МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные системы)

2002 год Выпуск 172

УДК 519

О НЕСРАВНИМЫХ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЯХ НА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ[1]

А.С.Морозов

В [1] введено понятие перечислителя и поставлены некоторые связанные с ним проблемы. В данной работе решается одна из них, а именно, строятся примеры допустимых множеств с бесконечными семействами попарно несводимых перечислителей на натуральных числах. Это показывает нетривиальность введенных понятий.

Остальные определения достаточно стандартны и могут быть найдены в [2–4]. Напомним некоторые определения. Любое Σ–подмножество допустимого множества называется *перечислителем* в этом допустимом множестве. Будем говорить, что *перечислитель A сводится к перечислителю B*, если существует Σ-отображение из B в A, и записывать это как $A \preceq B$. Как обычно обозначаем

$$A \oplus B = \{\langle a, 0\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle b, 1\rangle \mid b \in B\},$$

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \ \&\ b \in B\}.$$

В этой работе мы также используем обозначение

$$A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots = \{\langle a, i\rangle \mid i \in \omega, a \in A_i\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантами: РГНФ № 01-03-00247а; INTAS № 00-499; РФФИ № 99-01-00485

Будем называть перечислитель A *конечно распараллеливаемым,* если $A \oplus A \preceq A$ и *бесконечно распараллеливаемым,* если $A \times A \preceq A$.

Нам понадобятся также вычислимые функции ℓ, r, c для кодирования пар натуральных чисел ($c(\ell(x), r(x)) = x, \ell(c(x,y)) = x, r(c(x,y)) = y$) вместе с некоторыми вычислимыми функциями для кодирования конечных последовательностей натуральных чисел: $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ есть код конечной последовательности $x_1, \dots, x_n$, $\mathrm{lh}(x)$ — ее длина.

С e–сводимостью можно познакомиться в [4]. Напомним ее определение. Пусть W_n обозначает n–е вычислимо перечислимое множество. Мы используем обычную кодировку конечных множеств, а именно, конечное множество S обозначаем как D_k, где $k = \sum\limits_{i \in S} 2^i$. Напомним, что множество натуральных чисел A e–сводится к множеству B, если существует $m \in \omega$ такое, что $\Phi_m(B) = A$, где *оператор перечисления* Φ_m определяется как

$$\Phi_m(X) = \{y | \, \exists n(c(y,n) \in W_m \,\&\, D_n \subseteq X)\}.$$

Операторы перечисления, очевидно, обладают следующими свойствами:

монотонность: если $X \subseteq Y$, то $\Phi_m(X) \subseteq \Phi_m(Y)$;

непрерывность: если $y \in \Phi_m(X)$, то существует конечное множество $X' \subseteq X$ такое, что $y \in \Phi_m(X')$.

Назовем произвольное непустое множество e–степеней *e–идеалом*, если оно замкнуто вниз относительно e–сводимости и относительно взятия точных верхних граней для пар элементов.

Нам будет полезен следующий ещё не опубликованный результат А.С.Морозова и В.Г.Пузаренко, сводящий изучение Σ–подмножеств ω к изучению e–идеалов.

ТЕОРЕМА 1.

1. *Для всякого допустимого множества* $\mathbb{A}$ *существует e–идеал I такой, что множество Σ–подмножеств натуральных чисел в* $\mathbb{A}$ *совпадает с семейством* $\{S | \deg_e(S) \in I\}$.

2. *Для всякого e–идеала I существует допустимое множество* $\mathbb{A}$, *в котором множество Σ–подмножеств натуральных чисел совпадает с семейством* $\{S | \deg_e(S) \in I\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Существует допустимое множество* $\mathbb{A}$ *и два его бесконечных* Σ*-подмножества* S_0, S_1, *состоящие из натуральных чисел, такие, что* $S_0 \not\leq S_1$ *и* $S_1 \not\leq S_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 1 достаточно построить множества S_0 и S_1 такие, что для всех m выполнены следующие требования:

$\mathbf{R}_{2m}$: если $\Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ — график функции f с областью определения, содержащей S_0, то неверно, что $f(S_0) = S_1$;

$\mathbf{R}_{2m+1}$: если $\Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ — график функции f с областью определения, содержащей S_1, то неверно, что $f(S_1) = S_0$.

