УДК 517.956
DOI 10.33048/mattrudy.2022.25.210

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2022, том 25, № 2, 220-240

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И КРИТЕРИЙ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ДЛЯ КЛАССА РЕГУЛЯРНЫХ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Туманян

В настоящей работе исследуется фредгольмовость регулярных гипоэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами. Получены необходимые и достаточные условия для выполнения специальных априорных оценок для дифференциальных операторов, действующих в мультианизотропных соболевских пространствах. Установлен критерий фредгольмовости для достаточно широкого класса регулярных гипоэллиптических операторов в мультианизотропных весовых пространствах в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова и фразы: фредгольмов оператор, регулярный гипоэллиптический оператор, априорная оценка, регуляризатор, мультианизотропные весовые пространства.

§1. Введение и основные определения

Регулярные гипоэллиптические операторы являются специальным подклассом гипоэллиптических операторов по Хёрмандеру (см. [1]) и естественным обобщением эллиптических и квазиэллиптических операторов. Такие операторы были введены в 1960-70-ых годах и исследованы многими авторами, такими как С. М. Никольский [2], В. П. Михайлов [3], Дж. Фриберг [4], Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин [5]. Сложность изучения таких операторов связана с тем, что характеристический многочлен регулярных гипоэллиптических операторов не является ни однородным, как в эллиптическом случае, ни обобщенно-однородным, как в случае квазиэллиптических операторов.

Свойства фредгольмовости/нётеровости изучены для некоторых классов гипоэллиптических операторов в различных функциональных пространствах, но большинство результатов относятся к эллиптическим и квазиэллиптическим операторам. Фредгольмовость эллиптических операторов в различных функциональных пространствах исследована в работах

Л. А. Багирова [6], Р. Б. Локкарта, Р. С. Маккоуна [7, 8], Э. Шроэ [9] и других. В работах Л. А. Багирова [10] и Г. А. Карапетяна, А. А. Дарбиняна [11] доказана фредгольмовость для специальных классов квазиэллиптических операторов в весовых пространствах в $\mathbb{R}^n$. Для квазиэллиптических операторов с постоянными коэффициентами в работах Г. В. Демиденко [12, 13, 14] установлены свойства изоморфизма в специальных шкалах весовых соболевских пространств. В работах А. А. Дарбиняна, А. Г. Туманян [15, 16] получены априорные оценки и критерий фредгольмовости для квазиэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами на шкале анизотропных соболевских пространств. Вопросы стабильности индекса квазиэллиптических операторов на специальной шкале анизотропных пространств изучены в работах [17, 18].

Л. Родино, П. Боггиатто, Е. Бузано (см., например [20]) исследованы условия фредгольмовости и спектральные свойства специальных классов псевдодифференциальных операторов, действующих в мультианизотропных пространствах с полиномиальной весовой функцией. В работе А. Г. Туманян [19] получен критерий фредгольмовости для специального класса регулярных гипоэллиптических операторов в мультианизотропных весовых соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия для выполнения априорных оценок для дифференциальных операторов со специальными переменными коэффициентами в мультианизотропных соболевских пространствах (теоремы 2.2 и 2.3). Построен регуляризатор и получен критерий фредгольмовости для рассматриваемого класса регулярных гипоэллиптических операторов в мультианизотропных весовых пространствах в $\mathbb{R}^n$ (теоремы 2.5 и 2.6). Класс рассматриваемых операторов расширен по сравнению с работами [15, 16, 19].

Определение 1.1. Линейный ограниченный оператор A, определённый на всём банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, назовём *n–нормальным оператором*, если выполняются следующие условия:

1. образ оператора A замкнут $\left(\operatorname{Im}(A) = \overline{\operatorname{Im}(A)}\right)$;
2. ядро оператора A конечномерно $(\dim \operatorname{Ker}(A) < \infty)$.

Оператор A назовём *фредгольмовым*, если выполняются условия 1-2 и

3. коядро оператора A конечномерно
   $(\dim \operatorname{coker}(A) = \dim Y / \operatorname{Im}(A) < \infty)$.

