

# АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ (Вычислительные системы)

2005 год

Выпуск 174

УДК 519.86:519.876.3

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ И СТОИМОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ НА СЕТЕВЫХ МОДЕЛЯХ С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТАБЛИЦ

Ю.А. Устюгов

### В в е д е н и е

При оптимизации сетевых экономико-математических моделей чаще всего [1-5] и др. основываются на анализе временных характеристик состояний сетевых графиков бизнес-процессов. В статье предложен подход, исключающий из рассмотрения анализ временных характеристик состояний сетевых графиков и позволяющий оптимизировать временные и стоимостные характеристики бизнес-процессов с помощью специальных таблиц, т.е. табличным методом. Возможности подхода продемонстрированы при решении ряда оптимизационных [6] экономико-математических задач табличным методом: сокращение времени выполнения проекта на заданное и максимальное время при его минимальном удорожании, максимальное снижение стоимости проекта при фиксированном времени его выполнения, включая ситуацию, когда оно ограничивает время выполнения некритических работ. Предложенный подход позволяет оптимизировать сетевые модели бизнес-процессов как на всем множестве возможных работ, так и на их подмножествах.

## 1. Основные процедуры сетевого моделирования экономико-математических оптимизационных задач

Сетевое моделирование — метод оптимизации времени и стоимости осуществления бизнес-процессов, предусматривающих параллельно-последовательное выполнение сложного комплекса взаимосвязанных работ различной продолжительности и стоимости.

Основными этапами оптимизации бизнес-процессов в ходе их сетевого моделирования являются: построение, анализ и оптимизация сетевого графика выполнения работ проекта как на этапе планирования и технико-экономического основания проекта, так и в ходе его корректировки и выполнения.

Сетевое моделирование развиваемых во времени  $t$  бизнес-процессов  $\xi(t)$  включает выполнение следующих процедур:

1) подготовку к сетевому моделированию следующих исходных данных:

а) перечня работ  $1, 2, \dots, j, \dots, J$ , выполнение которых реализует проект;

б)  $J$  перечней  $J_1, J_2, \dots, J_j, \dots, J_J$  работ, выполнение которых должно предшествовать работам  $1, 2, \dots, j, \dots, J$  соответственно;

в) значение минимального  $t_{\min j}$  и максимального  $t_{\max j}$  времени  $t_j$  выполнения каждой работы  $1, 2, \dots, j, \dots, J$ ,  $j \in [1, J]$ ;

г) значение минимальной стоимости  $c_{\min j}$  выполнения каждой работы  $j$  при  $t_j = t_{\max j}$  и максимальной стоимости  $c_{\max j}$  выполнения каждой работы  $j$  при  $t_j = t_{\min j}$ ,  $j \in [1, J]$ .

Другими словами, в состав исходных данных для сетевого моделирования входит следующее:

$$\text{перечень работ: } 1, 2, \dots, j, \dots, J; \quad (1)$$

$$\text{перечни работ — предшественниц: } J_1, J_2, \dots, J_j, \dots, J_J; \quad (2)$$

$$t_{\min j}, t_{\max j}, j \in [1, J]; \quad (3)$$

$$c_{\min j}, c_{\max j}, j \in [1, J]; \quad (4)$$

2) построение сетевого графика выполнения комплекса взаимосвязанных  $J$  работ на основе исходных данных (1)–(3), при

этом формируется  $K$  состояний  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_K$  бизнес-процесса  $\xi(t)$ , через которые он проходит в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_K$  соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} \xi(t_1 = 0) = A_1, \xi(t_2) = A_2, \dots, \xi(t_k) = A_k, \dots \\ \dots, \xi(t_K = T_{KP}) = A_K, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $T_{KP}$  – время выполнения всего комплекса  $J$  работ; выполнение одной или нескольких работ  $j \in [1, J]$  приводит к смене состояния процесса  $\xi(t)$  во времени;

3) выявление, составление перечня и анализ всех возможных  $m$  путей  $1, 2, \dots, i, \dots, m$  перехода бизнес-процесса  $\xi(t)$  из исходного состояния  $A_1$  в конечное состояние  $A_K$  в результате выполнения в течение времени  $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_m$  последовательности работ  $L_1, L_2, \dots, L_i, \dots, L_m$  соответственно;

4) выявление, составление перечня и анализа всех  $n_{KP}$  критических путей  $1_{KP}, 2_{KP}, \dots, i_{KP}, \dots, n_{KP}$  из множества определенных при выполнении п.3  $m$  путей,  $m \geq n_{KP}$ , имеющих максимальную продолжительность  $T_{1KP}, T_{2KP}, \dots, T_{iKP}, \dots, T_{nKP}$ , равную величине  $T_{KP}$ , т.е.

$$\begin{aligned} T_{1KP} = T_{2KP} = \dots = T_{iKP} = \dots = T_{nKP} = T_{KP} = \\ = \max (T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_m), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T_{1KP} &= \sum_{j \in L_{KP1}} t_j, \\ T_{2KP} &= \sum_{j \in L_{KP2}} t_j, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ T_{iKP} &= \sum_{j \in L_{KPi}} t_j, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ T_{nKP} &= \sum_{j \in L_{KPn}} t_j. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В выражениях (7)  $t_j$  — время выполнения работы  $j$ ,  $j \in [1, J]$ . Работы  $j$ , входящие в последовательности работ  $L_{1KP}, L_{2KP}, \dots, \dots, L_{iKP}, \dots, L_{nKP}$  критических путей  $1_{KP}, 2_{KP}, \dots, i_{KP}, \dots$ ,

...,  $n_{KP}$ , — критические работы, составляющие множество  $J_{KP}$  работ  $n$  критических путей. Все остальные работы  $j$ , не входящие в  $n$  критических путей, т.е.  $j \notin J_{KP}$ , — не критические работы. Время выполнения критических работ  $j \in J_{KP}$  определяет время выполнения бизнес-проекта в целом, т.е. время  $T_{KP}$ . Время выполнения не критических работ  $j \notin J_{KP}$  не определяет время выполнения всего комплекса  $J$  работ.

Стоимость  $c_j$  работы  $j$  зависит от времени ее выполнения  $t_j$  по заданному закону  $c_j(t_j)$ ,  $j \in [1, J]$ . Для определенности исходных данных (1)–(4) рассмотрим случай линейной зависимости  $c_j(t_j)$ , при которой стоимость  $\lambda_j$  сокращения времени выполнения работы  $j$  на одну единицу времени определяется следующим образом:

$$\lambda_j = \frac{c_{\max j} - c_{\min j}}{t_{\max j} - t_{\min j}}, \quad j \in [1, J]. \quad (8)$$

Отметим, что уменьшение времени выполнения работ  $j$  на единицу связано с увеличением количества используемых ресурсов, а значит и с увеличением стоимости  $c_j$  выполнения работы  $j$  на величину  $\lambda_j$ . Для определения по формуле (8) величин  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_J)$  достаточно исходных данных (1)–(4). В общем случае  $c_j(t_j)$ ,  $j \in [1, J]$ , могут быть произвольно заданными дискретными величинами с требуемым шагом дискретизации по времени  $t_j$ .

Стоимость  $C$  выполнения за время  $T_{KP}$  всего комплекса  $J$  работ определяется по формуле:

$$C(T_{KP}) = \sum_{j=1}^J c_j(t_j). \quad (9)$$

Согласно выражениям (6), (7) и (9) стоимость проекта  $C(T_{KP})$  существенно определяется выбранными временами  $t_j$  выполнения работ  $j$ ,  $j \in [1, J]$ . Наличие в исходных данных (3) диапазона возможных изменений времени  $t_j \in [t_{\min j}, t_{\max j}]$ ,  $j \in [1, J]$ , с учетом выражения (8) определяет возможность постановки ряда оптимизационных экономико-математических задач и их решения с использованием сетевых моделей. В параграфах 3–6

приведено решение табличным методом оптимизационных задач четырех типов.

*Задача 1.* Сократить время выполнения проекта  $T_{KP}$  до директивного времени  $T_{ДИР} < T_{KP}$  при минимальном удорожании проекта, т.е.

$$C(T_{ДИР}) = \sum_{j=1}^J c_j(t_j) \rightarrow \min \quad (10)$$

при условиях (1)–(4). Решением задачи (10) является такой набор чисел — времени выполнения  $J$  работ

$$\bar{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \dots, t_j^*, \dots, t_J^*), \quad (11)$$

при котором одновременно достигаются две цели:

$$C(T_{ДИР}) = \sum_{j=1}^J c_j(t_j^*) = \min, \quad (12)$$

а время выполнения проекта  $T_{KP}$  уменьшится до величины  $T_{ДИР}$ , т.е. сократится на

$$\Delta T_{ДИР} = T_{KP} - T_{ДИР} \quad (13)$$

единиц времени.

*Задача 2.* Максимально сократить время выполнения проекта  $T_{KP}$  (до величины  $T_{KP \min}$ ) при минимальном удорожании проекта, т.е.

$$C(T_{KP \min}) = \sum_{j=1}^J c_j(t_j) \rightarrow \min \quad (14)$$

при условиях (1)–(4). Решение задачи (14) подобно решению задачи (10), определенному выражениями (11) и (12). Существенное отличие этих задач в том, что величина  $\Delta T$ , определяемая выражением (13), в задаче (10) директивно задается, в задаче (14) — один из результатов ее решения.

Заметим, что если величина

$$\Delta T_{\max} = T_{KP} - T_{KP \min} \quad (15)$$

в задаче 2 будет связана с выражением (13) соотношением

$$\Delta T_{\max} < \Delta T_{\text{ДИР}}, \quad (16)$$

то задача 1 не имеет решения.

*Задача 3.* Максимально сократить стоимость проекта  $C(T_{KP})$  при фиксированном времени его выполнения, т.е.

$$C(T_{KP}) = \sum_{j=1}^J c_j(t_j) \rightarrow \min, \quad T_{KP} = \text{const}, \quad (17)$$

при условиях (1)–(4). Если в задачах 1–2 сокращение времени выполнения проекта  $T_{KP}$  осуществляется за счет уменьшения времени  $t_j$  выполнения критических работ  $j \in J_{KP}$ , то в задаче 3, определенной в выражении (17), сокращение стоимости проекта  $C(T_{KP} = \text{const})$  достигается за счет увеличения времени выполнения некритических работ  $j \notin J_{KP}$ .

