МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНФОРМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
2002 год Выпуск 169

УДК 512.56

О ШКАЛАХ ПОТЕНЦИАЛОВ ВЫЧИСЛИМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР[1]

А.Г.Пинус, С.В.Журков

В работе первого автора [1] определены понятия условного терма данной сигнатуры и условно термальной функции на универсальной алгебре соответствующей сигнатуры. Условно термальные функции на алгебре $\mathcal{A} =< A; \sigma >$ суть функции, для которых существует программа их вычислений, составленная из простейших подпрограмм (вычисляющих сигнатурные функции) при помощи оператора суперпозиции и условного оператора. Таким образом, совокупность $CT(\mathcal{A})$ условно термальных функций алгебры $\mathcal{A}$ выступает в роли *вычислительного потенциала* алгебры $\mathcal{A}$. В работе [2] определено понятие условной рациональной эквивалентности двух алгебр $\mathcal{A}_1 =< A_1; \sigma_1 >$ и $\mathcal{A}_2 = =< A_2; \sigma_2 >$, формализующее понятие совпадения вычислительных потенциалов алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, т.е. ситуацию, когда имеет место равенство $CT(\mathcal{A}_1) = CT(\pi(\mathcal{A}_2))$, где π — некоторая биекция множества A_2 на A_1. В этой же работе доказано, что конечные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда существует биекция π множества A_2 на A_1 такая, что $\pi(Sub\mathcal{A}_2) = Sub\mathcal{A}_1$ и π сопрягает отображения из $Iso\mathcal{A}_2$ с отображениями из $Iso\mathcal{A}_1$. Здесь $Sub\mathcal{A}$ — решетка подалгебр алгебры $\mathcal{A}$, а $Iso\mathcal{A}$ — полугруппа внутренних изомор-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 99-01-00571.

физмов алгебры $\mathcal{A}$,т.е. изоморфизмов между подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$.

В данной работе определено понятие шкалы потенциалов вычислимости для конечных универсальных алгебр и изучается строение этой шкалы.

Пусть $CT_n = \{CT(\mathcal{A}) | \mathcal{A}$ — произвольная универсальная алгебра с основным множеством $n = \{0, 1, ..., n-1\}\}$. На CT_n введем следующее отношение эквивалентности: для F_1, $F_2 \in CT_n$ пусть $F_1 \sim F_2$ если существует перестановка π на n такая, что $F_1 = \pi(F_2)$ и пусть $CT(n) = CT_n / \sim$. На $CT(n)$ введем отношение порядка $\leq$ следующим образом: $F_1/ \sim \leq F_2/ \sim$ если существует перестановка π на n такая, что $\pi(F_1) \subseteq F_2$. Очевидным образом замечается, что определение отношения $\leq$ на $CT(n)$ корректно и что $< CT(n); \leq >$ — частично упорядоченное множество. Естественно считать класс $CT(\mathcal{A})/ \sim$ потенциалом вычислимости n-элементной алгебры $\mathcal{A}$. Таким образом частично упорядоченное множество $< CT(n); \leq >$ естественно назвать *шкалой потенциалов вычислимости* n-элементных алгебр.

Шкала $< CT(n); \leq >$ содержит наибольший элемент $\Phi/ \sim$, где Φ — совокупность всех функций на множестве n и наименьший элемент $D/ \sim$, где $D = CT(\mathcal{A})$ для алгебры $\mathcal{A} =< n; \emptyset >$, т.е. совокупность всех функций на n, получаемых за счет подстановок из функций–селекторов и дискриминаторной функции. Функции из совокупности D — это так называемые обобщенно селекторные функции вида

$$f(x) = (x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} D_1(x_1, \ldots, x_m) \to x_{i_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_l(x_1, \ldots, x_m) \to x_{i_l}, \end{cases}$$

где $D_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, D_l(x_1, \ldots, x_m)$ — всевозможные максимальные, попарно несовместимые условия, состоящие из равенств и неравенств между переменными $x_1, \ldots, x_m$ (при условии, что $x_1, \ldots, x_m \in n$) и $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l} \in \{x_1, \ldots, x_m\}$. Заметим также, что для любого $F \in CT_n$, если $F/ \sim = \Phi/ \sim$, то $F = \Phi$ и если $F \backslash \sim = D \backslash \sim$, то $F = D$.