Определение 1.2. Для линейного ограниченного оператора A, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y ($A : X \to Y$), линейные ограниченные операторы $R_1 : Y \to X$ и $R_2 : Y \to X$ назовём, соответственно, *левым и правым регуляризаторами*, если выполняются следующие условия: $R_1 A = I_X + T_1, AR_2 = I_Y + T_2$, где I_X, I_Y– единичные операторы, а $T_1 : X \to X$ и $T_2 : Y \to Y$ – компактные операторы. Линейный ограниченный оператор $R : Y \to X$ назовём *регуляризатором* для оператора $A : X \to Y$, если он одновременно является и левым, и правым регуляризатором.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^n$, $\mathbb{N}^n$, соответственно, множества n-мерных мультииндексов и n-мерных мультииндексов с натуральными компонентами. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}_+^n$ – некоторое конечное множество мультииндексов, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{N})$ – минимальный выпуклый многогранник, содержащий элементы из $\mathcal{N}$.

Определение 1.3. Многогранник $\mathcal{R}$ назовём *вполне правильным*, если а) $\mathcal{R}$ является полным многогранником: $\mathcal{R}$ имеет вершины в начале координат и на каждой оси координат $\mathbb{R}^n$, отличные от начала координат; б) все компонентны внешних нормалей $(n-1)$–мерных некоординатных граней $\mathcal{R}$ положительные.

Пусть $\mathcal{R}$ – вполне правильный многогранник. Обозначим через $\mathcal{R}_j^{n-1}$, $j = 1, \ldots, I_{n-1}$ $(n-1)$—мерные некоординатные грани $\mathcal{R}$ с соответствующими внешними нормалями μ^j такими, что для всех мультииндексов $\alpha \in \mathcal{R}_j^{n-1}$ выполняется $(\alpha : \mu^j) = \frac{\alpha_1}{\mu_1^j} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\mu_n^j} = 1$, $\partial' \mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{I_{n-1}} \mathcal{R}_j^{n-1}$. Для $k > 0$ обозначим $k\mathcal{R} := \{k\alpha = (k\alpha_1, k\alpha_2 \ldots, k\alpha_n) : \alpha \in \mathcal{R}\}$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1.1}$$

где $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n},\ D_j = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$P(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha. \tag{1.2}$$

Для каждой $(n-1)$–мерной некоординатной грани $\mathcal{R}_j^{n-1}, j = 1, \ldots, I_{n-1}$ обозначим

$$P_j(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_j^{n-1}} a_\alpha(x)\, D^\alpha, P_j(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_j^{n-1}} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha.$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$|\xi|_{\mathcal{R}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} |\xi^\alpha|, |\xi|_{\partial' \mathcal{R}} = \sum_{\alpha \in \partial' \mathcal{R}} |\xi^\alpha|.$$

Определение 1.4. Дифференциальный оператор $P(x, \mathbb{D})$ назовём *регулярным в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что:

$$1 + |P(x_0, \xi)| \geq \delta |\xi|_{\mathcal{R}}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$P(x, \mathbb{D})$ назовём *регулярным в* $\mathbb{R}^n$, если $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$.

$P(x, \mathbb{D})$ назовём *равномерно регулярным в* $\mathbb{R}^n$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что:

$$1 + |P(x, \xi)| \geq \delta |\xi|_{\mathcal{R}}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим некоторые примеры таких дифференциальных операторов.

1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{R}$ многогранник Ньютона для точек $(0, 0, \ldots, 0)$, $(m, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, m)$. В этом случае определения 1.4 соответствуют определениям эллиптичности, а дифференциальный оператор $P(x, \mathbb{D})$ является эллиптическим.

2. Пусть $\nu \in \mathbb{N}^n$ и $\mathcal{R}$ многогранник Ньютона для точек $(0, 0, \ldots, 0)$, $(\nu_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, \nu_n)$. В этом случае определения 1.4 соответствуют определениям квазиэллиптичности для $P(x, \mathbb{D})$.

3. Пусть $n = 2$ и $\mathcal{R}$ многогранник Ньютона для точек $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(0, 8)$ и $(6, 4)$. Тогда

$$P(x, \mathbb{D}) = a_1 D_1^8 + a_2 D_1^6 D_2^4 + a_3 D_2^8 + q(x),$$

где $a_1, a_2, a_3 > 0$ и $q \in C(\mathbb{R}^2)$, является регулярным в $\mathbb{R}^2$.