*Задача 4.* Максимально сократить стоимость проекта  $C(T_{KP})$  при фиксированном времени его выполнения [см. формулу (17)] при частичном снятии ограничения (3) в отношении  $t_{\max j}$  для некритических работ  $j \notin J_{KP}$  — возможности увеличения времени некритических работ ограничены заданным временем выполнения проекта  $T_{KP}$ .

Сетевой график бизнес-процесса  $\xi(t)$  — графическое изображение совокупности  $J$  работ  $1, 2, \dots, j, \dots, J$  и  $K$  состояний  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_K$ , увязанных друг с другом в соответствии с исходными данными (1)–(3).

**ПРИМЕР 1.** Пусть моделируемый (анализируемый) бизнес-процесс  $\xi(t)$  имеет исходные данные (1)–(4), конкретизированные в табл.1. Из табл.1 следует, что  $J = 10$ .

Т а б л и ц а 1

Номер работы $j \in [1, J]$	Номера работ-предшест-венниц $j_j$ $j \in [1, J]$	$l_{\max}^{j, j}$ [суток] $j \in [1, J]$	$l_{\min}^{j, j}$ [суток] $j \in [1, J]$	$c_{\min}^{j, j}$ [млн. руб.] $j \in [1, J]$	$c_{\max}^{j, j}$ [млн. руб.] $j \in [1, J]$
1	2,5	6	4	9	12
2	7,9	5	2	9	18
3	—	24	20	36	44
4	6,8	6	5	9	11
5	10	12	12	18	18
6	2,5	6	4	9	13
7	—	15	14	18	20
8	7,9	12	11	18	19
9	10	11	9	9	13
10	—	6	6	9	9

Сетевой график, соответствующий табл. 1, имеет вид, приведенный на рис. 1.

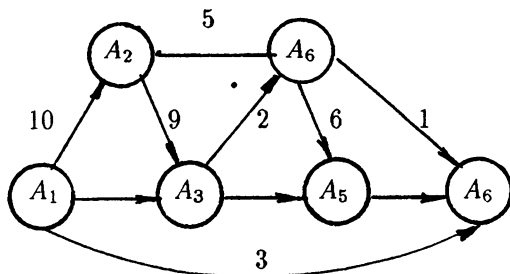


Рис. 1

## 2. Анализ путей перехода процесса $\xi(t)$ от исходного $A_1$ к конечному $A_K$ состоянию, определение перечня критических путей и времени выполнения проекта

Для определения перечня  $m$  путей перехода бизнес-процесса  $\xi(t)$  от исходного  $A_1$  к конечному состоянию  $A_K$  проанализируем сетевой график по схеме, приведенной на рис. 2.

$$\begin{aligned}
 10 \dots 1 &\rightarrow (10, 5, 1) = L_1 \rightarrow i = 1 \\
 &\quad (10, 9, 2, 1) = L_2 \rightarrow i = 2 \\
 10 \dots 4 &\rightarrow (10, 5, 6, 4) = L_3 \rightarrow i = 3 \\
 &\quad (10, 9, 8, 4) = L_4 \rightarrow i = 4 \\
 &\quad (10, 9, 2, 6, 4) = L_5 \rightarrow i = 5 \\
 7 \dots 1 &\rightarrow (7, 2, 1) = L_6 \rightarrow i = 6 \\
 7 \dots 4 &\rightarrow (7, 8, 4) = L_7 \rightarrow i = 7 \\
 &\quad (7, 2, 6, 4) = L_8 \rightarrow i = 8 \\
 3 &\rightarrow (3) = L_9 \rightarrow i = 9
 \end{aligned}$$

Рис. 2

Если выходить из исходного состояния  $A_1$  через работу 10, то войти в конечное состояние  $A_6$  можно либо через работу 1 (на



рис. 2 — последовательности работ  $L_1$  и  $L_2$  для путей 1 и 2), либо через работу 4 (на рис. 2 — последовательности работ  $L_3, L_4, L_5$  для путей 3, 4 и 5). Далее, если выходить из исходного состояния  $A_1$  через работу 7, то войти в конечное состояние  $A_6$  можно либо через работу 1 (на рис. 2 — последовательности работ  $L_6$  для пути 6), либо через работу 4 (на рис. 2 — последовательности работ  $L_7$  и  $L_8$  для путей 7 и 8). Последний путь 9 очевиден:  $L_9 = (3)$ . Таким образом, величина  $m$  для сетевого графика, изображенного на рис. 1, равна 4.

Определяя продолжительность  $T_i$  пути  $i$ ,  $i = \overline{1, 9}$ , по формуле:

$$T_i = \sum_{j \in L_i} t_j, \quad i = \overline{1, 9}, \quad (18)$$

из табл. 1 (столбец 3) при условии:

$$t_j = t_{\max j}, \quad j = \overline{1, 10}, \quad (19)$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 6 + 12 + 6 = 24 \text{ [сут.]}, \\ T_2 &= 6 + 11 + 5 + 6 = 28 \text{ [сут.]}, \\ T_3 &= 6 + 12 + 6 + 6 = 30 \text{ [сут.]}, \\ T_4 &= 6 + 11 + 12 + 6 = 35 \text{ [сут.]}, \\ T_5 &= 6 + 11 + 5 + 6 + 6 = 34 \text{ [сут.]}, \\ T_6 &= 15 + 5 + 6 = 26 \text{ [сут.]}, \\ T_7 &= 15 + 12 + 6 = 33 \text{ [сут.]}, \\ T_8 &= 15 + 5 + 6 + 6 = 32 \text{ [сут.]}, \\ T_9 &= 24 \text{ [сут.]}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Из системы равенств (20) и рис. 2 после упорядочения 9 путей по их продолжительности получаем приоритетный ряд пу-

тей:

$$\left. \begin{aligned} L_4 &= (10, 9, 8, 4) \rightarrow T_4 = 35 \text{ [сут.]}, \\ L_5 &= (10, 9, 2, 6, 4) \rightarrow T_5 = 34 \text{ [сут.]}, \\ L_7 &= (7, 8, 4) \rightarrow T_7 = 33 \text{ [сут.]}, \\ L_8 &= (7, 2, 6, 4) \rightarrow T_8 = 32 \text{ [сут.]}, \\ L_3 &= (10, 5, 6, 4) \rightarrow T_3 = 30 \text{ [сут.]}, \\ L_2 &= (10, 9, 2, 1) \rightarrow T_2 = 28 \text{ [сут.]}, \\ L_6 &= (7, 2, 1) \rightarrow T_6 = 26 \text{ [сут.]}, \\ L_1 &= (10, 5, 1) \rightarrow T_1 = 24 \text{ [сут.]}, \\ L_9 &= (3) \rightarrow T_9 = 24 \text{ [сут.]}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Анализ системы равенств (21) показывает, что единственный четвертый путь ( $i = 4$ ) имеет максимальную продолжительность 35 суток, следовательно, число  $n_{KP}$  критических путей при условии (19) равно единице, т.е.  $n_{KP} = 1$ , а время выполнения проекта  $T_{KP} = 35$  суток. Общая стоимость проекта  $C(T_{KP})$  согласно формуле (9) при условии (19):

$$c_j(t_j) = c_j(t_j = t_{\max j}) = c_{\min j}, \quad j = \overline{1, 10}, \quad (22)$$

и согласно табл. 1 (столбец  $c_{\min j}$  — столбец 6) определится следующим образом:

$$\begin{aligned} C(T_{KP}) = C(35) &= \sum_{j=1}^{10} c_{\min j} = 9 + 9 + 36 + 9 + 18 + 9 + \\ &+ 18 + 18 + 9 + 9 = 144 \text{ [млн.руб.]}. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, в результате построения и анализа сетевого графика, соответствующего исходным данным табл. 1 (столбцы 1–3, 6), получены следующие результаты:

а) число работ в сетевом графике  $j = 10$ ; (24)

б) число состояний в сетевом графике  $K = 6$ ; (25)

в) число путей перехода процесса  $\xi(t)$  из исходного состояния  $A_1$  в конечное состояние  $A_6$   $m = 9$ ; (26)

г) число критических путей  $n_{KP} = 1$ ; (27)

д) критический путь 4 составляют  
работы  $(10, 9, 8, 4) = L_4$ ; (28)

е) время выполнения проекта  $T_{KP} = 35$  суток; (29)

ж) стоимость проекта  $C(T_{KP}) = 144$  млн.руб.  
[см. формулу (23)].

Результаты (23)–(29) получены при условии (19), т.е.

$$\begin{aligned}\bar{t} = \bar{t}_1 &= (t_{\max 1}, t_{\max 2}, \dots, t_{\max j}, \dots, t_{\max 10}) = \\ &= (6, 5, 24, 6, 12, 6, 15, 12, 11, 6).\end{aligned}\quad (30)$$

### 3. Сокращение времени выполнения проекта на заданное число суток при его минимальном удорожании

В § 1 в общем виде в выражениях (10), (1)–(4) определена математическая постановка рассматриваемой задачи, в выражениях (11)–(13) — ее решение. Проиллюстрируем поиск оптимального решения задачи рассматриваемого класса табличным способом на конкретном примере.

**ПРИМЕР 2.** Для условий примера 1 сократить время выполнения проекта на 4 суток при его минимальном удорожании.

В табл. 2 приведены результаты расчета резерва  $\Delta t_j$  сокращения времени выполнения  $t_j$  работ критического пути ( $i = 4$ ) [см. выражение (28)] по формуле

$$\Delta t_j = t_{\max j} - t_{\min j}, \quad j \in [4, 8, 9, 10], \quad (31)$$

и величины  $\lambda_j$ ,  $j \in [4, 8, 9, 10]$ , по формуле (8) на основе исходных данных, приведенных в табл.1 (столбцы 3–6). Прочерки в последней строке табл. 2 говорят о том, что время выполнения работы 10 сокращать нельзя.