Отображение $\varphi : CT_n \to CT(n)$, определенное как $\varphi(F) = F/\sim$, является монотонным отображением решетки $< CT_n; \subseteq>$ клонов условно термальных функций на множестве n на шкалу $< CT(n); \leq>$.

Однако, как показывает следующее утверждение, в отличии от решетки $< CT_n; \subseteq>$ шкала $< CT_n; \leq>$ решеткой не является.

ТЕОРЕМА 1.

а) *При $n \geq 3$ шкала $< CT(n); \leq>$ не является ни верхней, ни нижней полурешеткой.*

б) *Число атомов шкалы $< CT(n); \leq>$ равно $[\frac{n}{2}] + 1 + R(n)$, где $R(n)$ — число максимальных транзитивных на n подгрупп полной симметрической группы на n попарно не сопряженных в этой группе. Число коатомов — $(n-1) + K(n)$, где $K(n)$ — число различных простых делителей числа n, отличных от единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) В работе [3] определено понятие *дыры* в частично упорядоченном множестве $< A; \leq>$. Дырой называется такая четверка различных элементов a_1, a_2, a_3, a_4 из A, что $a_1 \leq a_3, a_4$; $a_2 \leq a_3, a_4$, пары a_1 и a_2, a_3 и a_4 состоят из несравнимых элементов и при этом в A не существует элемента b такого, что $a_1, a_2 \leq b \leq a_3, a_4$. Очевидно, что если $< A; \leq>$ имеет дыру, то $< A; \leq>$ не является ни верхней, ни нижней полурешеткой. Таким образом, для доказательства утверждения "а" теоремы достаточно указать дыру в шкале $< CT(n); \leq>$ при $n \geq 3$. Покажем это при $n = 3$. Аналогично строятся дыры в шкалах $< CT(n); \leq>$ при $n > 3$. Воспользуемся обозначениями элементов множества $CT(3)$ из работы [4]. Непосредственно замечается, что алгебры $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_{10}, \mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{15}$ (а точнее, их классы $\sim$-эквивалентности) образуют дыру в $< CT(3); \leq>$. Общий вид шкалы $< CT(3); \leq>$, состоящей из 53 элементов, построенной на основе результатов работы [4] исходя из инвариантов $< SubA, IsoA >$ алгебр $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_{53}$, приведен на рис. 2. Заметим, что шкала $CT(2); \leq>$ является решеткой (пентагон), ее вид приведен на рис. 1.

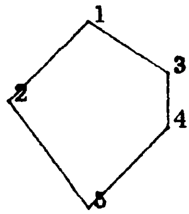

Рис.1

б) Как уже отмечалось выше, инвариантом для класса $F/\sim \in CT(n)$ является пара $< SubA, IsoA >$, где $A =< n; F >$ и отношение $F_1/\sim \leq F_2/\sim$ соответствует существованию перестановки π на n такой, что для $A_1 =< n; F_1 >$, $A_2 =< n; F_2 >$ имеют место включения $SubA_2 \subseteq Sub\pi(A_1)$ и $IsoA_2 \subseteq Iso\pi(A_1)$. Тем самым, коатомам шкалы $< CT(n); \leq >$ соответствуют либо алгебры $A =< n; \sigma >$, имеющие единственную собственную подалгебру и тривиальные внутренние изоморфизмы (таковых с точностью до перестановок на n ровно $n-1$ штука), либо алгебры $A =< n; \sigma >$, не имеющие собственных подалгебр с минимальной группой автоморфизмов (в частности, эти автоморфизмы не имеют неподвижных точек). Таким образом, в последнем случае $AutA$ является циклической группой G, порожденной перестановкой π и такой, что перестановки, входящие в $G = \{\pi, \pi^2, ..., \pi^n = e = id_n\}$, не имеют неподвижных точек. Любая таковая перестановка π имеет вид произведения m независимых циклов простой длины n/m, где m — делитель n отличный от 1. Таким образом, с точностью до перестановок на n, число подобных групп G равно числу $K(n)$-различных простых делителей числа n, отличных от 1. В итоге, число коатомов шкалы $< CT(n); \leq >$ равно $(n-1) + K(n)$.