4. Пусть $n = 3$ и $\mathcal{R}$ многогранник Ньютона для точек $(0, 0, 0)$, $(8, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(6, 4, 0)$, $(6, 0, 6)$, $(0, 6, 6)$ и $(0, 0, 12)$. Тогда

$$P(x, \mathbb{D}) = D_1^8 + D_1^6 D_2^4 + D_2^8 + D_1^6 D_3^6 + D_2^6 D_3^6 + D_3^{12} + q(x),$$

где $q \in C(\mathbb{R}^3)$, является регулярным в $\mathbb{R}^3$.

Пусть последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ расходится и выполняется неравенство $a_{i+1} < \gamma a_i$, где $\gamma > 0$ и $i = 0, 1, \ldots$. Определим последовательность $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ следующим образом: $b_0 = 0$, $b_i = \sum\limits_{j=0}^{i} a_j, i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим систему интервалов

$$V_0 = \left\{ r : |r - b_0| < \frac{2\gamma + 1}{\gamma + 1} a_0 \right\},$$

$$V_i = \left\{ r : |r - b_i| < \frac{\gamma}{\gamma + 1} a_i \right\},\ i = 1, 2, \ldots.$$

Система $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ является покрытием для $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим также систему открытых областей U_j $(j = 1, \ldots, l)$, покрывающую единичную сферу $|x| = 1$. Аналогично работе Л. А. Багирова [6] построим систему областей $\{W_p\}_{p=1}^{\infty}$ и соответствующее этой системе разбиение единицы. Определим $\{W_p\}_{p=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$W_p = V_{\left[\frac{p-1}{l}\right]} \times U_{p - \left[\frac{p-1}{l}\right] l},\ p = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, что система областей $\{W_p\}_{p=1}^{\infty}$ является покрытием для $\mathbb{R}^n$ и $\min\limits_{x \in \overline{W}_p} |x| \to \infty$ при $p \to \infty$.

Пусть $\theta^1, \theta^2 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ неотрицательные функции, определяемые следующим образом: $\theta^1(t) = 1$ при $|t| \le \dfrac{\gamma}{2(\gamma+1)}$, $\theta^1(t) = 0$ при $|t| \ge \dfrac{\gamma}{\gamma+1}$; $\theta^2(t) = 1$ при $|t| \le \dfrac{\gamma}{\gamma + \frac{3}{4}}$, $\theta^2(t) = 0$ при $|t| \ge \dfrac{\gamma}{\gamma + \frac{1}{2}}$. Очевидно, что $\theta^2(t)\theta^1(t) = \theta^1(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Введем функции:

$$\theta_0^1(t) = \theta^1 \left(\frac{t}{\frac{2\gamma+1}{\gamma} a_0} \right), \theta_i^1(t) = \theta^1 \left(\frac{t - b_i}{a_i} \right),\ i = 1, 2, \ldots;$$

$$\kappa_i^1(t) = \theta_i^1(t) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^1(t) \right)^{-1},\ i = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\kappa_0^2(t) = \theta^2 \left(\frac{t}{\frac{2\gamma+1}{\gamma} a_0} \right), \kappa_i^2(t) = \theta^2 \left(\frac{t - b_i}{a_i} \right),\ i = 1, 2 \ldots.$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

1. в каждой точке $t \in \mathbb{R}_+$ отличны от нуля одна или две функции из системы функций $\kappa_i^1(t)$ и $\kappa_i^2(t)$;

2. $\operatorname{supp}\kappa_i^1 \subset \operatorname{supp}\kappa_i^2 \subset \{t : |t-b_i| \le \frac{\gamma}{\gamma+\frac{1}{2}}a_i\}$;

3. $\kappa_i^2(t)\kappa_i^1(t) = \kappa_i^1(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$;

4. для произвольного $r \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C_r > 0$ такая, что

$$\left|D^r\kappa_i^1(t)\right| \le C_r a_i^{-r},\ \left|D^r\kappa_i^2(t)\right| \le C_r a_i^{-r}, i = 0,1,2,\ldots;$$

5. $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\kappa_i^1(t) \equiv 1.$

Рассмотрим разбиение единицы $\{v_j^1\}_{j=1}^l$, соответствующее покрытию $\{U_j\}_{j=1}^l$: $\sum\limits_{j=1}^{l} v_j^1(\omega) \equiv 1$, где $\omega = \dfrac{x}{|x|}$. Рассмотрим также систему функций $v_j^2(\omega)$, удовлетворяющих условиям $\operatorname{supp} v_j^2 \subset U_j$ и $v_j^2(\omega)v_j^1(\omega) = v_j^1(\omega)$ для $j = 1,\ldots,l$.