Т а б л и ц а 2

Номер работы $j$	$\Delta t_j$ , [суток]	$\lambda_j$ , [млн.руб./сут.]
8	1	1.0
4	1	2.0
9	2	2.0
10	—	—

Определим оптимальное решение:  $\bar{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \dots, t_j^*, \dots, t_{10}^*)$  итерационным путем с помощью специальной табл. 3 — таблицы оптимизации сетевой модели. Данная таблица имеет три части: верхняя часть (строки 1–4) — для отображения результатов изменения продолжительности  $T_i$  путей,  $i = 4, 5, 7$  и 8; средняя часть (строки 5–8) — для отображения результатов изменения продолжительности  $t_j$  работ  $j$  критического пути ( $i_{KP} = 4$ ); нижняя часть (строки 9–11) — для отображения результатов изменения числа критических путей  $n_{KP}$ , времени выполнения проекта  $T_{KP}$  и его стоимости  $C(T_{KP})$ . Во втором столбце табл. 3 в верхней части перечисляются работы путей 4, 5, 7 и 8 (см. рис. 2), в средней части приведены значения величин  $\lambda_j$  и  $\Delta t_j$  для работ  $j$  критического пути, т.е.  $j = 8, 4$  и 9, взятые из табл. 2.

В первую часть таблицы попадают лишь пути  $i$ , имеющие продолжительность

$$T_i \leq (T_{KP} - \Delta T_{дир}) = 35 - 4 = 31[\text{сут.}] \quad (32)$$

Во второй части табл. 3 не отражена работа 10 критического пути 4, которая в силу табл. 2 не подлежит ускорению. В третьем столбце табл. 3 приведены параметры сетевой модели примера 1 перед этапом оптимизации — данные выражений (21), (27)–(30).

Сокращение времени выполнения проекта  $T_{KP}$  на 4 дня осуществляется за четыре шага.

ШАГ 1. Определяем работу  $j \in L_4 = (10, 9, 8, 4)$ , за счет сокращения на 1 сутки которой уменьшится время  $T_{KP}$  на 1 сутки. Так как сокращение времени выполнения проекта должно выполняться при условии (10), то на данном шаге сокращаем

Т а б л и ц а 3

№ п/п	Перечень работ пути $i$	$T_i$ при $\bar{t} = \bar{t}_1$	Шар 1	Шар 2	Шар 3	Шар 4
			$T_i$ при $\bar{t} = \bar{t}_2$	$T_i$ при $\bar{t} = \bar{t}_3$	$T_i$ при $\bar{t} = \bar{t}_4$	$T_i$ при $\bar{t} = \bar{t}_5 = \bar{t}^*$
1	(10,9,8,4)= $L_4$	35*	34*	33*	32*	31*
2	(10,9,2,6,4)= $L_5$	34	34*	33*	32*	31*
3	(7,8,4)= $L_7$	33	32	31	31	31*
4	(7,2,6,4)= $L_8$	32	32	31	31	31*
5	Номер работ $j$	$t_j$ при $\bar{t} = \bar{t}_1$	$t_j$ при $\bar{t} = \bar{t}_2$	$t_j$ при $\bar{t} = \bar{t}_3$	$t_j$ при $\bar{t} = \bar{t}_4$	$t_j$ при $\bar{t} = \bar{t}_5 = \bar{t}^*$
6	8	12→	11	11	11	11
7	4	6	6→	5	5	5
8	9	11	11	11→	10→	9
9	$\Sigma_{\text{ПКР}}$		2	2	2	4
10	$T_{\text{КР}}$ , [суток]		34	33	32	31
11	$C(T_{\text{КР}})$ , [млн.руб.]		145	147	149	151

время  $t_8$ , т.е. после выполнения шага 1 с учетом табл. 1:

$$t_8^{(1)} = t_8 - 1 = 12 - 1 = 11[\text{сут.}], \quad (33)$$

$$T_{KP}^{(1)} = T_{KP} - 1 = 35 - 1 = 34[\text{сут.}], \quad (34)$$

при этом:

$$C(T_{KP}^{(1)}) = C(T_{KP}) + \lambda_8 = 144 + 1 = 145[\text{млн.руб.}]. \quad (35)$$

Полученные результаты (33)-(35) заносим в столбец "Шаг 1" в клетки строк 6,10 и 11 табл. 3 соответственно. В силу выражения (33) продолжительности путей 4 и 7 (см. строки 1 и 3 табл. 3), включающих в перечни работ  $L_4$  и  $L_7$  работу 8, сократились на одни сутки:

$$T_4^{(1)} = T_4 - 1 = 35 - 1 = 34 [\text{сут.}], \quad (36)$$

$$T_7^{(1)} = T_7 - 1 = 33 - 1 = 32 [\text{сут.}], \quad (37)$$

Так как

$$\begin{aligned} T_4^{(1)} = T_5 = \max(T_4^{(1)}, T_5^{(1)}, T_7^{(1)}, T_8^{(1)}) = \\ = \max(34, 34, 32, 32) = 34 = T_{KP}^{(1)}, \end{aligned} \quad (38)$$

то после выполнения шага 1 число критических путей:

$$n_{KP}^{(1)} = 2 \quad (39)$$

и критическими путями являются пути 4 и 5 (см. табл. 3 — в строках 1 и 2 их продолжительности  $T_4^{(1)}$  и  $T_5 = T_5^{(1)}$  отмечены звездочкой).

После выполнения шага 1 в силу выражения (33) ресурс  $\Delta t_8$  сокращения времени выполнения работы 8:

$$\Delta t_8^{(1)} = \Delta t_8 - 1 = 1 - 1 = 0 [\text{сут.}]. \quad (40)$$

Результат (39) заносим в столбец "Шаг 1" (строка 9). Заметим, что при выполнении шага 1 значения величин  $T_5$  (строка

2),  $T_8$  (строка 4),  $t_4$  (строка 7),  $t_9$  (строка 8) остались без изменения. Что и отражено в соответствующих клетках столбца "Шаг 1" табл. 3.

ШАГ 2. За счет сокращения времени выполнения работы 4 на 1 сутки на данном шаге сокращается время выполнения проекта  $T_{KP}^{(1)}$  на 1 сутки:

$$t_4^{(2)} = t_4^{(1)} - 1 = t_4 - 1 = 6 - 1 = 5 \text{ [сут.]}, \quad (41)$$

$$\Delta t_4^{(2)} = \Delta t_4 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ [сут.]}, \quad (42)$$

$$T_{KP}^{(2)} = T_{KP}^{(1)} - 1 = 34 - 1 = 33 \text{ [сут.]}, \quad (43)$$

при этом

$$C[T_{KP}^{(2)}] = C[T_{KP}^{(1)}] + \lambda_4 = 145 + 2 = 147 \text{ [млн.руб.]}, \quad (44)$$

Полученные результаты (41), (43) и (44) заносим в столбец "Шаг 2" табл. 3 (строки 7, 10 и 11 соответственно).

Анализ результатов (40) и (42) показывает, что после выполнения шагов 1-2 ресурсы сокращения времени выполнения работ 8 и 4 исчерпаны.

В силу выражения (41) продолжительности  $T_i$  всех четырех путей  $i = 4, 5, 7, 8$  (см. строки 1-4 табл. 3) после выполнения шага 2 сократились на сутки, что согласно выражениям (36) и (37) означает:

$$T_4^{(2)} = T_4^{(1)} - 1 = 34 - 1 = 33 \text{ [сут.]}, \quad (45)$$

$$T_5^{(2)} = T_5^{(1)} - 1 = 34 - 1 = 33 \text{ [сут.]}, \quad (46)$$

$$T_7^{(2)} = T_7^{(1)} - 1 = 32 - 1 = 31 \text{ [сут.]}, \quad (47)$$

$$T_8^{(2)} = T_8^{(1)} - 1 = 32 - 1 = 31 \text{ [сут.]}, \quad (48)$$

Результаты (45)-(48) заносим в столбец "Шаг 2" табл. 3 (строки 1-4 соответственно).

Так как согласно выражениям (45)–(48), (43):

$$\begin{aligned} T_4^{(2)} = T_5^{(2)} &= \max(T_4^{(2)}, T_5^{(2)}, T_7^{(2)}, T_8^{(2)}) = \\ &= \max(33, 33, 31, 31) = 33 = T_{KP}^{(2)}, \end{aligned} \quad (49)$$

то после выполнения шага 2 число и перечень критических путей сохранились, при этом:

$$n_{KP}^{(2)} = n_{KP}^{(1)} = 2 \quad (50)$$

и критическими путями, как и при выполнении шага 1, являются пути 4 и 5 (в табл. 3 в столбце "Шаг 2" в строках 1 и 2 их продолжительности  $T_4^{(2)}$  и  $T_5^{(2)}$  отмечены звездочкой).

Результат (50) заносим в столбец "Шаг 2" табл. 3 (строка 9). Заметим, что при выполнении шага 2 значения величин  $t_8$  (строка 6) и  $t_9$  (строка 8) остались без изменения.

**ШАГ 3.** За счет сокращения времени выполнения работы 9 на 1 сутки на данном шаге сокращается время выполнения проекта  $T_{KP}^{(2)}$  на 1 сутки:

$$t_9^{(3)} = t_9^{(2)} - 1 = 12 - 1 = 11 \text{ [сут.]}. \quad (51)$$

$$\Delta t_9^{(3)} = \Delta t_9^{(2)} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ [сут.]}, \quad (52)$$

$$T_{KP}^{(3)} = T_{KP}^{(2)} - 1 = 33 - 1 = 32 \text{ [сут.]}, \quad (53)$$

при этом

$$C(T_{KP}^{(3)}) = C(T_{KP}^{(2)}) + \lambda_9 = 147 + 2 = 149 \text{ [млн.руб.]}. \quad (54)$$

Полученные результаты (51), (53) и (54) заносим в столбец "Шаг 3" табл. 3 (строки 8, 10 и 11 соответственно). Анализ результата (52) показывает, что остались одни сутки, на которые еще можно сократить время выполнения работы 9. Этой возможностью мы воспользуемся на шаге 4.

В силу выражения (51) продолжительности путей 4 и 5 (см. табл. 3 строки 1 и 2) уменьшатся на одни сутки:

$$T_4^{(3)} = T_4^{(2)} - 1 = 33 - 1 = 32 \text{ [сут.]}, \quad (55)$$



$$T_5^{(3)} = T_5^{(2)} - 1 = 33 - 1 = 32 \text{ [сут.]}. \quad (56)$$

Результаты (55) и (56) заносим в столбец "Шаг 3" табл. 3 (строки 1 и 2 соответственно).