Рассмотрим теперь вопрос о числе атомов в шкале $< CT(n); \leq >$. Пусть $F \in CT_n$ и $F\backslash \sim$ — атом в $< CT(n); \leq >$. Пусть $S = Sub < n; F >$ и $B = Iso < n; F >$. Через $P(n)$ обозначим совокупность всех подмножеств множества n. В работе [2] описаны условия (обозначим их как (*)), при которых пара $< S_1, B_1 >$, где $S_1 \subseteq P(n), B_1$ — некоторая совокупность биекций между множествами из S_1, такова, что $S_1 = SubA$, $B_1 = IsoA$ для некоторой алгебры $A =< n; \sigma >$. При этом, если $F_1 = Stab(S_1, B_1)$, т.е. является совокупностью всех функ-

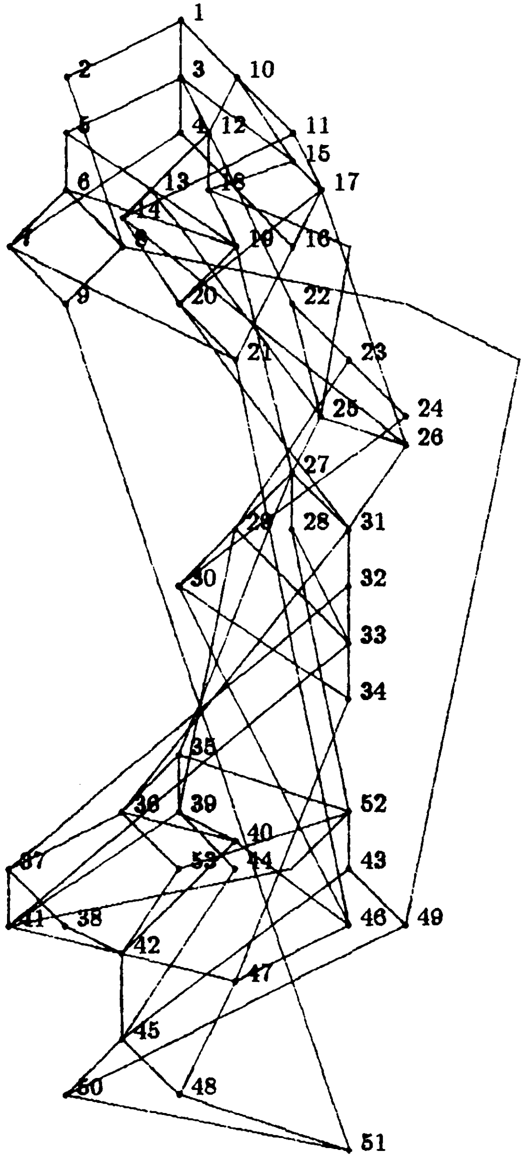
1
2
3
10
5
4
12
11
15
6
13
16
17
14
7
8
19
18
9
20
22
21
23
25
24
26
27
29
28
31
30
32
33
34
35
36
39
52
40
37
53
44
43
41
38
46
49
42
47
45
50
48
51

Рис.2

ций на множестве n, относительно которых замкнуты подмножества из S_1 и которые коммутируют с биекциями из B_1, то $S_1 = Sub < n; F_1 >, B_1 = Iso < n; F_1 >$.

Рассмотрим вначале случай, когда $S \neq P(n)$. Пусть также существуют $A_1, A_2 \in P(n)\backslash S$ такие, что $|A_1| < |A_2|$ и пусть $S' = S \cup \{C \subseteq n \mid |C| < |A_2|\}$. Непосредственно замечается, что пара $< S', B \cup \{g|C \mid g \in B, |C| < |A_2|\} >$ удовлетворяет условию (*). Но тогда, если $F' = Stab(S', B)$, то $D/\sim < F'/\sim < F/\sim$, в противоречии с тем, что $F/\sim$ — атом в $< CT(n); \leq >$.