Зафиксируем начальные значения для множеств $S_0 \subseteq \omega$ и $S_1 \subseteq \omega$ мощности ω. В ходе построения мы будем уменьшать множества S_0 и S_1 так, чтобы выполнить указанные требования. Кроме того, на каждом шаге будет определена так называемая *стабильная область*, т.е. начальный отрезок натурального ряда, на котором мы, начиная с момента его определения, уже никогда не будем изменять множества S_0 и S_1. Результатом построения будут предельные значения множеств S_0 и S_1.

Укажем стратегию удовлетворения требования вида $\mathbf{R}_{2m}$. Требования вида $\mathbf{R}_{2m+1}$ удовлетворяются аналогичным образом.

Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. $f = \Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ — не функция.

Тогда существуют $\langle x, y_0\rangle, \langle x, y_1\rangle \in \Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ такие, что $y_0 \neq y_1$. Поскольку существует конечное подмножество $B \subseteq S_0 \oplus S_1$ такое, что $\langle x, y_0\rangle, \langle x, y_1\rangle \in \Phi_m(B)$, можно расширить стабильную область так, что при любых дальнейших уменьшениях множеств S_0 и S_1 будет выполнено $\langle x, y_0\rangle, \langle x, y_1\rangle \in \Phi_m(S_0 \oplus S_1)$, и, таким образом, для предельных значений S_0 и S_1 множество $\Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ не будет графиком функции. Расширим стабильную область, чтобы удовлетворить это требование.

Случай 2. Функция f с графиком $\Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ не определена, по крайней мере, на одном элементе $a \in S_0$.

В этом случае расширим стабильную область так, чтобы она содержала этот элемент a. Поскольку все операторы перечисления монотонны, при последующих уменьшениях множеств S_0 и S_1 график $\Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ может только уменьшиться, и для предельных значений множеств S_0 и S_1 элемент a не будет содержаться в области определения этой функции.

Случай 3. Множество $\Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ является графиком некоторой функции f с областью определения, включающей S_0 и такой, что $f(S_0) = S_1$.

Предполагая, что множество S_1 бесконечно, уберем из него некоторый элемент y, не лежащий в стабильной области. Далее, если при так полученном новом значении множества $S_0 \oplus S_1$ найдется $x \in S_0$ такой, что новая функция с графиком $\Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ отображает x в y, расширяем стабильную область так, чтобы сохранить это свойство навсегда. Если же такого x не существует, то ничего не делаем.

Случай 4. Множество $\Phi_m(S_0 \oplus S_1)$ является графиком некоторой функции f, область определения которой содержит S_0, и при этом $f(S_0) \setminus S_1 \neq \emptyset$ либо $S_1 \setminus f(S_0) \neq \emptyset$.

В этом случае расширяем стабильную область так, чтобы сохранить это свойство навсегда.

Из стратегии удовлетворения требований следует, что во всех этих случая требование $\mathbf{R}_m$, будучи однажды удовлетворено, будет удовлетворено и при предельных значениях множеств S_0 и S_1.

Опишем теперь само *построение* множеств S_0 и S_1. На каждом шаге t построения мы сначала применяем стратегию для удовлетворения требования $\mathbf{R}_t$, а потом расширяем стабильную область так, чтобы она захватила новые элементы множеств S_0 и S_1, чтобы обеспечить бесконечность этих множеств. Описание построения закончено.

Из свойств приведенного построения следует, что полученные в результате множества S_0 и S_1 — искомые. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существуют допустимое множество* $\mathbb{A}$ *и семейство его бесконечных* Σ*-подмножеств* $S_0, S_1, S_2, \ldots$ *, со-*

стоящие из натуральных чисел такие, что $S_i \not\leq S_j$ при всех $i, j \in \omega$, $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывается аналогичным образом с некоторым усложнением конструкции. Необходимо удовлетворить требования

$\mathbf{R}_{ij}$, $i, j \in \omega$, $i \neq j$: если $\Phi_m(S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots)$ — график функции f с областью определения, содержащей S_i, то неверно, что $f(S_i) = S_j$.