Так как согласно выражениям (55), (56), (47), (48), (53):

$$\begin{aligned} T_4^{(3)} = T_5^{(3)} &= \max(T_4^{(3)}, T_5^{(3)}, T_7^{(3)}, T_8^{(3)}) = \\ &= \max(32, 32, 31, 31) = 32 = T_{KP}^{(3)}, \end{aligned} \quad (57)$$

то после выполнения шага 3 число и перечень критических путей сохранились прежними:

$$n_{KP}^{(3)} = n_{KP}^{(2)} = 2 \quad (58)$$

и критическими путями, как и на шаге 2, являются пути 4 и 5 (в табл. 3 в столбце "Шаг 1" в строках 1 и 2 их продолжительности  $T_4^{(3)}$  и  $T_5^{(3)}$  отмечены звездочкой). Результат (58) заносим в столбец "Шаг 3" табл. 3 (строка 9). Заметим, что при выполнении шага 3 значения величин  $T_7$  (строка 3),  $T_8$  (строка 4),  $t_8$  (строка 6) и  $t_4$  (строка 7) не изменились.

ШАГ 4. За счет сокращения времени выполнения работы 9 на 1 сутки время выполнения проекта  $T_{KP}^{(3)}$  сократится на сутки и достигнет требуемой величины  $35-4 = 31$  [сут.]:

$$t_9^{(4)} = t_9^{(3)} - 1 = 11 - 1 = 10 \text{ [сут.]}, \quad (59)$$

$$\Delta t_9^{(4)} = \Delta t_9^{(3)} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ [сут.]}, \quad (60)$$

$$T_{KP}^{(4)} = T_{KP}^{(3)} - 1 = 32 - 1 = 31 \text{ [сут.]}, \quad (61)$$

при этом

$$C(T_{KP}^{(4)}) = C(T_{KP}^{(3)}) + \lambda_9 = 149 + 2 = 151 \text{ [млн.руб.]}. \quad (62)$$

Полученные результаты (59), (61) и (62) заносим в столбец "Шаг 4" табл. 3 (строки 8, 10 и 11 соответственно). Результаты (40), (42) и (60) говорят о том, что возможности сокращения времени выполнения работ критического пути исчерпаны.

В силу выражений (59), (61) продолжительности путей 4 и 5 (см. табл. 3 строки 1 и 4) уменьшатся на одни сутки и с учетом выражений (55), (56) будут равны:

$$T_4^{(4)} = T_4^{(3)} - 1 = 32 - 1 = 31 \text{ [сут.]}, \quad (63)$$

$$T_5^{(4)} = T_5^{(3)} - 1 = 32 - 1 = 31 \text{ [сут.]}. \quad (64)$$

Результаты (63) и (64) заносим в столбец "Шаг 4" табл. 3 (строки 1 и 2).

Так как согласно выражениям (63), (64), (47), (48), (61):

$$\begin{aligned} T_4^{(4)} = T_5^{(4)} = T_7^{(2)} = T_8^{(2)} = \max(T_4^{(4)}, T_5^{(4)}, T_7^{(2)}, T_8^{(2)}) = \\ = \max(31, 31, 31, 31) = 31 = T_{KP}^{(4)}, \end{aligned} \quad (65)$$

то после выполнения шага 4 число и перечень критических путей изменились, при этом

$$n_{KP}^{(4)} = 4 \quad (66)$$

и критическими путями являются 4,5,7 и 8 (в табл. 3 в столбце "Шаг 4" в строках 1-4 их продолжительности  $T_4^{(4)}$ ,  $T_5^{(4)}$ ,  $T_7^{(4)}$ ,  $T_8^{(4)}$  отмечены звездочками).

Результат (66) заносим в столбец "Шаг 4" табл. 3 (строка 9). Отметим, что при выполнении шага 4 значения величин  $T_7$  (строка 3),  $T_8$  (строка 4),  $t_8$  (строка 6) и  $t_4$  (строка 7) остались без изменения.

Таким образом, в результате выполнения примера 2 с помощью табл. 3 сокращено время выполнения проекта с  $T_{KP} = 35$  суток (формула (29)) до времени  $T_{KP}^{(4)} = 31$  суток (формула (61)), т.е. на требуемое директивное время (формула (13)):

$$\Delta T_{\text{дир}} = T_{KP} - T_{KP}^{(4)} = 35 - 31 = 4 \text{ [сут.]}, \quad (67)$$

при этом стоимость проекта увеличилась с величины  $C(T_{KP}) = 144$  млн.руб. (формула (23)) до величины  $C(T_{KP}^{(4)}) =$

= 151 млн.руб. (формула (62)), т.е. возросла на минимальную величину:

$$\Delta C = C(T_{KP}^{(4)}) - C(T_{KP}) = 151 - 144 = 7 \text{ [млн.руб.]}. \quad (68)$$

Оптимальное решение  $t^*$  (см. формулу (11)), обеспечивающее экстремальное значение целевой функции (10), для условий примера 2 имеет следующий вид:

$$\bar{t}^* = (6, 5, 24, 5, 12, 6, 15, 11, 9, 6). \quad (69)$$

#### 4. Максимальное сокращение времени выполнения комплекса работ при минимальном удорожании его стоимости

В § 1 в выражениях (14), (1)–(4) определена в общем виде математическая постановка рассматриваемой задачи и дано ее сравнение с задачей § 3. Проиллюстрируем поиск оптимального решения задачи данного класса табличным способом на конкретном примере.

**ПРИМЕР 3.** Для бизнес-процесса  $\xi(t)$ , описываемого набором исходных данных (1)–(4), конкретизированных в табл. 4, максимально сократить время выполнения  $T_{KP}$  комплекса работ, предусмотренных процессом  $\xi(t)$ , при минимальном удорожании его стоимости при условии, что начальная величина  $T_{KP}$  определена при

$$t_j = t_{\max j}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad (70)$$

значения величин  $t_{\max j}, j = \overline{1, 6}$ , приведены в столбце 3 табл. 4.

Сетевой график, соответствующий табл. 4, приведен на рис. 3. Анализ сетевого графика показывает, что есть три пути ( $m = 3$ ) перехода процесса  $\xi(t)$  от исходного состояния  $A_1$  к конечному состоянию  $A_5$ :

$$L_1 = (1, 5) \rightarrow i = 1, \quad (71)$$

$$L_2 = (3, 6) \rightarrow i = 2, \quad (72)$$

$$L_3 = (2, 4, 6) \rightarrow i = 3. \quad (73)$$

Т а б л и ц а 4

Номер работы $j \in [1, 6]$	Номера работ-предшественниц $J_j$ , $j \in [1, 6]$	$t_{\max j}$ , [ед. времени], $j \in [1, 6]$	$t_{\min j}$ , [ед. времени], $j \in [1, 6]$	$c_{\min j}$ , [ден. ед.], $j \in [1, 6]$	$c_{\max j}$ , [ден. ед.], $j \in [1, 6]$
1	—	6	3	150	180
2	—	5	4	200	220
3	—	8	5	650	770
4	2	12	8	520	580
5	1	9	5	300	420
6	3,4	4	2	100	150

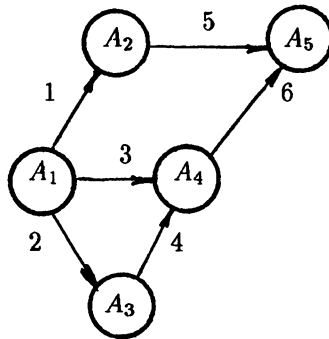


Рис. 3.

Определяя продолжительности  $T_1, T_2$  и  $T_3$  путей 1-3 по формуле (18) с учетом условия (70) и данных табл. 3 (столбец 3), получаем:

$$T_1 = t_{\max 1} + t_{\max 5} = 6 + 9 = 15 \text{ [ед.вр.]}, \quad (74)$$

$$T_2 = t_{\max 3} + t_{\max 6} = 8 + 4 = 12 \text{ [ед.вр.]}, \quad (75)$$

$$T_3 = t_{\max 2} + t_{\max 4} + t_{\max 6} = 5 + 12 + 4 = 21 \text{ [ед.вр.]}. \quad (76)$$

Из выражений (71)–(76) после упорядочения трех путей по их длительности, получаем:

$$L_3 = (2, 4, 6) \rightarrow T_3 = 21 \text{ ед.вр.}, \quad (77)$$

$$L_1 = (1, 5) \rightarrow T_1 = 15 \text{ ед.вр.}, \quad (78)$$

$$L_2 = (3, 6) \rightarrow T_2 = 12 \text{ ед.вр.} \quad (79)$$

Анализ выражений (77)–(79) показывает, что время выполнения комплекса работ  $T_{KP}$  при условии (70), т.е.  $T_{KP}(\bar{t})$ , определяется следующим образом:

$$T_{KP}(\bar{t}) = \max\{T_3, T_1, T_2\} = \max(21, 15, 12) = 21 \text{ (ед.вр.)}, \quad (80)$$

при этом стоимость  $C[T_{KP}(\bar{t})]$  выполнения комплекса работ с учетом выражения (22) равна:

$$\begin{aligned} C[T_{KP}(\bar{t})] &= C(21) = \sum_{j=1}^6 c_{\min j} = \\ &= 150 + 200 + 650 + 520 + 300 + 100 = 1920 \text{ [ден.ед.]}. \end{aligned} \quad (81)$$

Согласно выражениям (77) и (80) в сетевом графике (рис. 3) имеется один критический путь — путь 3, т.е.

$$n_{KP} = 1. \quad (82)$$

Состав работ критического пути 3: работы 2, 4 и 6.