Тем самым, если $S \neq P(n)$, то для любых $A_1, A_2 \in P(n)\backslash S$ имеет место равенство $|A_1| = |A_2|$. Через $Symn$ обозначим все перестановки на множестве n. Если $B \not\supseteq Symn$, то опять же непосредственно проверяется, что пара $< P(n); B \cup \{g|C \mid g \in B, C \subsetneq n\} >$ удовлетворяет условию (*) и, значит, для $F" = Stab(P(n); B)$ имеет место $D/\sim < F"/\sim < F/\sim$, в противоречии с тем, что $F/\sim$ - атом.

Таким образом, если $S \neq P(n)$, то существует $m < n$ такое, что $S = S_m = \{C \subseteq n \mid |C| \neq m\}$. При этом, т.к. S — нижняя полурешетка относительно операции теоретико-множественного пересечения, то $m = n - 1$. Кроме того, $B \supseteq Symn$ и, так как для любых $g \in B, C \in S$ ограничение $g|C$ также должно входить в B, то $B = Bin$ — совокупности всех биекций между подмножествами множества n. Обратное, т.е. то, что если $F = Stab(S_m, Bin)$, то $F/\sim$ есть атом в шкале $< CT(n); \leq >$ практически очевидно. Тем самым, описаны инварианты для одного из атомов шкалы $< CT(n); \leq >$.

Для всех других атомов этой шкалы инварианты имеют вид $< P(n); B >$, где $B = B' \cup Bi'n$ и B' — некоторая максимальная подгруппа группы $Symn$, а $Bi'n$ — совокупность всех биекций между менее чем n-элементными подмножествами множества n.

В силу максимальности B' как подгруппы группы $Symn$, либо B' действует на n транзитивно, либо множество n разбивается на две B'–орбиты: $n = A_1 \dot\cup A_2$. В последнем случае ограничения перестановок из B' на множества A_i суть полные группы перестановок на A_i и $B' \cong SymA_1 \times SymA_2$. При этом элемент $F/\sim$ шкалы $< CT(n); \leq >$ однозначно определяется мощностями множеств A_1 и A_2. Тем самым, число различных атомов, соответствующих существованию двух B'–орбит на n, равно $[\frac{n}{2}]$.

Таким образом, для оставшихся атомов шкалы $< CT(n); \leq >$ инвариантами выступают пары $< P(n), B >$, где B — максимальная подгруппа полной симметрической группы на n действующая на n транзитивно, а число подобных атомов совпадает с числом попарно не сопряженных в $Symn$ подобных подгрупп. Теорема доказана.

Заметим, что вопрос о числе $R(n)$ является открытым и довольно сложным вопросом теории конечных групп и связан с вопросом описания конечных простых групп. Более подробную, связанную с этим вопросом информацию можно найти в работе [5].

При $n = 4$ число элементов шкалы $< CT(4); \leq >$ было посчитано П.Джипсоном и равно 22610, число атомов и коатомов в $< CT(4); \leq >$ по теореме 1, "б" равно соответственно 5 и 5.

Несмотря на утверждение "а" теоремы 1, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Для любой конечной решетки L существуют натуральное n и элементы $F_1/\sim$, $F_2/\sim$ шкалы $< CT(n); \leq >$ такие, что L как решетка вложима в интервал $[F_1/\sim, F_2/\sim]$ шкалы $< CT(n); \leq >$ являющийся решеткой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L — конечная решетка и L^* двойственная к L решетка. Тогда, как известно [6], L^* изоморфно вложима в решетку $Part(m)$ разбиений множества $m = \{0, 1, ..., m-1\}$ для подходящего натурального m. Пусть $B(m)$ — булева алгебра всех подмножеств множества m. Далее будем отождествлять одноэлементные подмножества $\{i\}$ множества m с числами i. Для любого $0 \leq i < m$ рассмотрим попарно дизъюнктные множества $A_i = \{i^0 = i, i^1, ..., i^{i-1}\}$ такие, что $B(m) \cap A_i = \{i^0\}$. На множестве $A = B(m) \cup \bigcup_{i=0}^{m-1} A_i$ определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} i^{j+1(mod i)}, \text{ если } x = i^j \text{ для } 0 \leq i < m,\ 0 \leq j < i, \\ x, \text{ если } x \in B(m) \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} A_i. \end{cases}$$

Кроме того, если x (или y) не входит во множество $B(m)$, то положим $x \cup y = x \cap y = \neg x = \emptyset$.

