подпоследовательностей лежит в заданном промежутке. В [1] приведено решение задачи обнаружения заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности, искаженной аддитивным белым гауссовским шумом с известной дисперсией. При тех же, что и в [1] условиях, в [2] изложено решение задачи распознавания квазипериодической последовательности. Наконец, в [3] рассматривается задача совместного обнаружения и различения подпоследовательностей. В этих же работах обоснованы вычислительные

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №00-01-00795.

алгоритмы обнаружения, совместного обнаружения и различения, а также распознавания квазипериодических последовательностей, обеспечивающие принятие решения по критерию максимального правдоподобия. Цитируемые работы направлены на обоснование оптимальных апостериорных алгоритмов и никак не затрагивают вопросы точности обнаружения. Цель данной работы состоит в определении верхней границы ошибки обнаружения последовательностей в квазипериодической последовательности.

1. Постановка задачи

Пусть числовая последовательность u_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, обладает свойствами: $u_n = 0$ при $n < 0$ и $n > q - 1$ и $\|u_n\| < \infty$ при $n = \overline{0, q-1}$. Назовем подпоследовательность u_n , $n = \overline{0, q-1}$, эталонной последовательностью, q — ее длиной, и образованный из элементов этой последовательности вектор $U = (u_0, \dots, u_{q-1})$ — эталонным вектором. Обозначим через $A = \{U; U = (u_0, \dots, u_{q-1})\}$ множество (алфавит) эталонных векторов. Положим $K = \|A\|$.

Пусть вектор $\eta = (n_1, \dots, n_M)$ — элемент множества

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega(N, T_{\min}, T_{\max}, q, M) = \{\eta; \eta = (n_1, \dots, n_M); \\ 0 &\leq n_1 \leq T_{\max} - q; \\ 0 &\leq N - T_{\max} \leq n_M \leq N - q; \\ q &\leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max}, \quad m = \overline{2, M}\}, \end{aligned} \quad (1)$$

зависящего от натуральных чисел N , T_{\max} , T_{\min} , q и M .

Рассмотрим вектор $X = (x_0, \dots, x_{N-1})$, образованный из элементов эталонных последовательностей по правилу:

$$x_n = \sum_{m=1}^M u_n - n_m(m), \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (2)$$

где $U_m = (u_0(m), \dots, u_{q-1}(m)) \in A$, $m = \overline{1, M}$, а индексы n_m , $m = \overline{1, M}$, составляют вектор $\eta \in \Omega$. Множество Ω объединяет всевозможные наборы η моментов времени начала подпоследовательностей в последовательности компонент вектора X . Будем

говорить, что компоненты вектора X образуют квазипериодическую последовательность, порожденную совокупностью из M эталонных векторов из алфавита A .

Из определения множества Ω следует, что при фиксированных T_{\max} , T_{\min} , q и N допустимое число M подпоследовательностей, образующих последовательность компонент вектора X , ограничено сверху и снизу, т.е. $M_{\min} \leq M \leq M_{\max}$. Обозначим через

$$\Omega_M = \Omega(N, T_{\min}, T_{\max}, q|M), \quad M \in [M_{\min}, M_{\max}], \quad (3)$$

множество всевозможных наборов η моментов времени начала подпоследовательностей в последовательности, образованной компонентами вектора X , при условии, что эта последовательность составлена из фиксированного числа M подпоследовательностей. Выражения для M_{\min} и M_{\max} будут приведены ниже.

Положим $w = (U_1, \dots, U_M)$ и обозначим через

$$W = \{w: w \in A^M, M \in [M_{\min}, M_{\max}]\}$$

множество всевозможных M -мерных наборов эталонных векторов из алфавита A . Тогда, согласно введенным обозначениям, вектор $X \in \mathbb{R}^N$ есть функция $X(\eta, w)$, которая при фиксированном A зависит от пары наборов $\eta \in \Omega_M$ и $w \in W$. Будем считать независимыми компоненты каждого из наборов η и w , а также сами наборы η и w . Пусть случайный вектор $Y = (y_0, \dots, y_{N-1})$ есть сумма двух независимых векторов:

$$Y = X(\eta, w) + E, \quad \eta \in \Omega_M, w \in W,$$

где $E = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_{N-1})$ — гауссовский вектор, компоненты которого независимы, одинаково распределены и имеют нулевое математическое ожидание и известную дисперсию $\sigma^2 < \infty$.