Таким образом, перед началом поиска оптимального решения примера 3 (на нулевом шаге оптимизации) имеем следующие исходные данные:

$$n_{KP}^{(0)} = 1, \quad T_{KP}^{(0)} = 21 \text{ ед.вр.}, \quad C[T_{KP}]^{(0)} = 1920 \text{ [ден.ед.]}, \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}^{(0)} &= (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, t_3^{(0)}, t_4^{(0)}, t_5^{(0)}, t_6^{(0)}) = \\ &= (t_{\max 1}, t_{\max 2}, t_{\max 3}, t_{\max 4}, t_{\max 5}, t_{\max 6}) = \\ &= (6, 5, 8, 12, 9, 4), \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} T_3^{(0)} = 21, T_1^{(0)} = 15, T_2^{(0)} = 12 \rightarrow \bar{T}^0 = \\ = (15, 12, 21) = (T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, T_3^{(0)}). \end{aligned} \quad (85)$$

В табл. 5 приведены результаты расчета величин  $\Delta t_j$  (по формуле (31)) и  $\lambda_j$  (по формуле (8)) на основе данных табл. 4, упорядоченных в соответствии с приоритетным рядом (77)–(79) и по величине  $\lambda_j$ .

Определим оптимальное решение:

$$\bar{t}^* = (t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^*, t_6^*) \quad (86)$$

примера 3 итерационным путем с помощью специальной табл. 6 — таблицы оптимизации сетевой модели, структура которой аналогична табл. 3. В левую часть табл. 6 внесены данные выражений (77)–(79) и табл. 5.

В столбец  $\bar{T}^{(0)}$  табл. 6 внесены исходные данные, определенные в выражениях (83)–(85). Логика выполнения процедур на шагах 1–7 в табл. 6 аналогична тому, как это осуществлялось на шагах 1–4 в табл. 3.

Т а б л и ц а 5

Номер работы $j$	$\Delta t_j$ , [ед.вр.]	$\lambda_j$ , [ден.ед./ ед.вр.]
4	4	15
2	1	20
6	2	25
1	3	10
5	4	30
3	3	40

ШАГ 1. За счет сокращения времени выполнения работы 4 на одни сутки получаем после выполнения процедур шага 1 (см. § 3):

$$\left. \begin{aligned}
 t_4^{(1)} &= t_4^{(0)} - 1 = 12 - 1 = 11 \text{ [ед.вр.]}, \\
 \Delta t_4^{(1)} &= 4 - 1 = 3 \text{ [ед.вр.]}, \\
 \bar{t}^* &= (6, 5, 8, 11, 9, 4) \text{ [ед.вр.]}, \\
 T_3^{(1)} &= T_3^{(0)} - 1 = 21 - 1 = 20 \text{ [ед.вр.]}, \\
 T_{KP}^{(1)} &= \max(T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}) = \max(15, 12, 20) = \\
 &= 20 \text{ [ед.вр.]}, \\
 C[T_{KP}(\bar{t}^{(1)})] &= C[T_{KP}(\bar{t}^{(0)})] + \lambda_4 = \\
 &= 1920 + 15 = 1935 \text{ [ден.ед.]}, \\
 \bar{T}^* &= (15, 12, 20) \text{ [ед.вр.]}, \\
 n_{KP}^{(1)} &= 1.
 \end{aligned} \right\} (87)$$

Полученные на шаге 1 результаты (87) заносим в столбец "Шаг 1" табл. 6.

ШАГ 2-ШАГ 4. За счет сокращения времени выполнения работы 4 на сутки на каждом шаге 2, шаге 3 и шаге 4, т.е. в целом на трое суток, после выполнения шага 4, получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 t_4^{(4)} &= t_4^{(1)} - 3 = 11 - 3 = 8 \text{ [ед.вр.]}, \\
 \Delta t_4^{(4)} &= \Delta t_4^{(1)} - 3 = 3 - 3 = 0 \text{ [ед.вр.]}, \\
 \bar{t}^{(4)} &= (6, 5, 8, 8, 9, 4) \text{ [ед.вр.]}, \\
 T_3^{(4)} &= T_3^{(1)} - 3 = 20 - 3 = 17 \text{ [ед.вр.]}, \\
 T_{KP}^{(4)} &= \max(T_1^{(4)}, T_2^{(4)}, T_3^{(4)}) = \max(15, 12, 17) = \\
 &= 17 \text{ [ед.вр.]}, \\
 C[T_{KP}(\bar{t}^{(4)})] &= C[T_{KP}(\bar{t}^{(1)})] + \lambda_4 + \lambda_4 + \lambda_4 = \\
 &= 1920 + 15 + 15 + 15 = 1980 \text{ [ден.ед.]}, \\
 \bar{T}^{(4)} &= (T_1^{(4)}, T_2^{(4)}, T_3^{(4)}) = (15, 12, 17) \text{ [ед.вр.]}, \\
 n_{KP}^{(4)} &= 1.
 \end{aligned} \right\} (88)$$

Промежуточные результаты и итог выполнения шага 4 заносим в столбцы "Шаг 2", "Шаг 3" и "Шаг 4" табл. 6.

ШАГ 5. Дальнейшее сокращение на сутки времени выполнения комплекса работ  $T_{KP}^{(4)}$  на данном шаге осуществим за счет

сокращения времени выполнения  $t_2$  работы 2 на одни сутки (ресурс сокращения времени  $t_4$  работы 4 исчерпан, т.к.  $\Delta t_4^{(4)} = 0$  в формуле (88)). В результате получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 t_2^{(5)} &= t_2^{(4)} - 1 = 5 - 1 = 4 \text{ [ед.вр.]}, \\
 \Delta t_2^{(5)} &= \Delta t_2^{(4)} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ [ед.вр.]}, \\
 \bar{t}^{(5)} &= (t_1^{(5)}, t_2^{(5)}, t_3^{(5)}, t_4^{(5)}, t_5^{(5)}, t_6^{(5)}) = \\
 &= (6, 4, 8, 8, 9, 4) \text{ [ед.вр.]}, \\
 T_3^{(5)} &= T_3^{(4)} - 1 = 17 - 1 = 16 \text{ [ед.вр.]}, \\
 T_{KP}^{(5)} &= \max\{T_1^{(5)}, T_2^{(5)}, T_3^{(5)}\} = \\
 &= \max(12, 15, 16) = 16 \text{ [ед.вр.]}, \\
 C[T_{KP}(\bar{t}^{(5)})] &= C[T_{KP}(\bar{t}^{(4)})] + \lambda_2 = \\
 &= 1980 + 20 = 2000 \text{ [ден.ед.]}, \\
 \bar{T}^{(5)} &= (T_1^{(5)}, T_2^{(5)}, T_3^{(5)}) = \\
 &= (12, 15, 16) \text{ [ед.вр.]}, \\
 n_{KP} &= 1.
 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Результаты (89) заносим в табл. 6 (столбец "Шаг 5"). Заметим, что к моменту завершения этапа 5 возможность сокращения  $T_{KP}$  за счет работ 4 и 2 исчерпана, так как  $\Delta t_4^{(4)} = \Delta t_2^{(5)} = 0$  (см. формулы (88) и (89)).

**ШАГ 6.** Сокращение времени выполнения комплекса работ  $T_{KP}^{(5)}$  на данном шаге осуществим за счет сокращения на одни сутки следующей по приоритету (см. столбец  $\lambda_j$ , строку 7 табл. 6) работы 6. В результате получаем:



Т а б л и ц а 6

№ п/п	Перечень работ пути $i$ , $i = 1, 2, 3$			$\overline{f}^{(0)}$ при $\overline{f} = \overline{f}^{(0)}$	Шаг 1 $\overline{f}^{(1)}$	Шаг 2 $\overline{f}^{(2)}$	Шаг 3 $\overline{f}^{(3)}$	Шаг 4 $\overline{f}^{(4)}$	Шаг 5 $\overline{f}^{(5)}$	Шаг 6 $\overline{f}^{(6)}$	Шаг 7 $\overline{f}^{(7)}$
	Л <sub>3</sub> = (2, 4, 6) Л <sub>1</sub> = (1, 5) Л <sub>2</sub> = (3, 6)	Номер работы $j$	$\lambda_j$	$\Delta t_j$	$\overline{f}^{(0)}$	$\overline{f}^{(1)}$	$\overline{f}^{(2)}$	$\overline{f}^{(3)}$	$\overline{f}^{(4)}$	$\overline{f}^{(5)}$	$\overline{f}^{(6)}$
1		4	15	4	12 →	11 →	10 →	9 →	8	8	8
2		2	20	1	5	5	5	5	8	4	4
3		6	25	2	4	4	4	4	4 →	3 →	2
		1	10	3	6	6	6	6	6	6 →	5
		5	30	4	9	9	9	9	9	9	9
10		3	40	3	8	8	8	8	8	8	8
11	$n_{кр}$				1	1	1	1	1	2	2
12	$T_{кр}(t)$ , [ед.вр.]				21	20	19	18	16	15	14
13	$C[T_{кр}(t)]$ , [ден.ед.]				1920	1935	1950	1965	2000	2025	2060

$$\left. \begin{aligned}
 t_6^{(6)} &= t_6^{(5)} - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ [ед.вр.]}, \\
 \Delta t_6^{(6)} &= \Delta t_6^{(5)} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ [ед.вр.]}, \\
 \bar{t}^{(6)} &= (6, 4, 8, 8, 9, 3) \text{ [ед.вр.]}, \\
 T_3^{(6)} &= T_3^{(5)} - 1 = 16 - 1 = 15 \text{ [ед.вр.]}, \\
 T_{KP}^{(6)} &= \max\{T_1^{(6)}, T_2^{(6)}, T_3^{(6)}\} = \\
 &= \max(15, 11, 15) = 15 \text{ [ед.вр.]}, \\
 C[T_{KP}(\bar{t}^{(6)})] &= C[T_{KP}(\bar{t}^{(5)})] + \lambda_6 = \\
 &= 2000 + 25 = 2025 \text{ [ден.ед.]}, \\
 \bar{T}^{(6)} &= (T_1^{(6)}, T_2^{(6)}, T_3^{(6)}) = \\
 &= (15, 11, 15) \text{ [ед.вр.]}, \\
 n_{KP}^{(1)} &= 2.
 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Результаты (90) заносим в табл. 6 (столбец "Шаг 6"). Подчеркнем, что так как  $n_{KP}^{(2)} = 2$ , то после этапа 6 в сетевом графике два критических пути 3 и 1 (в табл. 6 в строках 1-2 продолжительности этих путей  $T_3^{(6)}$  и  $T_1^{(6)}$  отмечены звездочкой).