Введем системы $\{\varphi_p\}_{p=1}^{\infty}$ и $\{\psi_p\}_{p=1}^{\infty}$:

$$\varphi_p(x) = \kappa^1_{\left[\frac{p-1}{l}\right]}(|x|)v^1_{p-\left[\frac{p-1}{l}\right]l}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

$$\psi_p(x) = \kappa^2_{\left[\frac{p-1}{l}\right]}(|x|)v^2_{p-\left[\frac{p-1}{l}\right]l}\left(\frac{x}{|x|}\right),\ p = 1,2,\ldots.$$

Эти системы функций обладают следующими свойствами:

1. $\operatorname{supp}\varphi_p \subset \operatorname{supp}\psi_p \subset W_p$;

2. $\psi_p(x)\varphi_p(x) = \varphi_p(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

3. для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ существует постоянная $C_\alpha > 0$ такая, что:

$$|D^\alpha\psi_p(x)| \le C_\alpha\left(a_{\left[\frac{p-1}{l}\right]}\right)^{-|\alpha|}, |D^\alpha\varphi_p(x)| \le C_\alpha\left(a_{\left[\frac{p-1}{l}\right]}\right)^{-|\alpha|},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, p = 1,2,\ldots;$$

4. $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\varphi_p(x) \equiv 1.$

Обозначим

$$Q := \{g \in C(\mathbb{R}^n) : \exists c > 0 \text{ такая, что } g(x) \ge c > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Для $m \in \mathbb{Z}_+$ и вполне правильного многогранника $\mathcal{R}$ обозначим через $Q^{m,\mathcal{R}}$ множество весовых функций $g \in Q$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\frac{1}{g(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$;

2. для $\beta \in m\mathcal{R}, \beta \neq 0$ $D^\beta g(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ и существует $C_\beta > 0$ такая, что $\frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\mu^j)}} \leq C_\beta$ для всех $x \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, I_{n-1}$;

3. для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $p_0 = p_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $p > p_0$ при $\max\limits_{j=1,\ldots,l} \mathrm{diam} U_j < \delta$ выполняется:
$$\max_{x,y\in\overline{W}_p} \frac{|g(x)-g(y)|}{g(y)} < \varepsilon, \ \max_{x,y\in\overline{W}_p} \frac{1}{g(x)^{\frac{1}{\mu_{max}}} a_{\left[\frac{p-1}{l}\right]}} < \varepsilon,$$
где $\mu_{max} = \max\limits_{1\leq i\leq I_{n-1}} \max\limits_{1\leq s\leq n} \{\mu_s^i\}$.

Примеры весовых функций из множества $Q^{m,\mathcal{R}}$ включают как полиномиальные, так и экспоненциальные весовые функции, например, $(1 + |x|_{\mathcal{R}})^l, \exp{(1+|x|_{\mathcal{R}})^r}$ при $l, r > 0$.

Для $k \in \mathbb{R}$ и вполне правильного многогранника $\mathcal{R}$ обозначим
$$H^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in S' : \|u\|_{k,\mathcal{R}} := \left(\int |\widehat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|_{\partial'\mathcal{R}})^{2k} \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$
где S'– множество обобщенных функций медленного роста, $\widehat{u}$ – преобразование Фурье функции u.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $q \in Q$, вполне правильного многогранника $\mathcal{R}$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим
$$H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ u : \|u\|_{H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)} := \|u\|_{k,\mathcal{R},q} := \sum_{\alpha\in k\mathcal{R}} \left\| D^\alpha u \cdot q^{k-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty \Big\},$$
$$H_q^{k,\mathcal{R}}(\Omega) := \left\{ u : \|u\|_{H_q^{k,\mathcal{R}}(\Omega)} := \sum_{\alpha\in k\mathcal{R}} \left\| D^\alpha u \cdot q^{k-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \right\|_{L_2(\Omega)} < \infty \right\}.$$