Задача совместного обнаружения и различения состоит в том, чтобы по наблюдаемому вектору Y найти такую пару (η, w) наборов с заданным числом $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ компонент, в соответствии с которыми по формуле (2) был порожден ненаблюдаемый вектор $X(\eta, w)$. Параметры задачи N , T_{\min} , T_{\max} , q и σ^2 считаются известными, а алфавит A эталонных подпоследовательностей — заданным. Как показано в [3], задача совместного

максимально правдоподобного обнаружения и различения сводится к задаче

$$S_3(\eta, w) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ u_n^2 - n_m(m) - 2y_n u_n - n_m(m) \right\} \rightarrow \min_{\eta \in \Omega_M, w \in W},$$

а ее решение можно записать как

$$(\hat{\eta}, \hat{w}) = \arg \min_{\eta \in \Omega_M, w \in W} S_3(\eta, w),$$

причем нахождение искоемых значений $\hat{\eta}$ и \hat{w} аргументов η и w может быть выполнено последовательно: сначала при фиксированных η ищется значение w , доставляющее условный минимум функции $S_3(\eta, w)$, а затем — значение η .

При рассмотрении задачи *распознавания* [2] предполагается, что набор w состоит из M одинаковых элементов U из заданного алфавита A , мощность которого $K > 1$. В этом случае можно считать, что вектор X есть функция $X(\eta, U)$. Требуется найти вектор $U = (u_0, \dots, u_{q-1})$ известной размерности q . В соответствии с [2] задача распознавания сводится к задаче

$$S_2(\eta, U) = M \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2 - 2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} y_n u_n - n_m \rightarrow \min_{\eta \in \Omega_M, U \in A}.$$

Решение имеет вид

$$(\hat{\eta}, \hat{U}) = \arg \min_{\eta \in \Omega_M, U \in A} S_2(\eta, U),$$

причем нахождение искоемых значений аргументов задачи может быть выполнено последовательно: сначала при каждом фиксированном U ищется значение η , доставляющее условный минимум функции $S_2(\eta|U)$, затем перебором по всем $U \in A$ находится искомая величина \hat{U} , а также соответствующее ему значение $\hat{\eta}$.

Согласно [1], задача *обнаружения* сводится к нахождению D , максимума целевой функции

$$S_1(\eta|U) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{q-1} y_n + n_m u_n \rightarrow \max_{\eta \in \Omega_M}. \quad (4)$$

При этом предполагается, что алфавит A состоит из единственного эталонного вектора U , который считается известным. Решение записывается в виде $D = S_1(\hat{\eta}|U)$, где

$$\hat{\eta} = \arg \max_{\eta \in \Omega_M} S_1(\eta|U),$$

Таким образом, в решение каждой из названных задач входит нахождение вектора $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_M)$, доставляющего максимум (либо минимум) аддитивному функционалу с ограничениями на его аргументы, входящие в определение (1) множества Ω_M . Назовем ошибкой обнаружения $e_m = |\hat{\eta}_m - n_m|$, $m = \overline{1, M}$.

Верхнюю границу для ошибки обнаружения определим как

$$r_m = \max_{\hat{n}_m, n_m} e_m \Big|_{\hat{\eta}, \eta \in \Omega_M} = \max_{\hat{n}_m, n_m} |n_m - \hat{n}_m| \Big|_{\hat{\eta}, \eta \in \Omega_M}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (5)$$

Зададимся целью найти верхнюю границу для ошибки обнаружения (5) как функцию от параметров N , T_{\min} , T_{\max} и M задачи (4).

Отметим, что в определение (5) входят ограничения на область допустимых значений членов последовательностей n_m и \hat{n}_m , $m = \overline{1, M}$, которые задаются условиями $\hat{\eta} \in \Omega_M$, $\eta \in \Omega_M$. Для анализа этих ограничений рассмотрим экстремальную задачу, к которой сводится задача обнаружения подпоследовательностей в квазипериодической последовательности.

2. Анализ ограничений на аргументы эквивалентной экстремальной задачи

В [1] показано, что задача обнаружения сводится к задаче нахождения максимума G_{\max} аддитивной целевой функции

$$G(\nu_1, \dots, \nu_M) = \sum_{m=1}^M g(\nu_m) \quad (6)$$

на множестве допустимых значений аргументов (ν_1, \dots, ν_M) , определенном следующей леммой.