ШАГ 7. Для сокращения времени выполнения комплекса работ на одни сутки при  $n_{KP}^{(6)} = 2$  требуется на одни сутки одновременно сократить продолжительность как пути 3, т.е.  $T_3^{(6)}$ , так и пути 1, т.е.  $T_1^{(6)}$ . Продолжительность пути 3 уменьшаем на сутки за счет того, что сокращаем на сутки время выполнения работы 6, т.е.  $t_6^{(6)}$ . Но работа 6 входит лишь в путь 3 (см. формулу (77)), но не входит в путь 1. В связи с этим помимо сокращения времени  $t_6^{(6)}$  на сутки сокращаем на эту же величину время выполнения работы 1, т.е.  $t_1^{(6)}$ . В результате получаем:

$$t_6^{(7)} = t_6^{(6)} - 1 = 3 - 1 = 2 \text{ [ед.вр.]}, \quad (91)$$

$$\Delta t_6^{(7)} = \Delta t_6^{(6)} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ [ед.вр.]}, \quad (92)$$

$$t_1^{(7)} = t_1^{(6)} - 1 = 6 - 1 = 5 \text{ [ед.вр.]}, \quad (93)$$

$$\Delta t_1^{(7)} = \Delta t_1^{(6)} - 1 = 3 - 1 = 2 \text{ [ед.вр.]}, \quad (94)$$

$$\bar{t}^{(7)} = (t_1^{(7)}, t_2^{(7)}, t_3^{(7)}, t_5^{(7)}, t_6^{(7)}) = (5, 4, 8, 8, 9, 2) \text{ [ед.вр.]}, \quad (95)$$

$$T_3^{(7)} = T_3^{(6)} - 1 = 15 - 1 = 14 \text{ [ед.вр.]}, \quad (96)$$

$$T_1^{(7)} = T_1^{(6)} - 1 = 15 - 1 = 14 \text{ [ед.вр.]}, \quad (97)$$

$$\bar{T}^{(7)} = (T_1^{(7)}, T_2^{(7)}, T_3^{(7)}) = (14, 10, 14) \text{ [ед.вр.]}, \quad (98)$$

$$\begin{aligned} T_{KP}^{(7)} &= \max(T_1^{(7)}, T_2^{(7)}, T_3^{(7)}) = \\ &= \max(14, 10, 14) = 14 = T_3^{(7)} = T_1^{(7)} \text{ [ед.вр.]}, \end{aligned} \quad (99)$$

$$n_{KP}^{(7)} = 2, \quad (100)$$

$$\begin{aligned} C[T_{KP}(\bar{t}^{(7)})] &= C[T_{KP}(\bar{t}^{(6)})] + \lambda_6 + \lambda_1 = \\ &= 2025 + 25 + 10 = 2060 \text{ [ден.ед.]}. \end{aligned} \quad (101)$$

В силу выражений (88), (89) и (92):

$$\Delta t_4^{(4)} = \Delta t_2^{(5)} = \Delta t_6^{(7)} = 0. \quad (102)$$

Результат (102) имеет фундаментальное значение для решаемого примера 3: все ресурсы по сокращению времени выполнения работ критического пути 3 исчерпаны — нет возможности дальнейшего сокращения продолжительности  $T_3^{(7)}$  пути. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} T_3^{(7)} &= \min_{j \in L_3} \{T_j\} = \min\{t_2 + t_4 + t_6\} = t_{2 \min} + t_{4 \min} + t_{6 \min} = \\ &= 4 + 8 + 2 = 14 = \min(T_{KP}(\bar{t})) \text{ [ед.вр.]}. \end{aligned} \quad (103)$$

В силу результата (103) решение (95) является оптимальным, т.е. выражение (86) примет следующий вид:

$$\bar{t}^* = \bar{t}^{(7)} = (5, 4, 8, 8, 9, 2), \quad (104)$$

а результат (101) является экстремальным значением целевой функции (14), т.е.

$$C_{\min}^* = C[T_{KP}(\bar{t}^*)] = 2060 \text{ [ден.ед.]}. \quad (105)$$

Результаты (104) и (105) — оптимальное решение примера 3.

## 5. Максимальное снижение стоимости проекта при фиксированном времени его выполнения

В § 1 в выражениях (17), (1)–(4) определена в общем виде математическая постановка рассматриваемой оптимизационной задачи и указана методологическая особенность данной задачи по сравнению с задачами, решенными в примерах 1–3. Проиллюстрируем поиск оптимального решения задачи данного класса табличным способом на конкретном примере.

ПРИМЕР 4. Для бизнес-процесса  $\xi(t)$ , рассматриваемого в примере 3 и данные о котором приведены в табл. 4, табл. 5, в сетевом графике, изображенном на рис. 3, максимально сократить стоимость проекта  $C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(0)})]$  при фиксированном времени выполнения проекта  $T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(0)})$  при условии, что

$$\begin{aligned}\bar{t}^{(0)} &= (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, t_3^{(0)}, t_4^{(0)}, t_5^{(0)}, t_6^{(0)}) = \\ &= (t_{\min 1}, t_{\min 2}, t_{\min 3}, t_{\min 4}, t_{\min 5}, t_{\min 6}),\end{aligned}$$

что согласно табл. 4 (столбец 4) равно:

$$\bar{t}^{(0)} = (3, 4, 5, 8, 5, 2). \quad (106)$$

Из выражения (106) следует, что в отличие от задачи примера 3 (см. формулу (70)), когда в исходном перед оптимизацией состоянии ( $\bar{t} = \bar{t}^{(0)}$ ) все работы сетевого графика (рис. 3) имеют максимальную продолжительность (см. столбец  $\bar{T}^{(0)}$  в табл. 6,  $\bar{t} = \bar{t}^{(0)}$  и столбец 3 в табл.4), в рассматриваемом примере все работы сетевого графика (рис. 3) имеют минимальную продолжительность. В этом случае стартовая стоимость проекта:  $C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(0)})]$  согласно формулам (9), (106) и табл. 4 определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(0)})] &= \sum_{j=1}^6 c_j(t_j) = \sum_{j=1}^6 c_j(t_{\min j}) = \sum_{j=1}^6 c_{\max j} = \\ &= 180 + 220 + 770 + 580 + 420 + 150 = 2320 \text{ [ден.ед.]}. \quad (107)\end{aligned}$$

Из выражений (71)–(73), (106) продолжительности путей  $T_1^{(0)}$ ,  $T_2^{(0)}$ ,  $T_3^{(0)}$  определяются следующим образом:

$$T_1^{(0)} = t_1^{(0)} + t_5^{(0)} = 3 + 5 = 8 \text{ [ед.вр.]}, \quad (108)$$

$$T_2^{(0)} = t_3^{(0)} + t_6^{(0)} = 5 + 2 = 7 \text{ [ед.вр.]}, \quad (109)$$

$$T_3^{(0)} = t_2^{(0)} + t_4^{(0)} + t_6^{(0)} = 4 + 8 + 2 = 14 \text{ [ед.вр.]}. \quad (110)$$

Таким образом,

$$\bar{T}^{(0)} = (T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, T_3^{(0)}) = (8, 7, 14). \quad (111)$$

Продолжительность выполнения проекта  $T_{KP}(\bar{t}^{(0)})$  найдем следующим образом:

$$T_{KP}(\bar{t}^{(0)}) = \max(T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, T_3^{(0)}) = \max(8, 7, 14) = 14 = T_3^{(0)}. \quad (112)$$

Из выражения (112) следует, что при  $\bar{t} = \bar{t}^{(0)}$  один критический путь — путь 3, при этом

$$n_{KP}^{(0)} = 1. \quad (113)$$

Для поиска оптимального решения  $\bar{t}^*$  (см. формулу (86)), максимально сокращающего стоимость проекта  $C_{\text{пр}}(T_{KP})$  при ее начальном значении  $C_{\text{пр}}[T_{KP}(\bar{t}^{(0)})] = 2320$  ден.ед. (см. формулу (107)) и постоянном времени выполнения проекта  $T_{KP} = 14$  ед.вр. (см. формулу (111)), составим таблицу оптимизации сетевой модели — табл. 7, полностью идентичную по структуре и данным левой части табл. 6.

Т а б л и ц а 7

№ п/п	Перечень работ пути $i$ , $i = 1, 2, 3$			$\bar{T}^{(0)}$ при $\bar{t} = \bar{t}^{(0)}$	Шаг 1 $\bar{T}^{(1)}$	Шаг 2 $\bar{T}^{(2)}$	Шаг 3 $\bar{T}^{(3)}$
	1	$L_3 = (2, 4, 6)$			14*	14*	14*
2	$L_1 = (1, 5)$			8	8	12	14*
3	$L_2 = (3, 6)$			7	10	10	10
4	Номер работы $j$	$\lambda_j$	$\Delta t_j$	$\bar{t}^{(0)}$	$\bar{t}^{(1)}$	$\bar{t}^{(2)}$	$\bar{t}^{(3)}$
5	4	15	4	8	8	8	8
6	2	20	1	4	4	4	4
7	6	25	2	2	2	2	2
8	1	10	3	3	3	3 →	5
9	5	30	4	5	5 →	9	9
10	3	40	3	5 →	8	8	8
11	$n_{KP}$			1	1	1	2
12	$T_{KP}(\bar{t})$ , [ед.вр.]			14	14	14	14
13	$C[T_{KP}(\bar{t})]$ , [ден.ед.]			2320	2200	2080	2060

В столбец  $\bar{T}^{(0)}$  табл. 7 занесены результаты (111), (106), (113), (112) и (107).

Как уже отмечалось в § 1, методология решения оптимизационной задачи примера 4 состоит в следующем: сокращать стоимость проекта  $C_{\text{пр}}[T_{KP}]$  при  $T_{KP} = \text{const} = 14$  за счет увеличения времени выполнения некритических работ  $j \notin J_{KP}$ . Заметим, что  $J_{KP}$  на шаге 1 включает работы критического пути 3, т.е. работы 2,4,6. Следовательно, к некритическим работам на шаге 1 относятся работы 1,3,5. Но так как мы стремимся максимально сократить стоимость проекта  $C_{\text{пр}}[T_{KP}]$ , то сокращать время выполнения некритических работ следует по следующему приоритету:  $t_3 \rightarrow t_5 \rightarrow t_1$ , так как согласно табл. 7,  $\lambda_3 = 40$ ,  $\lambda_5 = 30$ ,  $\lambda_1 = 10$ , т.е.

$$\lambda_3 > \lambda_5 > \lambda_1. \quad (114)$$

В отличие от табл. 6, где для сокращения  $T_{KP}$  на единицу времени отведен отдельный столбец, при поиске оптимального

решения в табл. 7 однотипные шаги, связанные с сокращением времени выполнения одной и той же работы  $j \notin J_{KP} = (2, 4, 6)$ , объединены в один шаг. Это упрощает анализ и оптимизацию сетевых моделей.