§2. Основные результаты

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и $q \in Q$. Рассмотрим дифференциальный оператор $P(x,\mathbb{D})$ (см. (1.1)), представляемый в следующем виде:

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \left(a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} + a^1_\alpha(x) \right) D^\alpha, \qquad (2.1)$$

где $a_\alpha(x) = a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} + a^1_\alpha(x)$, $D^\beta(a^0_\alpha(x)) = O\left(q(x)^{\min\limits_i(\beta:\mu^i)}\right)$ и $D^\beta(a^1_\alpha(x)) = o\left(q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha-\beta:\mu^i)}\right)$ при $|x| \to \infty$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}, \beta \in k\mathcal{R}$.

Легко проверить, что $P(x,\mathbb{D})$ порождает линейный ограниченный оператор, действующий из $H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n)$.

Для $N > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$K_N(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le N\}, K_N := K_N(0).$$

В дальнейшем будем использовать следующую теорему, которая является следствием теоремы 7.1 из работы [22]:

Теорема 2.1. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+, q \in Q$ и $P(x,\mathbb{D})$ дифференциальный оператор (2.1). Тогда оператор $P(x,\mathbb{D}) : H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n)$, является $n-$нормальным тогда и только тогда, когда существуют постоянные $\kappa > 0$ и $N > 0$ такие, что имеет место оценка*

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q} \le \kappa\left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q} + \|u\|_{L_2(K_N)}\right), \forall u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.2. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+, q \in Q^{k,\mathcal{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ дифференциальный оператор (2.1), коэффициенты которого удовлетворяют $\lim\limits_{p\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_p}} |a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$. Пусть существует $\kappa > 0$ такая, что*

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q} \le \kappa\left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n). \qquad (2.2)$$

Тогда $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a^0_\alpha(x) \lambda^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_{\partial'\mathcal{R}}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| > M. \qquad (2.3)$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 работы [19] следует, что $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что выполняется неравенство (2.3).

Рассмотрим последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ такую, что $|x_m| \to \infty$ при $m \to \infty$. Без ограничения общности можем считать, что $x_m \in W_m$.

Пусть $m_0 \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m_0} W_i\right), \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1.$

Обозначим $\tilde{\varphi}_m = \varphi_m \varphi$. Пусть $j \in \{1, \dots, I_{n-1}\}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $\tilde{u}_j(x) = \exp\left(i\left(q(x_m)^{\frac{1}{\mu^j}}\xi, x\right)\right)\tilde{\varphi}_m(x)$, где μ^j внешняя нормаль некоординатной грани $\mathcal{R}_j^{n-1}$ такая, что для всех $\alpha \in \mathcal{R}_j^{n-1}$ выполняется $(\alpha : \mu^j) = 1$.

Обозначим $\mathcal{R}_j = \{\alpha \in \mathcal{R} : (\alpha : \mu^j) = \max\limits_{1 \le i \le I_{n-1}} (\alpha : \mu^i)\}$.

Так как $q \in Q^{m,\mathcal{R}}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $m > m_0$ при $\max\limits_{j=1,\dots,l} \operatorname{diam} U_j < \delta$

$$|q(x) - q(y)| \le \varepsilon q(y), \forall x, y \in W_m.$$

Тогда для любого $r > 0$ имеет место неравенство

$$|q(x)^r - q(x_m)^r| \le \tau_r(\varepsilon) q(x_m)^r, \forall x \in W_m, \tag{2.4}$$

где $\tau_r(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из неравенства (2.4) и того факта, что $\operatorname{supp} \widetilde{u}_{j,m} \subset W_m$ следует, что существует $\tau(\varepsilon)$ такое, что $\tau(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и имеют место неравенства:

$$\|\tilde{u}_{j,m}\|_{k+1,\mathcal{R},q} \ge (1 - \tau(\varepsilon)) \|\tilde{u}_{j,m}\|_{k+1,\mathcal{R},q(x_m)}, \tag{2.5}$$

$$\|P\tilde{u}_{j,m}\|_{k,\mathcal{R},q} \le (1 + \tau(\varepsilon)) \|P\tilde{u}_{j,m}\|_{k,\mathcal{R},q(x_m)}. \tag{2.6}$$