ЛЕММА 1 [1]. Пусть $\nu_m \in [a, b]$, $m = \overline{1, M}$, — такая последовательность целых чисел, что $T_{\min} \leq \nu_m - \nu_{m-1} \leq T_{\max}$, $m = \overline{2, M}$; $a \leq \nu_1 \leq a^+$, $b^- \leq \nu_M \leq b$, $a^+ \in [a, b]$, $b^- \in [a, b]$, причем a , a^+ , b^- , b — целые, а T_{\min} и T_{\max} — натуральные числа. Тогда

1) имеют место следующие неравенства:

$$(b - a) \geq (M - 1)T_{\min}, \quad (b^- - a^+) \leq (M - 1)T_{\max};$$

2) значения членов последовательности $\nu_m \in [a, b]$, $m = \overline{1, M}$, принадлежат множествам $\omega_m(M)$, образующим замкнутые интервалы, так что

$$\nu_m \in \omega_m, \quad \omega_m = \{\nu_m: \nu'_m \leq \nu_m \leq \nu''_m\}, \quad m = \overline{1, M},$$

причем границы интервалов допустимых значений определяются по следующим формулам:

$$\nu'_m = \max \{a + (m - 1)T_{\min}, b^- - (M - m)T_{\max}\}, \quad (7)$$

$$\nu''_m = \min \{a^+ + (m - 1)T_{\max}, b - (M - m)T_{\min}\}. \quad (8)$$

ЛЕММА 2 [1]. Пусть целочисленные a , a^+ , b^- , b , T_{\min} и T_{\max} удовлетворяют условиям $a < b$, $a^+ \in [a, b]$, $b^- \in [a, b]$, $T_{\max} \geq T_{\min} > 0$. Тогда для любого $M \in [M^-, M^+]$, где

$$M^- = \begin{cases} \lfloor (b^- - a^+ + T_{\max} - 1) / T_{\max} \rfloor + 1, & b^- \geq a^+, \\ 1, & b^- < a^+; \end{cases}$$

$$M^+ = \lfloor (b - a) / T_{\min} \rfloor + 1;$$

существуют последовательности ν_m , $m = \overline{1, M}$, удовлетворяющие условиям леммы 1.

Через $\lfloor z \rfloor$ обозначена целая часть от z .

Обозначим через

$$\begin{aligned} \Psi_M &= \Psi(a, a^+, b^-, b, T_{\min}, T_{\max} | M) = \{\psi: \psi = (\nu_1, \dots, \nu_M); \\ &a \leq \nu_1 \leq a^+, b^- \leq \nu_M \leq b; a^+, b^- \in [a, b]; \\ &T_{\min} \leq \nu_m - \nu_{m-1} \leq T_{\max}, m = \overline{2, M}\}, \quad M \in [M^-, M^+] \end{aligned}$$

множество всевозможных значений векторов $\psi = (\nu_1, \dots, \nu_M)$, образованных из аргументов целевой функции (6) и удовлетворяющих условиям леммы 1.

Задачу максимизации целевой функции (6) с условиями, сформулированными в лемме 1, можно записать в виде

$$G(\nu_1, \dots, \nu_M) = \sum_{m=1}^M g(\nu_m) \rightarrow \max_{\psi \in \Psi_M}, \quad (9)$$

а ее решение как $\hat{\psi} = \arg \max_{\psi \in \Psi_M} G(\nu_1, \dots, \nu_M)$.

Рассмотрим невязку между элементами векторов $\hat{\psi}$ и $\psi \in \Psi_M$, $\epsilon_m = |\hat{\nu}_m - \nu_m|$, $m = \overline{1, M}$.

Верхняя граница этой невязки, как функция от m , есть

$$\rho_m = \max_{\hat{\nu}_m, \nu_m} \epsilon_m \Big|_{\hat{\psi}, \psi \in \Psi_M}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (10)$$

Выражения (7) и (8) задают границы интервалов допустимых значений компонент векторов $\psi \in \Psi_M$, величин ν_m для каждого $m = \overline{1, M}$ при фиксированных значениях параметров $a, a^+, b^-, b, T_{\min}, T_{\max}$ и M задачи (9). В лемме 1 величины ν'_m и ν''_m определены для целочисленных значений аргумента m , пробегającego значения от 1 до M .

По аналогии с (7) и (8) введем функции $\nu'(m)$ и $\nu''(m)$, определенные для всех $m \in \mathfrak{R}$,

$$\nu'(m) = \max \{ a + (m - 1)T_{\min}, b^- - (M - m)T_{\max} \}, \quad (11)$$

$$\nu''(m) = \min \{ a^+ + (m - 1)T_{\max}, b - (M - m)T_{\min} \}. \quad (12)$$

Значения вновь определенных функций, $\nu'(m)$ и $\nu''(m)$, совпадают со значениями функций ν'_m и ν''_m соответственно для целочисленных значений аргументов $m = \overline{1, M}$.