ШАГ 1. Сокращение стоимости проекта  $C_{\text{ПР}}[T_{KP}]$  на данном шаге осуществим за счет сокращения стоимости  $c_3$  выполнения работы 3 на 120 ден.ед. при увеличении времени ее выполнения с  $t_3^{(0)} = 5$  ед.вр. до  $t_3^{(1)} = 8$  ед.вр., т.е. на  $\Delta t_3 = 3$  ед.вр., в связи с чем, согласно формулам (106) и (107):

$$\begin{aligned} C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(1)})] &= C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(0)})] - \lambda_3 \cdot \Delta \lambda_3^{(1)} = \\ &= 2320 - 40 \cdot 3 = 2200 \text{ [ден.ед]}, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}^{(1)} &= [t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, (t_3^{(0)} + \Delta t_3^{(0)}), t_4^{(0)}, t_5^{(0)}, t_6^{(0)}] = \\ &= [3, 4, (5 + 3), 8, 5, 2] = (3, 4, 8, 8, 5, 2). \end{aligned} \quad (116)$$

Согласно выражению (116) продолжительности  $T_1^{(1)}$  и  $T_3^{(1)}$  путей 1 и 3 не изменятся, а продолжительность  $T_2^{(1)}$  пути 2 за счет увеличения времени  $t_3^{(1)}$  выполнения работы 3 на  $\Delta t_3^{(0)} = 3$  ед.вр. возрастет (см. формулу (109)):

$$T_2^{(1)} = T_2^{(0)} + \Delta t_3^{(0)} = 7 + 3 = 10 \text{ [ед.вр.]}, \quad (117)$$

при этом

$$\bar{T}^{(1)} = (T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}) = (8, 10, 14). \quad (118)$$

Так как

$$\begin{aligned} T_{KP}^{(1)} &= \max(T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}) = \\ &= \max(8, 10, 14) = 14 = T_3^{(1)}, \end{aligned} \quad (119)$$

то после выполнения процедур шага 1 останется единственный критический путь 3, который составляет работы 2, 4 и 6, при этом:

$$n_{KP}^{(1)} = 1. \quad (120)$$

Выполнение шага 1 завершается занесением результатов (115)–(120) в столбец "Шаг 1" табл. 7. Подчеркнем: за счет выполнения процедур шага 1 стоимость проекта  $C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(0)})]$  (см. формулу (107)) сокращена на 120 ден.ед. (см. формулу (115)), при этом ресурс  $\Delta t_3^{(0)} = 3$  увеличения времени  $t_3^{(0)}$  выполнения работ 3 исчерпан, так как

$$\Delta t_3^{(1)} = \Delta t_3^{(0)} - 3 = 3 - 3 = 0. \quad (121)$$

ШАГ 2. Сокращение стоимости проекта  $C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(1)})]$  на данном шаге проведем за счет сокращения стоимости  $c_5$  выполнения работы 5 на 120 ден.ед. при увеличении времени ее выполнения с  $t_5^{(0)} = t_5^{(1)} = 5$  ед.вр до  $t_5^{(2)} = 9$  ед.вр., т.е. на  $\Delta t_5^{(0)} = \Delta t_5^{(1)} = 4$  ед.вр., при этом согласно формулам (115) и (116):

$$\begin{aligned} C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(2)})] &= C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(1)})] - \lambda_5 \cdot \Delta \lambda_5^{(1)} = \\ &= 2200 - 30 \cdot 4 = 2080 \text{ [ден.ед.]}, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}^{(2)} &= (t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, t_3^{(1)}, t_4^{(1)}, t_5^{(1)} + \Delta t_5^{(1)}, t_6^{(1)}) = \\ &= (3, 4, 8, 8, 5 + 4, 2) = (3, 4, 8, 8, 9, 2). \end{aligned} \quad (123)$$

Согласно выражению (122) продолжительности  $T_2^{(2)}$  и  $T_3^{(2)}$  путей 2 и 3 на шаге 2 не изменяется, а продолжительность  $T_1^{(2)}$  пути 1 возрастет за счет увеличения времени  $t_5^{(2)}$  выполнения работы 2 на  $\Delta t_5^{(1)} = 4$  ед.вр. (см. формулу (108)):

$$T_1^{(2)} = T_1^{(1)} + \Delta t_5^{(1)} = 8 + 4 = 12 \text{ [ед.вр.]}, \quad (124)$$

при этом

$$\bar{T}^{(2)} = (T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, T_3^{(2)}) = (12, 10, 14). \quad (125)$$

Так как

$$T_{\text{КР}}^{(1)} = \max(T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, T_3^{(2)}) = \max(12, 10, 14) = 14 = T_3^{(2)}, \quad (126)$$



то после выполнения процедур шага 2 останется единственный критический путь 3, включающий работы 2,4 и 6, при этом:

$$n_{KP}^{(2)} = 1. \quad (127)$$

Выполнение шага 2 завершается занесением результатов (122)–(127) в столбец 2 табл. 7. Отметим, что в результате выполнения шага 2 стоимость проекта  $C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(1)})]$  (см. формулу (115)), сокращена на 120 ден.ед. (см. формулу (122)), при этом ресурс  $\Delta t_5^{(1)} = 4$  увеличения времени  $t_5^{(1)}$  выполнения работы 5 исчерпан полностью, так как

$$\Delta t_5^{(2)} = \Delta t_5^{(1)} - 4 = 4 - 4 = 0. \quad (128)$$

ШАГ 3. Сокращение стоимости проекта  $C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(2)})]$  на данном шаге окажется последним из возможных — за счет сокращения стоимости  $c_1$  выполнения работы 1 на 20 ден.ед. при увеличении времени ее выполнения только на две из трех возможных ( $\Delta t_1^{(2)} = 3$ ) ед. времени с  $t_1^{(2)} = 3$  ед.вр. до  $t_1^{(3)} = 5$  ед.вр., при этом согласно формулам (122) и (123):

$$\begin{aligned} C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(3)})] &= C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(2)})] - \lambda_1 \cdot 2 = \\ &= 2080 - 10 \cdot 2 = 2060 \text{ [ден.ед.]}, \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}^{(3)} &= (t_1^{(2)} + 2, t_2^{(2)}, t_3^{(2)}, t_4^{(2)}, t_5^{(2)}, t_5^{(2)}, t_6^{(2)}) = \\ &= (3 + 2, 4, 8, 8, 9, 2) = (5, 4, 8, 8, 9, 2). \end{aligned} \quad (130)$$

Согласно выражению (130) продолжительности  $T_2^{(3)}$  и  $T_3^{(3)}$  путей 2 и 3 на шаге 3 не изменятся, а продолжительность  $T_1^{(3)}$  пути 1 возрастет за счет увеличения  $t_1^{(3)}$  времени выполнения работы 1 на 2 ед. времени, что меньше резерва возможного увеличения  $\Delta t_1^{(2)} = 3$  на одну ед. времени:

$$T_1^{(3)} = T_1^{(2)} + 2 = 12 + 2 = 14 \text{ [ед.вр.]},$$

при этом

$$\bar{T}^{(3)} = (T_1^{(3)}, T_2^{(3)}, T_3^{(3)}) = (14, 10, 14). \quad (131)$$

Так как

$$T_{KP}^{(3)} = \max(T_1^{(3)}, T_2^{(3)}, T_3^{(3)}) = \\ = \max(14, 10, 14) = 14 = T_1^{(3)} = T_3^{(3)}, \quad (132)$$

то после выполнения шага 3 появляется новый критический путь 1 и с этого момента будет два критических пути 1 и 3, включающих работы:

$$J_{KP} = L_1 + L_3 = (1, 2, 4, 5, 6),$$

т.е. по существу все работы, за исключением работы 3, являются критическими, что, — согласно требованиям решаемой задачи:

$$T_{KP}(\bar{t}^{(0)}) = 14 = const, \quad (133)$$

свидетельствует о том, что ресурс сокращения стоимости проекта  $C_{\text{ПР}}(T_{KP})$  исчерпан, так как возможности сокращения стоимости  $c_3$  единственной не критической работы 3 исчерпан в ходе выполнения шага 1 (см. формулу (121)). При этом:

$$n_{KP}^{(3)} = 2. \quad (134)$$

Выполнение шага 3 завершается занесением результатов (129)–(134) в столбец "Шаг 3" табл. 7.

Таким образом, оптимальное решение  $\bar{t}^*$  решаемой задачи имеет вид:

$$\bar{t}^* = \bar{t}^{(3)} = (5, 4, 8, 8, 9, 2), \quad (135)$$

при этом, согласно формуле (129):

$$C_{\text{ПР}}^*_{\min} = C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(3)})] = 2060 \text{ ден.ед.} \quad (136)$$

Подчеркнем совпадение оптимальных решений задач примеров 3 и 4: см. столбец "Шаг 7" в табл.6 и столбец "Шаг 3" в табл. 7, при этом к этим одинаковым оптимальным решениями (см. формулы (104) и (135), (105) и (136)) при исследовании сетевой модели, заданной в табл. 4, мы пришли при "противоположных" исходных данных: см. столбец  $\bar{T}^{(0)}$  табл. 6 и столбец

$\bar{T}^{(0)}$  табл. 7 — в примере 3 в исходных условиях все работы имеют максимальную продолжительность (см. формулу (70)), а в примере 4 все работы перед этапом оптимизации имеют минимальную продолжительность (см. формулу (106)).

### 6. Максимальное сокращение стоимости проекта при фиксированном времени его выполнения, ограничивающим время выполнения не критических работ

Проиллюстрируем поиск оптимального решения задач данного класса табличным способом на конкретном примере.

**ПРИМЕР 5.** Решить пример 4 при условии, что максимальная продолжительность  $t_{\max j}$  не критических работ  $j \notin J_{KP}$  ограничена лишь заданным временем выполнения проекта  $T_{KP}(\bar{t}^{(0)})$ .