Функции $g_0(x), ..., g_{m-1}(x)$ определим на A следующим образом:

$$g_i(x) = \begin{cases} m, \text{ если } x \in B(m) \text{ и } i^0 = i \leq x, \\ \emptyset, \text{ если } x \notin B(m), \text{ либо } i^0 = i \not\leq x. \end{cases}$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} =< A; \cup, \cap, \neg, \emptyset, m, f, g_0, ..., g_{m-1} >$.

Если $\mathcal{B} =< C; ... >$ подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, то $C \cap B(m)$ образует подалгебру булевой алгебры $B(m)$ и для любого $0 \leq i < m$ следующие условия эквивалентны: $C \cap A_i \neq \emptyset$, $A_i \subseteq C$, $i^0 = i \in C$.

Наличие циклов $< A_i, f >$ и функций $g_0, ..., g_{m-1}$ очевидным образом влечет то, что любой внутренний изоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ суть тождественное отображение некоторой ее подалгебры самой на себя. Кроме того, отображение φ, определенное как $\varphi(C) = C \cap B(m)$ является изоморфизмом решетки $Sub\mathcal{A}$ на решетку $SubB(m)$. Заметим так же, что $SubB(m) \cong Part^*(m)$, где $Part^*(m)$ — решетка двойственная решетке $Part(m)$.

Для любого разбиения $\eta \in Part(m)$, пусть $\{b_\eta^1, ..., b_\eta^{k(\eta)}\}$ — разбиение единицы (множества m) булевой алгебры $B(m)$ соответствующее разбиению η. Через σ_η обозначим обогащение сигнатуры $\sigma =< \cup, \cap, \neg, \emptyset, m, f, g_0, ..., g_{m-1}\}$ путем добавления к последней одноместных функций $g_1^\eta, ..., g_{k(\eta)}^\eta$ определенных на A следующим образом:

$$g_i^\eta(x) = \begin{cases} b_\eta^i, \text{ если } x = \emptyset, \\ \emptyset, \text{ если } x \neq \emptyset. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{A}_\eta =< A; \sigma_\eta >$. Тогда подмножество $C \subseteq A$, образующее подалгебру алгебры $\mathcal{A}$, будет образовывать подалгебру алгебры $\mathcal{A}_\eta$ в том и только том случае, когда C включает B_η — подалгебру булевой алгебры $B(m)$, порожденную разбиением $\{b_\eta^i, ..., b_\eta^{k(\eta)}\}$.

В силу этих замечаний отображение $\psi : Part^*(m) \to CT_n$, где $n = |A|$, определенное как $\psi(\eta) = CT(\mathcal{A}_\eta)$, является изоморфным вложением решетки $Part^*(m)$ в интервал $[CT(\mathcal{A}_{\eta_{at}}), CT(\mathcal{A}_{\eta_{0,1}})]$ решетки клонов на множестве n. Здесь η_{at} — разбиение множества m на одноэлементные подмножества, а $\eta_{0,1}$ - разбиение m, состоящее из единственного подмножества — множества m.

С другой стороны, наличие циклов $< A_i, f >$ приводит к тому, что для разбиений $\eta_1 \leq \eta_2$ единственной перестановкой π на множестве n такой, что $SubA_{\eta_2} \subseteq \pi(SubA_{\eta_1})$, а, значит, и $\pi(CT(A_{\eta_1})) \subseteq CT(A_{\eta_2})$ является тождественная перестановка. Тем самым, интервал $[CT(A_{\eta_{e,1}}), CT(A_{\eta_{0,1}})]$ в решетке клонов на n изоморфен интервалу $[CT(A_{\eta_{e,1}})/\sim, CT(A_{\eta_{0,1}})/\sim]$ в шкале $< CT(n); \leq >$. Замеченная в начале доказательства вложимость L^* в $Part(m)$ завершает доказательство теоремы.