Согласно (11), $\nu'(m)$ является непрерывной кусочно-линейной функцией относительно m и имеет точку излома m' , которая определяется из уравнения $a + (m - 1)T_{\min} = b^- - (M - m)T_{\max}$ и равна

$$m' = (MT_{\max} - T_{\min} - (b^- - a)) / (T_{\max} - T_{\min}). \quad (13)$$

Поэтому (11) можно переписать в виде

$$\nu'(m) = \begin{cases} a + (m-1)T_{\min}, & m \leq m', \\ b - (M-m)T_{\max}, & m > m'. \end{cases} \quad (14)$$

Аналогично, (12) можно представить в виде

$$\nu''(m) = \begin{cases} a^+ + (m-1)T_{\max}, & m \leq m'', \\ b - (M-m)T_{\min}, & m > m'', \end{cases} \quad (15)$$

где

$$m'' = ((b - a^+) + T_{\max} - MT_{\min}) / (T_{\max} - T_{\min}). \quad (16)$$

Выражения (14) и (15) по аналогии с (7) и (8) можно назвать нижней и верхней границами для ν_m .

Поведение функций $\nu'(m)$ и $\nu''(m)$ в зависимости от m на интервале $[1, M]$ проиллюстрировано на рис. 1 для случая $M \geq m' \geq m'' \geq 1$.

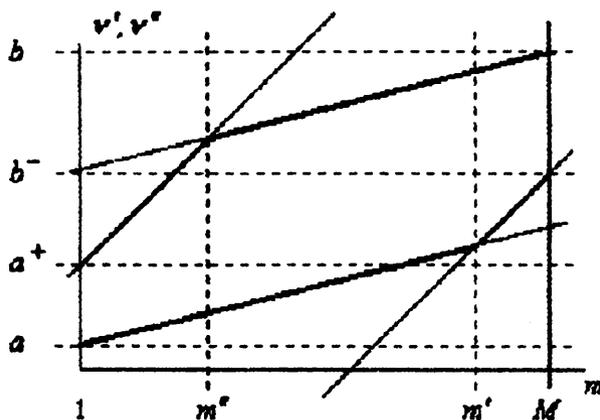


Рис. 1

При фиксированных a , a^+ , b^- , b , T_{\min} и T_{\max} соотношение между m' и m'' определяется значением величины M . Из сопоставления m' и m'' следует, что случай $m' \geq m''$ выполняется

для $M \geq M^*$, где

$$M^* = ((b - a^+) + (b^- - a)) / (T_{\max} + T_{\min}) + 1. \quad (17)$$

Поскольку $\hat{\nu}_m$ и ν_m принимают целочисленные значения и ограничены снизу и сверху соответственно величинами ν'_m и ν''_m , то (10) можно представить в виде

$$\rho_m = \nu''_m - \nu'_m = \|\omega_m\| - 1, \quad m = \overline{1, M}. \quad (18)$$

Введем функцию

$$\rho(m) = \nu''(m) - \nu'(m), \quad m \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Значения $\rho(m)$ совпадают со значениями ρ_m во всех точках определения последней, $m = \overline{1, M}$.

Для записи зависимости $\rho(m)$ от m при фиксированных a, a^+, b^-, b, T_{\min} и T_{\max} удобно рассмотреть отдельно случаи $m' \geq m''$, что эквивалентно $M \geq M^*$, и $m' < m''$ (или $M < M^*$). В первом случае, в соответствии с (14) и (15), можно записать

$$\rho(m) = \begin{cases} (a^+ - a) + (T_{\max} - T_{\min})(m - 1), & m < m'', \\ (b - a) - (M - 1)T_{\min}, & m \in [m'', m'], \\ (b - b^-) + (T_{\max} - T_{\min})(M - m), & m > m'', \end{cases} \quad (20)$$

и $\rho(m)$, верхняя граница невязки, как функция от m линейно возрастает с ростом m при $m < m''$, не зависит от m на интервале $[m'', m']$ и убывает при $m > m'$. Аналогично, для случая $M < M^*$ (соответствует $m' < m''$),

$$\rho(m) = \begin{cases} (a^+ - a) + (T_{\max} - T_{\min})(m - 1), & m < m', \\ (M - 1)T_{\max} - (b^- - a^+), & m \in [m', m''], \\ (b - b^-) + (T_{\max} - T_{\min})(M - m), & m > m'', \end{cases}$$

и $\rho(m)$ как функция от m является кусочно-линейной функцией, возрастающей при $m < m'$, не зависящей от m на интервале $[m', m'']$ и убывающей для $m > m''$.

Сказанное выше позволяет сформулировать следующую лемму.