Для сформулированных условий справедливы выражения (106)–(112). Для поиска оптимального решения построим таблицу оптимизации рассматриваемой сетевой модели — табл. 8, идентичную по структуре табл. 7. Столбцы  $\bar{T}^{(0)}$  в табл. 7 и 8 идентичны. Заметим, что в строках 8–10 табл. 8 в столбце  $\Delta t_j$  для не критических работ 1, 5 и 3 резервы  $\Delta t_j$  увеличения времени выполнения  $t_j$  этих работ,  $j \notin J_{KP}$ , в исходных условиях не определены — величины  $\Delta t_1^*$ ,  $\Delta t_5^*$  и  $\Delta t_3^*$  являются производными оптимального решения:  $\bar{t}^* = (t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^*, t_6^*)$ , т.е. согласно выражению (106):

$$t_j^{(0)} = t_{\min j}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad (137)$$

$$\Delta t_1^* = t_1^* - t_{\min 1}, \quad (138)$$

$$\Delta t_5^* = t_5^* - t_{\min 5}, \quad (139)$$

$$\Delta t_3^* = t_3^* - t_{\min 3}. \quad (140)$$

№ п/п	Перечень работ пути $i$ , $i = 1, 2, 3$			$\bar{T}^{(0)}$	Шаг 1 $\bar{T}^{(1)}$	Шаг 2 $\bar{T}^{(2)}$
	1	$L_3 = (2, 4, 6)$			14*	14*
2	$L_1 = (1, 5)$			8	8	14*
3	$L_2 = (3, 6)$			7	14*	14*
4	Номер работы $j$	$\lambda_j$	$\Delta t_j$	$\bar{t}^{(0)}$	$\bar{t}^{(1)}$	$\bar{t}^{(2)}$
5	4	15	4	8	8	8
6	2	20	1	4	4	4
7	6	25	2	2	2	2
8	1	10		3	3	3
9	5	30		5	5 →	11
10	3	40		5 →	12	12
11	$n_{KP}$			1	2	3
12	$T_{KP}(\bar{t})$ , [ед.времени]			14	14	14
13	$C[T_{KP}(\bar{t})]$ , [ден.ед.]			2320	2024	1860

ШАГ 1. Сокращение стоимости проекта  $C_{ПР}[T_{KP}(\bar{t}^{(0)})] = 2320$  ден.ед. (см. формулу (107)) на данном шаге проведем за счет сокращения стоимости  $c_3$  выполнения работы 3 на 280 ден.ед. при максимально допустимом увеличении времени ее выполнения с  $t_3^{(0)} = 5$  ед.вр. до  $t_3^{(1)} = 12$  ед.вр., т.е. на  $\Delta t_{3\max} = 12 - 5 = 7$  ед.вр., при этом:

$$\begin{aligned}\bar{t}^{(1)} &= (t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, t_3^{(1)}, t_4^{(1)}, t_5^{(1)}, t_6^{(1)}) = \\ &= (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, t_3^{(0)} + 7, t_4^{(0)}, t_5^{(0)}, t_6^{(0)}) = \\ &= (3, 4, 5 + 7, 8, 5, 2) = (3, 4, 12, 8, 5, 2).\end{aligned}\quad (141)$$

Согласно выражению (141) продолжительности  $T_1^{(1)}$  и  $T_3^{(1)}$  путей 1 и 3 не изменятся, а продолжительность  $T_2^{(1)}$  пути 2 вырастет за счет увеличения времени выполнения работы 3 на 7 ед. времени, т.е.

$$T_2^{(1)} = T_2^{(0)} + \Delta t_{3\max} = 7 + 7 = 14 \text{ ед.вр.} = T_{KP}(\bar{t}^{(0)}), \quad (142)$$

при этом

$$\bar{T}^{(1)} = (T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}) = (8, 14, 14). \quad (143)$$

Из выражения (142) находим:

$$\begin{aligned} \Delta t_{3 \max} = \Delta t_3^* &= T_{KP}(\bar{t}^{(0)}) - T_2^{(0)} = \\ &= 14 - 7 = 7 \text{ [ед.вр.]}. \end{aligned} \quad (144)$$

После увеличения времени  $t_3^{(0)}$  выполнения работы 3 на величину  $\Delta t_{3 \max} = 7$  ед.вр., работа 3 стала критической и дальнейшее сокращение времени выполнения  $t_3^{(1)}$  данной работы невозможно (см. формулу примера 5).

Согласно выражению (141) стоимость выполнения проекта  $C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(1)})]$  после шага 1 с учетом выражений (107), (144) и табл. 8 определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(1)})] &= C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(0)})] - \lambda_3 \cdot \Delta t_3 = \\ &= 2320 - 40 \cdot 7 = 2040 \text{ [ден.ед.]}. \end{aligned} \quad (145)$$

Согласно выражению (143) время выполнения проекта  $T_{KP}(\bar{t}^{(0)})$  сохраняется, т.е.

$$\begin{aligned} T_{KP}(\bar{t}^{(1)}) &= \max(T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}) = \\ &= \max(8, 14, 14) = 14 = T_2^{(1)} = T_3^{(1)}, \end{aligned} \quad (146)$$

при этом имеется два критических пути (пути 2 и 3), включающих критические работы:

$$J_{KP}^{(1)} = L_2^{(1)} + L_3^{(1)} = (2, 3, 4, 6), \quad (147)$$

$$n_{KP}^{(1)} = 2. \quad (148)$$

Согласно выражению (147) работы 1 и 5, относящиеся к пути 1, являются некритическими, а значит (по условию решаемой задачи) время  $t_1^{(0)}$  и  $t_5^{(0)}$  их выполнения можно увеличивать до тех пор, пока путь 1 не станет критическим. Эту процедуру мы выполним на шаге 2.

Выполнение шага 1 завершается занесением результатов (141)–(148) в столбец "Шаг 1" табл. 8.

ШАГ 2. Сокращение стоимости  $c_5$  выполнения работы 5 за счет увеличения ее продолжительности на максимально допустимое время  $\Delta t_{5 \max} = 6$  ед.вр., т.е. с  $t_5^{(1)} = 5$  ед.вр. до  $t_5^{(2)} = 11$  ед.вр., приведет к сокращению стоимости выполнения проекта  $C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(2)})]$  с учетом формулы (145) и табл. 8 до величины:

$$\begin{aligned} C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(2)})] &= C_{\text{ПР}}[T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(1)})] - \lambda_5 \cdot \Delta t_{5 \max} = \\ &= 2040 - 30 \cdot 6 = 1860 \text{ [ден.ед.]}, \end{aligned} \quad (149)$$

при этом

$$\begin{aligned} \bar{t}^{(2)} &= (t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, t_3^{(1)}, t_4^{(1)}, t_5^{(1)} + \Delta t_{5 \max}, t_6^{(1)}) = \\ &= (3, 4, 12, 8, 5 + 6, 2) = (3, 4, 12, 8, 11, 2). \end{aligned} \quad (150)$$

Согласно выражению (150) продолжительности  $T_2^{(2)}$  и  $T_3^{(2)}$  путей 2 и 3 не изменятся (эти пути уже критические), а путь 1 становится критическим, так как его продолжительность достигла заданной величины:

$$T_1^{(2)} = T_1^{(1)} + \Delta t_{5 \max} = 8 + 6 = 14 \text{ ед.вр.} = T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(0)}). \quad (151)$$

Из выражения (151) получаем:

$$\Delta t_{5 \max} = \Delta t_5^* = T_{\text{КР}}(\bar{t}^{(0)}) - T_1^{(1)} = 14 - 8 = 6 \text{ [ед.вр.]}, \quad (152)$$

при этом

$$\bar{T}^{(2)} = (T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, T_3^{(2)}) = (14, 14, 14) = 14 \quad (153)$$

и

$$T_{\text{КР}}^{(2)} = \max(T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, T_3^{(2)}) = \max(14, 14, 14) = 14. \quad (154)$$

Выполнение шага 2 завершается занесением результатов (149)–(154) в столбец "Шаг 2" табл.8.

Согласно выражениям (152)–(153) в сетевой модели после выполнения шага 2 все пути критические, т.е.

$$n_{KP}^{(2)} = 3. \quad (155)$$

На этом завершается поиск оптимального решения, так как оно уже найдено на втором шаге (см. выражения (150) и (149)):

$$\bar{t}^* = (t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^*, t_6^*) = \bar{t}^{(2)} = (3, 4, 12, 8, 11, 2), \quad (156)$$

$$C_{\text{ПР min}}^* = C_{\text{ПР}}[T_{KP}(\bar{t}^{(2)})] = 1860 \text{ ден.ед.}, \quad (157)$$

$$\Delta t_3^* = 7 \text{ ед.вр.}, \Delta t_5^* = 6 \text{ ед.вр.}, \quad (158)$$

при этом время выполнения работы 1 в примере 5 не изменялось, т.е.  $\Delta t_1^* = 0$ .

### Л и т е р а т у р а

1. КУЗНЕЦОВ Б.Т. Математика: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ЮНИТИ-ДАНА. — 2004. — 719 с.

2. КРАСС М.С., ЧУПРЫНОВ Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. Учебник. — 3-е изд., испр. — М.: Дело, 2002. — 688 с.

3. ОРЕХОВ Н.А., ЛЁВИН А.Г., ГОРБУНОВ Е.А. Математические методы в экономике. Уч. пособие для вузов /Под ред. проф. Н.А.Орехова. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 302 с.

4. ПРОСВЕТОВ Г.И. Математические методы в экономике. Учебное-методическое пособие. — М.: Изд-во ОДЛ, 2004. — 160 с.

5. ШАПКИН А.С., МАЗАЕВА Н.П. Математические методы и модели исследования операций. Учебник. — М.: Изд.торг. Корп. "Дашков и К<sup>о</sup>", 2004. — 400 с.

6. УСТЮГОВ Ю.А. Методологические аспекты экономико-математического моделирования // Математические методы в прикладных исследованиях: — Сб. научных трудов. Вып. 2. — Новосибирск: НГУЭУ, 2005. — С. 111–134.

Поступила в редакцию  
9 ноября 2005 года