Тогда для достаточно большого $m_0 \in \mathbb{N}$ и при достаточно малом значении $\max\limits_{j=0,\dots,l} \operatorname{diam} U_j$ для $m > m_0$ имеют место неравенства

$$\|\tilde{u}_{j,m}\|_{k+1,\mathcal{R},q} \ge \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{j,m}\|_{k+1,\mathcal{R},q(x_m)}, \tag{2.7}$$

$$\|P\tilde{u}_{j,m}\|_{k,\mathcal{R},q} \le \frac{1}{2} \|P\tilde{u}_{j,m}\|_{k,\mathcal{R},q(x_m)}. \tag{2.8}$$

В силу условий на весовую функцию $q \in Q^{k,\mathcal{R}}$ и функции $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ для $\gamma \in k\mathcal{R}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $m > m_0$ при $\max\limits_{j=1,\dots,l} \operatorname{diam} U_j < \delta$ имеет место неравенство

$$\frac{|D^\gamma \varphi_m(x)|}{q(x)^{(\gamma:\mu_i)}} = \frac{|D^\gamma \varphi_m(x)| a_{\left[\frac{m-1}{l}\right]}^{|\gamma|}}{q(x)^{(\gamma:\mu_i) - \frac{|\gamma|}{\mu max}} q(x)^{\frac{|\gamma|}{\mu max}} a_{\left[\frac{m-1}{l}\right]}^{|\gamma|}} \le \omega_\gamma(\varepsilon), \tag{2.9}$$

где $\omega_\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда нетрудно проверить, что имеет место оценка

$$\|\tilde{u}_{j,m}\|_{k+1,\mathcal{R},q(x_m)} \geq \sum_{\beta\in(k+1)\mathcal{R}_j} |\xi^\beta| q(x_m)^{k+1} \|\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} - \omega_1(\varepsilon) \sum_{\gamma\in(k+1)\left(\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}_j^{n-1}\right)} |\xi^\gamma| q(x_m)^{k+1} \|\varphi\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(W_m)}, \quad (2.10)$$

где $\omega_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Аналогично доказательству теоремы 2.4 из работы [19] можно показать, что для $\beta \in k(\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_j)$ при достаточно большом m_0 для всех $m > m_0$ имеет место оценка

$$\left\|D^\beta(P(x,\mathbb{D})\tilde{u}_{j,m})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{k-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \leq \omega_2(\varepsilon) \sum_{\gamma\in(k+1)\left(\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}_j^{n-1}\right)} |\xi^\gamma| q(x_m)^{k+1} \|\varphi\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(W_m)}, \quad (2.11)$$

где $\omega_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для $\beta \in k\mathcal{R}_j$ имеем

$$\left\|D^\beta\left(P(x,\mathbb{D})\tilde{u}_{j,m}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{k-(\beta:\mu^j)} \leq \left\|D^\beta\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-(\alpha:\mu^j)} D^\alpha \tilde{u}_{j,m}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{k-(\beta:\mu^j)} + \left\|D^\beta\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a^1_\alpha(x) D^\alpha \tilde{u}_{j,m}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{k-(\beta:\mu^j)}. \quad (2.12)$$

В силу условий $D^\beta\left(a^1_\alpha(x)\right) = o\left(q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha-\beta:\mu^i)}\right)$ при $|x| \to \infty$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}, \beta \in k\mathcal{R}$ легко проверить, что для $\beta \in k\mathcal{R}_j$ при достаточно большом m_0 для $m > m_0$ выполняется

$$\left\|D^\beta\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a^1_\alpha(x) D^\alpha \tilde{u}_{j,m}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{k-(\beta:\mu^j)} \leq \omega_3(\varepsilon) \sum_{\gamma\in(k+1)\mathcal{R}} |\xi^\gamma|\, q(x_m)^{k+1} \|\varphi\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(W_m)}, \quad (2.13)$$