Напомним, что под условием сигнатуры σ выше понималась любая система уравнений и неравенств между термами этой сигнатуры (точное определение см [1]). В работах [7–9] предложены другие естественные вариации понятия условия: конечная система уравнений между термами, $\exists$–позитивная формула данной сигнатуры, элементарная формула данной сигнатуры. Соответственно строятся совокупности позитивно условно термальных $PCT(A)$, $\exists$-позитивно условно термальных $\exists^+CT(A)$ и элементарно условно термальных $ECT(A)$ функций алгебры A, которые так же допускают естественную трактовку как программно вычислимых функций на алгебре A при соответствующей интерпретации понятия условия в условном операторе. Тем самым, на этой основе, как это было проделано выше на основе условно термальных функций, представляется возможным определить соответствующие шкалы потенциальной вычислимости $< PCT(n); \leq >, < \exists^+CT(n); \leq >$ и $< ECT(n); \leq >$ n-элементных алгебр. При этом, как доказано в работах [7–9], для конечных алгебр A_1 и A_2:

а) $PCT(A_1)/\sim \leq PCT(A_2)/\sim \Leftrightarrow$ для некоторой биекции π алгебры A_1 на A_2 имеют место включения $SubA_2 \subseteq \pi(SubA_1)$ и $IhmA_2 \subseteq \pi(IhmA_1)$;

б) $\exists^+CT(A_1)/\sim \leq \exists^+CT(A_2)/\sim \Leftrightarrow$ для некоторой биекции π алгебры A_1 на A_2 имеют место включения $SubA_2 \subseteq \pi(SubA_1)$ и $EndA_2 \subseteq \pi(EndA_1)$;

в) $ECT(A_1)/\sim \leq ECT(A_2)/\sim \Leftrightarrow$ для некоторой биекции π алгебры A_1 на A_2 имеют место включения $SubA_2 \subseteq \pi(SubA_1)$ и $AutA_2 \subseteq \pi(AutA_1)$.

Здесь $IhmA$ — полугруппа внутренних гомоморфизмов алгебры A (гомоморфизмов между подалгебрами алгебры A),

$EndA$ — полугруппа эндоморфизмов, а $AutA$ — группа автоморфизмов алгебры A.

В силу вытекающих отсюда равенств $CT(A) = PCT(A) = \exists^+CT(A) = ECT(A)$ для любой двухэлементной алгебры A, имеет место и равенство шкал $< CT(2); \leq > = < PCT(2); \leq > = < \exists^+CT(2); \leq > = < ECT(2); \leq >$.

В общем случае имеют место включения

$$PCT(A) \quad \begin{matrix} \subseteq CT(A) \subseteq \\ \subseteq \exists^+CT(A) \subseteq \end{matrix} \quad ECT(A)$$

и соответственно монотонные сюръекции ψ_i шкал потенциальной вычислимости

$$< PCT(n); \leq > \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\psi_1} < CT(n); \leq > \xrightarrow{\psi_3} \\ \xrightarrow{\psi_2} < \exists^+CT(n); \leq > \xrightarrow{\psi_4} \end{matrix} \quad < ECT(n); \leq > .$$

Исходя из указанных инвариантов для $ECT(A)$ анализ совокупности $CT(3)$ из работы [4] приводит к равенству $|ECT(3)| = 26$ и к строению шкалы $< ECT(3); \leq >$ указанному на рис. 3, где номером i обозначены трехэлементные алгебры A_i из работы [4].

Заметим так же, что для любой универсальной алгебры A, если $|A| = 3$, то $IhmA = IsoA \cup EndA \cup Hom_1 A$, где $Hom_1(A)$ — совокупность гомоморфизмов собственных подалгебр алгебры A на ее одноэлементные подалгебры и, в силу этого, $PCT(A) = CT(A) \cap \exists^+CT(A)$.

Утверждения типа утверждения "а" теоремы 1 имеют место и для шкал вычислимостей $< ECT(n); \leq >$, $< \exists^+CT(n); \leq >$ и $< PCT(n); \leq >$ при $n \geq 3$. Действительно, для первой шкалы это следует из того, то для алгебр $A_3, A_{10}, A_{12}, A_{15}$ из доказательства теоремы группы $AutA_i$ тривиальны. Для последних же двух шкал дыру образуют четверки $\exists^+CT(A_i')$ и $PCT(A_i')(i = 1, 2, 3, 4)$ для алгебр $A_3', A_{10}', A_{12}', A_{15}'$, полученных из алгебр $A_3, A_{10}, A_{12}, A_{15}$ обогащением последних с помощью дискриминаторной функции, так как в этом случае полугруппы эндоморфизмов $EndA_i'$ и внутренних гомоморфизмов $IhmA_i'$ тривиальны.