ЛЕММА 3. Верхняя граница невязки при фиксированных a , a^+ , b^- , b , T_{\min} , T_{\max} и M , удовлетворяющих условиям леммы 1, является кусочно-линейной функцией от m ,

$$\rho_m = \begin{cases} (a^+ - a) + (T_{\max} - T_{\min})(m - 1), & 1 \leq m < m'', \\ (b - a) - (M - 1)T_{\min}, & m'' \leq m \leq m', \\ (b - b^-) + (T_{\max} - T_{\min})(M - m), & m' < m \leq M, \end{cases} \quad (21)$$

при $M \geq M^*$ ($m' \geq m''$), или

$$\rho_m = \begin{cases} (a^+ - a) + (T_{\max} - T_{\min})(m - 1), & 1 \leq m < m', \\ (M - 1)T_{\max} - (b^- - a^+), & m' \leq m \leq m'', \\ (b - b^-) + (T_{\max} - T_{\min})(M - m), & m'' < m \leq M, \end{cases} \quad (22)$$

для $M < M^*$ ($m' \geq m''$).

Справедливость утверждения следует из определения функции $\rho(m)$, значения которой совпадают со значениями ρ_m для всех целочисленных $m = 1, \overline{M}$.

Поведение $\rho(m)$ как функции от m представлено на рис. 2 для случая $M \geq M^* \geq 1$. Согласно (20), (21), $\rho_1 = \rho(1) = a^+ - a$, $\rho_M = \rho(M) = b - b^-$. В соответствии с (20), (21) обозначенная на рис. 2 величина $\rho_{\max} = \max_m \{\rho(m)\}$ есть $(b - a) - (M - 1)T_{\min}$.

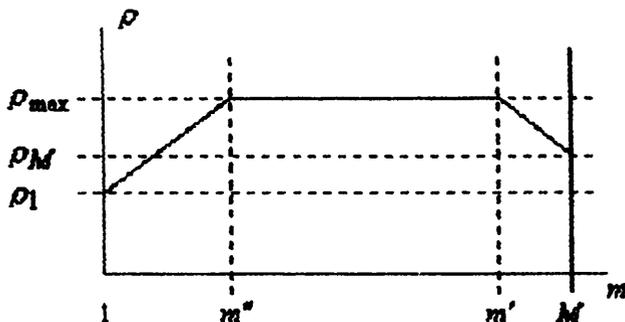


Рис. 2

Рассмотрим поведение $R_M = \max_m \{\rho_m\}$ в зависимости от M , числа аргументов задачи (9). Функция R_M определяет верхнюю

границу невязки ρ_m в наихудшем случае для каждого допустимого значения M .

ЛЕММА 4. Максимальное значение верхней границы невязки ρ_m при фиксированных a, a^+, b^-, b, T_{\min} и T_{\max} , удовлетворяющих условиям леммы 1, для каждого целого $M \in [M^-, M^+]$ есть величина

$$R_M = \begin{cases} (M-1)T_{\max} - (b^- - a^+), & M^- \leq M < M^*, \\ (b - a) - (M-1)T_{\min}, & M^* \leq M \leq M^+. \end{cases}$$

Справедливость леммы следует из (21) и (22) для каждого из допустимых значений M .

Для проведения более детального анализа дополнительно к R_M введем функцию

$$R(M) = \begin{cases} (M-1)T_{\max} - (b^- - a^+), & M < M^*, \\ (b - a) - (M-1)T_{\min}, & M \geq M^*, \end{cases}$$

определенную для значений аргумента $M \in \mathfrak{R}$. Легко убедиться, что $R_M = R(M)$ для всех целочисленных значений $M \in [M^-, M^+]$. При этом $R(M)$ линейно возрастает с ростом M при $M < M^*$ и убывает при $M \geq M^*$, достигая максимального значения при $M = M^*$:

$$\max_M R(M) = ((b - a)T_{\max} - (b^- - a^+)T_{\min}) / (T_{\max} + T_{\min}).$$

Корнями уравнения $R(M) = 0$ являются

$$\widetilde{M}^- = (b^- - a^+) / T_{\max} + 1,$$

$$\widetilde{M}^+ = (b - a) / T_{\min} + 1.$$

Корни связаны с величинами M^- и M^+ соотношениями вида

$$M^+ = \lceil \widetilde{M}^+ \rceil,$$

$$M^- = \begin{cases} \left\lfloor (\widetilde{M}^- T_{\max} - 1) / T_{\max} \right\rfloor + 1, & b^- \geq a^+, \\ 1, & b^- < a^+, \end{cases}$$

причем $M^+ \leq \widetilde{M}^+$ и $M^- \geq \widetilde{M}^-$. Первое неравенство очевидно. Для доказательства второго неравенства выражение $\widetilde{M}^- T_{\max} =$

$= (b^- - a^+) + T_{\max}$ представим в виде $\alpha T_{\max} + \beta$, где α и β целые числа и $0 \leq \beta < T_{\max}$. Тогда $\widetilde{M}^- = \alpha + \beta/T_{\max}$. В свою очередь $M^- = \alpha + 1$, если $\beta > 0$, или α , если $\beta = 0$. Поэтому $M^- \geq \widetilde{M}^-$, причем равенство выполняется, если $\beta = 0$. Параметры представления имеют вид: $\alpha = \lfloor (b^- - a^+)/T_{\max} \rfloor + 1$, $\beta = (b^- - a^+) \bmod T_{\max}$.