Стратегия удовлетворения этих требований и общий ход конструкции такие же как и в доказательстве теоремы 2. □

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если S бесконечно распараллеливаемый перечислитель, содержащий как минимум два элемента, то S — распараллеливаемый перечислитель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a и b — два различных элемента из S. Утверждение следует из существования Σ–отображения g из $S \times S$ на $S \oplus S$, определенного как

$$g(\langle x, y\rangle) = \begin{cases} \langle x, 0\rangle, & \text{если } y = a, \\ \langle x, 1\rangle, & \text{если } y = b, \\ \langle a, 0\rangle, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

□

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть S — произвольное множество натуральных чисел. Тогда множество $S^{<\omega}$ всех кодов конечных последовательностей из S бесконечно распараллеливаемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что отображение f : $S^{<\omega} \to S^{<\omega} \times S^{<\omega}$, значение которого на α равно

$$\langle \textit{первые } \ell\ell(\mathrm{lh}(\alpha)) \textit{ членов } \alpha, \textit{последующие } r\ell(\mathrm{lh}(\alpha)) \textit{ членов } \alpha\rangle,$$
$$\textit{если } \ell\ell(\mathrm{lh}(\alpha)) + r\ell(\mathrm{lh}(\alpha)) \leqslant \mathrm{lh}(\alpha) \textit{ и } \langle\varnothing, \varnothing\rangle \textit{ в остальных случаях},$$

всегда Σ–определимо и отображает $S^{<\omega}$ на $S^{<\omega} \times S^{<\omega}$. □

Теперь мы можем усилить следствие 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существуют допустимое множество $\mathbb{A}$ и семейство его бесконечных Σ–подмножеств $S_0, S_1, S_2, \ldots$, состоящих из натуральных чисел таких, что все они являются* *бесконечно распараллеливаемыми перечислителями и выполнено* $S_i \not\leq S_j$ *при всех* $i, j \in \omega$, $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2 и следствия 1 с дальнейшим усовершенствованием конструкции. Как и ранее, необходимо удовлетворить требования

$\mathbf{R}_{ij}$, $i, j \in \omega$, $i \neq j$: если $\Phi_m(S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \dots)$ — график функции f с областью определения, содержащей S_i, то неверно, что $f(S_i) = S_j$.

При этом мы строим множества S_i как $\overline{S}_i^{<\omega}$, где все $\bar{S}_i$ бесконечны, уменьшая множества S_i путем уменьшения множеств $\overline{S}_i$. Если на каком-то шаге новый элемент $\alpha = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ попадает в стабильную область, то мы обязуемся в дальнейшем не изменять характеристические функции множеств $\overline{S}_i$ на всех элементах $x_1, \dots, x_n$. При разборе случая 3, единственного из случаев в котором мы реально уменьшаем некоторое множество, надо в качестве y выбирать $y = \langle z \rangle$, не принадлежащее стабильной области, причем такое, что у нас на данный момент нет обязательств не изменять характеристические функции множеств на элементе z.

В остальном стратегия удовлетворения этих требований и общий ход конструкции такие же как и в доказательстве теоремы 2.□

Литература

1. МОРОЗОВ А.С., САМОХВАЛОВ К.Ф. О возможных типах времени в обобщенной теории вычислимости// Методологические аспекты когнитивных процессов. — Новосибирск, 2002. — Вып.170: Вычислительные системы. - С.45–51.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Вычислимость и определимость. - Новосибирск: Научная книга, 1996.- 286 с.

3. BARWISE J. Admissible Sets and Structures. — Berlin, Springer-Verlag, Gōttingen, Heidelberg, 1975.- 394 с.

4. ROGERS H. Theory of recursive functions and effective computability.– New York, St.Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney: McGraw–Hill Book Company, 1967.

Поступила в редакцию
18 ноября 2002 года