Аналогичные замечания верны и для теоремы 2, для построенных в ходе ее доказательства алгебр A_η и их потенциалов вы-

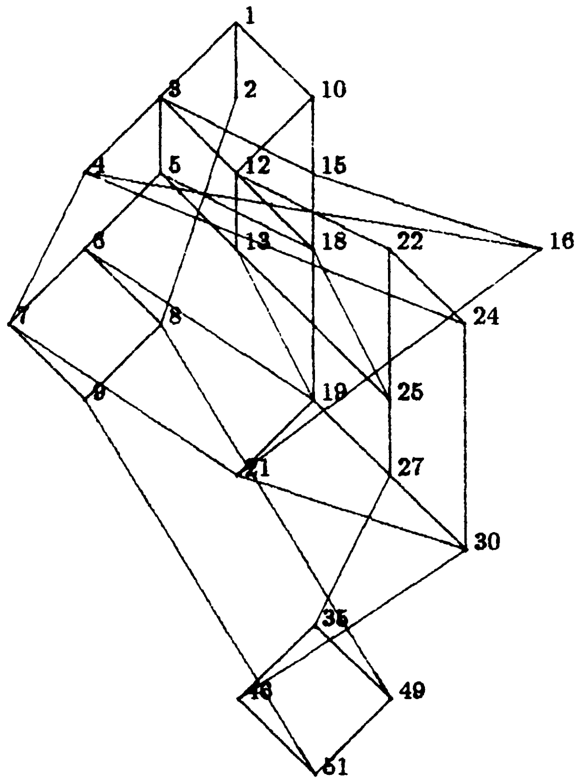

Рис.3

числимости $ECT(A_\eta)$, $\exists^+CT(A_\eta)$, $PCT(A_\eta)$. Тем самым имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1'.

а) *При* $n \geq 3$ *шкалы* $< PCT(n); \leq >$, $< \exists^+CT(n); \leq >$, $< ECT(n); \leq >$ *не являются ни верхней ни нижней полурешетками.*

б) *Число атомов и коатомов шкал* $< CT(n); \leq >$ *и* $< ECT(n); \leq >$ *совпадают.*

ТЕОРЕМА 2'. *Для любой конечной решетки L существует натуральное n и интервал $[a,b]$ шкалы $< PCT(n); \leq >$, $(< \exists^{+}CT(n); \leq >, < ECT(n); \leq >)$ такие, что L как решетка вложима в интервал $[a,b]$ этой шкалы.*

Авторы благодарны В.Д. Мазурову за консультацию по поводу максимальных транзитивных подгрупп симметрической группы и указание на работу [5].

Литература

1. ПИНУС А.Г. Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах// Структурные алгоритмические свойства вычислимости. — Новосибирск, 1996. — Вып. 156: Вычислительные системы. — С. 59–78.

2. ПИНУС А.Г. Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность// Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 4. - С. 432–459.

3. ПИНУС А.Г. О многообразиях скелеты которых являются решетками// Алгебра и логика. — 1992. — Т. 31, № 1. — С. 74–82.

4. ПИНУС А.Г. Об условно рационально эквивалентных алгебрах// Структурные и сложностные проблемы вычислимости. — Новосибирск, 1999. — Вып. 165: Вычислительные системы. — С. 3–29.

5. LIEBECK M.W., PRAEGER C.E., SAXL J. A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups// J. of Algebra. — 1987. — Vol.111, № 2. — P. 365–383.

6. PUDLAK P., TUMA J. Every finite lattice can be embedded into a finite partition lattice// Alg. univ. — 1980. — Vol.10, № 1. — C.74–95.

7. ПИНУС А.Г. N–элементарная вложимость и n–условные термы// Изв.вузов. Математика, 1999, № 1. — С. 36–40.

8. ПИНУС А.Г. Внутренние гомоморфизмы и позитивно условные термы// Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, № 2. - С. 158–173.

9. ПИНУС А.Г. О функциях коммутирующих с полугруппами преобразований алгебр// Сиб.мат. журн. — 2000. — Т. 41, № 6. — С. 1409–1418.

Поступила в редакцию
20 февраля 2002 года