Кроме того, легко показать, что выполняется $\widetilde{M}^- \leq M^* \leq \widetilde{M}^+$. А при некоторых ограничениях на a^+ и b^- (именно: $a^+ + T_{\max} \leq a^+ \leq b^- \leq b^- - T_{\max}$) выполняется $M^- \leq M^* \leq M^+$.

Характер поведения $R(M)$ в зависимости от M представлен на рис. 3 для случая $b^- \geq a^+$. Разметка по оси M соответствует целочисленным значениям M .

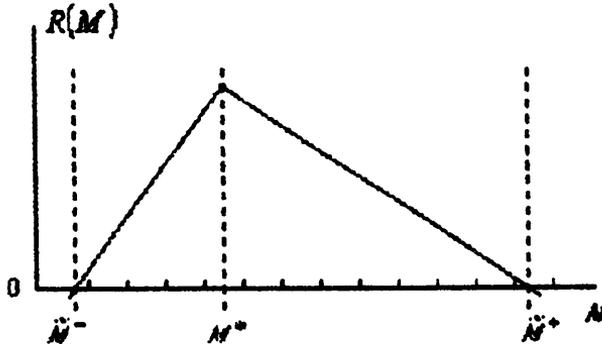


Рис. 3

3. Верхняя граница ошибки обнаружения

Для того, чтобы вернуться к задаче обнаружения (4), воспользуемся следующим следствием из теоремы, представленной в [1].

СЛЕДСТВИЕ 1 [1]. Пусть в условиях задачи (9)

$$g(n) = \sum_{i=0}^{q-1} y_{i+n} u_i.$$

Тогда, если $a = 0$, $b = N - q$, $a^+ = T_{\max} - q$ и $b^- = N - T_{\max}$, то:

$$1) \Psi_M = \Omega_M,$$

2) $G_{\max} = D$ и $\hat{\psi}_m = \hat{\eta}$ при каждом целочисленном $M \in [M^-, M^+]$.

Иными словами, при названных условиях задача (9) сводится к задаче (4). Следовательно, приведенные выше результаты для задачи (9) можно использовать при формулировании аналогичных результатов для задачи (4). В том числе, полученные выше верхние границы для невязки ρ_m можно использовать при построении верхних границ ошибок обнаружения. Это позволяет сформулировать следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Число подпоследовательностей в последовательности, удовлетворяющей условиям $\eta \in \Omega_M$ из (3), лежит в интервале $M_{\min} \leq M \leq M_{\max}$, где величины M_{\min} и M_{\max} определяются как

$$M_{\min} = \lfloor (N + q - 1) / T_{\max} \rfloor,$$

$$M_{\max} = \lfloor (N - q) / T_{\min} \rfloor + 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При каждом $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ значения членов последовательности n_m , $m = \overline{1, M}$, образующей вектор $\eta \in \Omega_M$, принадлежат интервалам $n_m^- \leq n_m \leq n_m^+$, $m = \overline{1, M}$, границы которых определяются по следующим формулам:

$$n_m^- = \begin{cases} (m - 1)T_{\min}, & 1 \leq m < m', \\ N - (M - m + 1)T_{\max}, & m' \leq m \leq M, \end{cases}$$

$$n_m^+ = \begin{cases} mT_{\max} - q, & 1 \leq m < m'', \\ N - q - (M - m)T_{\min}, & m'' \leq m \leq M, \end{cases}$$

где

$$m' = (MT_{\max} - N) / (T_{\max} - T_{\min}) + 1, \quad (23)$$

$$m'' = (N - MT_{\min}) / (T_{\max} - T_{\min}). \quad (24)$$

Справедливость утверждений следует из приведенных выше лемм 1 и 2 и следствия 1. При этом величины M_{\min} и M_{\max} соответствуют величинам M^- и M^+ , величины n_m^- и n_m^+ — соответственно величинам ν'_m и ν''_m . Наконец m' и m'' , определенные

в (23) и (24), аналогичны одноименным m' и m'' задачи (9), определенным в (13) и (16) соответственно.

Аналогично (18) выражение для верхней границы ошибки обнаружения (5) можно переписать в виде $r_m = n_m^+ - n_m^-$, $m = \overline{1, M}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Верхняя граница ошибки обнаружения подпоследовательностей в квазипериодической последовательности имеет вид*

$$r_m = \begin{cases} (T_{\min} - q) + (T_{\max} - T_{\min})m, & 1 \leq m \leq m'', \\ (N - q) - (M - 1)T_{\min}, & m'' \leq m \leq m', \\ (T_{\max} - q) + (T_{\max} - T_{\min})(M - m), & m' \leq m \leq M; \end{cases}$$

для случая $M \geq M^*$ ($m' \geq m''$) и

$$r_m = \begin{cases} (T_{\min} - q) + (T_{\max} - T_{\min})m, & 1 \leq m \leq m', \\ (M + 1)T_{\max} - (N + q), & m' \leq m \leq m'', \\ (T_{\max} - q) + (T_{\max} - T_{\min})(M - m), & m'' \leq m \leq M; \end{cases}$$

для случая $M < M^*$ ($m' < m''$). Здесь $M^* = \frac{2(N - T_{\max})}{(T_{\max} + T_{\min}) + 1}$.

Справедливость утверждения следует из лемм 4 и 3. Величины r_m соответствуют величинам ρ_m , $m = \overline{1, M}$, определенным в (19), выражение для M^* следует из (17).

Введем функцию $r(m)$, непрерывную на интервале $[1, M]$, как обобщение (5). Интервал определения функции разбивается на три диапазона, на первом функция линейно возрастает, на втором — не зависит от m , на третьем — линейно убывает. Характерной особенностью является симметричность функции относительно середины интервала $[1, M]$. Действительно, легко убедиться, что для точек m' и m'' , в которых функция имеет излом, выполняется равенство $m' + m'' = M + 1$, так что если в точке m функция возрастает, то в точке $M + 1 - m$ она убывает, и наоборот. Наконец, легко проверить, что $r(m) = r(M + 1 - m)$ (также и $r_m = r_{M+1-m}$).

Для рассмотрения поведения $R(M) = \max_m \{r(m)\}$ как функции от вещественной переменной $M \in [\widetilde{M}_{\min}, \widetilde{M}_{\max}]$, где $\widetilde{M}_{\min} = (N + q)/T_{\max} - 1$, и $\widetilde{M}_{\max} = (N - q)/T_{\min} + 1$, можно

вновь разбить интервал изменения переменной M на два диапазона. При изменении M от \widetilde{M}_{\min} до M^* эта функция линейно возрастает, от 0 до величины R^* . При изменении M от M^* до \widetilde{M}_{\max} функция линейно убывает, от R^* до 0:

$$R(M) = \begin{cases} (M+1)T_{\max} - (N+q), & \widetilde{M}_{\min} \leq M < M^*, \\ (N-q) - (M-1)T_{\min}, & M^* \leq M \leq \widetilde{M}_{\max}. \end{cases}$$

Здесь:

$$R^* = \max_M R(M) = \frac{(N-q)(T_{\max} - T_{\min}) + 2(T_{\max} - q)T_{\min}}{(T_{\max} + T_{\min})},$$

Соотношения между величинами \widetilde{M}_{\min} и M_{\min} , \widetilde{M}_{\max} и M_{\max} имеют вид: $M_{\max} = \lfloor \widetilde{M}_{\max} \rfloor$, $\widetilde{M}_{\max} \geq M_{\max}$ и

$$M_{\min} = \left\lfloor \frac{(\widetilde{M}_{\min}T_{\max} + T_{\max} - 1)}{T_{\max}} \right\rfloor, \quad \widetilde{M}_{\min} \leq M_{\min}.$$

4. Численное моделирование

Справедливость найденных оценок иллюстрирует результат численного эксперимента по обнаружению одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности. Численные результаты получены с помощью алгоритма, описанного в [1]. Исходная последовательность длины N сформирована из M одинаковых подпоследовательностей длины q ($u_n = a$, $n = 0, q-1$), которые можно интерпретировать как импульсы прямоугольной формы, и зашумлена аддитивным гауссовым шумом с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Значения параметров задачи: $N = 200$, $q = 7$, $a = 60$, $M = 11$, $T_{\min} = 10$, $T_{\max} = 40$, $\sigma = 150$. На рис. 4 изображены: подлежащая обработке последовательность y_n , $n = 0, N-1$, и совмещенная с ней исходная (ненаблюдаемая) последовательность, x_n , $n = 0, N-1$; первая — в виде ломаной кривой, вторая — в виде прямоугольных импульсов выше оси $y = 0$, образующих эталонные подпоследовательности. Дополнительно к ним, в виде прямоугольных рамок из

пунктирных линий, изображены результаты обнаружения. Эти рамки позволяют заметить ошибки обнаружения моментов времени начала эталонных последовательностей. Ошибки вызваны интенсивной помехой, которая практически полностью скрывает подпоследовательности.

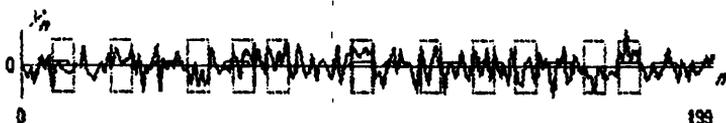


Рис. 4

На рис. 5 результаты этого же эксперимента по обнаружению представлены в другой форме. Здесь по оси абсцисс отложены номера импульсов m , по оси ординат — номера отсчетов искомой последовательности, n , $n = 0, N - 1$. Пунктирные линии соответствуют: горизонтальная — значению $n = N - q$, вертикальные — значениям $m = m''$ и $m = m'$ соответственно. Значения величин n_m , истинных начальных позиций эталонных подпоследовательностей, и \hat{n}_m , их оценок, изображены в виде последовательностей точек, для большей наглядности соединенных пунктирными линиями. Все они ложатся в область допустимых значений, ограниченную сверху и снизу соответственно кривыми n_m^+ и n_m^- . Кривой под номером 1 соответствуют значения n_m , а кривой 2 — значения \hat{n}_m . Эксперимент выполнен при тех же значениях параметров N , q , M , T_{\min} , T_{\max} . Величины, рассматриваемые при анализе верхней границы ошибки обнаружения, принимают следующие значения: $m' = 9.0$, $m'' = 3.0$, $M^* = 7.4$, $M_{\min} = 5$, $M_{\max} = 20$.

Результаты этого же эксперимента по обнаружению представлены и на рис. 6, где изображены графики верхней границы ошибки обнаружения и ошибки обнаружения как функции от номера подпоследовательности в анализируемой последовательности. По оси абсцисс отложены номера подпоследовательностей, по оси ординат значения ошибки обнаружения (нижняя кривая) и верхней границы ошибки обнаружения (верхняя кри-

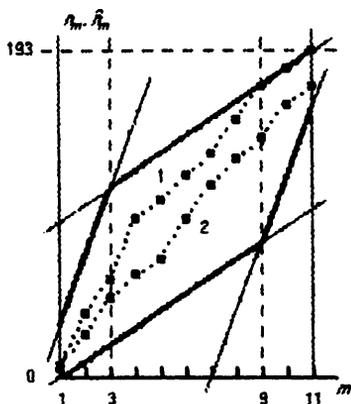


Рис. 5

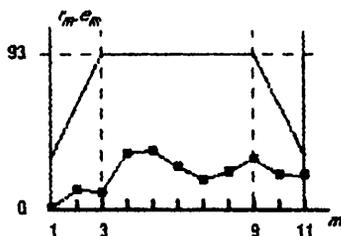


Рис. 6

вая). Пунктирная горизонтальная линия соответствует величинам $r_m = (N-q) - (M-1)T_{\min}$, $m \in [m'', m']$, для случая $M \geq M^*$, принимающим значение 93 для вышеназванных значений параметров задачи.

Заключение

В работе исследована точность обнаружения подпоследовательностей в квазипериодической последовательности для оптимальных апостериорных алгоритмов, описанных в [1]–[3]. При этом в качестве ошибки обнаружения рассмотрен модуль разности между истинным значением положения каждой подпоследовательности в последовательности и оптимальным значением (оценкой) его позиции, полученным с помощью алгоритма обнаружения. Дан анализ верхней границы ошибки обнаружения в зависимости от параметров задачи. Аналитические результаты подтверждены данными численного моделирования.

Л и т е р а т у р а

1. КЕЛЬМАНОВ А.В., ХАМИДУЛЛИН С.А. Оптимальное обнаружение заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Сибирский журнал вычислительной математики. — 1999. — Т.2, №4. — С. 333-349.

2. КЕЛЬМАНОВ А.В., ХАМИДУЛЛИН С.А. Распознавание квазипериодической последовательности, образованной из заданного числа одинаковых подпоследовательностей // Сибирский журнал индустриальной математики. — 1999. — Т.2, №1. — С. 53-74.

3. КЕЛЬМАНОВ А.В., ХАМИДУЛЛИН С.А. Апостериорное совместное обнаружение и различение заданного числа подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Сибирский журнал индустриальной математики. — 1999. — Т.2, №2(4). — С. 106-119.

Поступила в редакцию
23 мая 2001 года