где $\omega_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из условий (2.1), $\lim\limits_{p\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_p}}|a^0_\alpha(x)-a^0_\alpha(y)|=0$ для $\alpha\in\mathcal{R}$, $q\in Q^{k,\mathcal{R}}$ и неравенства (2.4) получим, что для $\alpha\in\mathcal{R}$ и $\beta\in k\mathcal{R}$ при достаточно большом m_0 и достаточно малом значении $\max\limits_{j=1,\ldots,l}\mathrm{diam}U_j$ для $m>m_0$ выполняется

$$\left|D^\beta\left(a^0_\alpha(x)q(x)^{1-(\alpha:\mu^j)}-a^0_\alpha(x_m)q(x_m)^{1-(\alpha:\mu^j)}\right)\right|\le\tau_{\alpha,\beta}(\varepsilon)q(x_m)^{1-(\alpha:\mu^j)+(\beta:\mu^j)}, \tag{2.14}$$

где $\tau_{\alpha,\beta}(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$.

Используя (2.14), аналогично доказательству теоремы 2.4 из работы [19], можно показать, что при достаточно большом m_0 для $m>m_0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}\left\|D^\beta\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{R}}a^0_\alpha(x)q(x)^{1-(\alpha:\mu^j)}D^\alpha\tilde u_{j,m}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}&q(x_m)^{k-(\beta:\mu^j)}\\ &\le\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_j}a^0_\alpha(x_m)\xi^\alpha\right|\left|\xi^\beta\right|q(x_m)^{k+1}\|\tilde\varphi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\\ &\quad+\omega_4(\varepsilon)\sum_{\gamma\in(k+1)\left(\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}^{n-1}_j\right)}|\xi^\gamma|\,q(x_m)^{k+1}\|\varphi\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(W_m)},\end{aligned}\tag{2.15}$$

где $\omega_4(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$.

Из оценок (2.11)–(2.15) при достаточно большом m_0 для $m>m_0$ получим

$$\begin{aligned}\|P\tilde u_{j,m}\|_{k,\mathcal{R},q(x_m)}\le&\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_j}a^0_\alpha(x_m)\xi^\alpha\right|\sum_{\beta\in k\mathcal{R}_j}\left|\xi^\beta\right|q(x_m)^{k+1}\|\tilde\varphi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\\ &+\omega_5(\varepsilon)\sum_{\gamma\in(k+1)\mathcal{R}}|\xi^\gamma|\,q(x_m)^{k+1}\|\varphi\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(W_m)},\end{aligned}\tag{2.16}$$

где $\omega_5(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$.

Тогда из (2.2), используя (2.10) и (2.16), получим

$$\sum_{\beta\in(k+1)\mathcal{R}_j} \left|\xi^\beta\right| q(x_m)^{k+1}\|\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} - \omega_1(\varepsilon) \sum_{\gamma\in(k+1)\left(\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}_j^{n-1}\right)} \left|\xi^\gamma\right| q(x_m)^{k+1}\|\varphi\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(W_m)}$$
$$\le \kappa \left(\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_j} a_\alpha^0(x_m)\xi^\alpha\right| \sum_{\beta\in k\mathcal{R}_j} \left|\xi^\beta\right| q(x_m)^{k+1}\|\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \omega_5(\varepsilon) \sum_{\gamma\in(k+1)\mathcal{R}} \left|\xi^\gamma\right| q(x_m)^{k+1}\|\varphi\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(W_m)} + \|\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Так как $\{a_\alpha^0(x) : \alpha \in \mathcal{R}_j\}$ – ограниченные функции и $x_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то существуют сходящиеся подпоследовательности для последовательностей $\{a_\alpha^0(x_m) : \alpha \in \mathcal{R}_j\}$. Без ограничения общности можем считать, что $\{a_\alpha^0(x_m) : \alpha \in \mathcal{R}_j\}$ сходятся, и для каждой $\alpha \in \mathcal{R}_j$ существует постоянная $\tilde{a}_\alpha^0$ такая, что $a_\alpha^0(x_m) \rightrightarrows \tilde{a}_\alpha^0$ при $m \to \infty$. Тогда при достаточно большом m_0 для $m > m_0$ получим

$$\sum_{\beta\in(k+1)\mathcal{R}_j} \left|\xi^\beta\right| q(x_m)^{k+1}\|\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} - \omega_6(\varepsilon) \sum_{\gamma\in(k+1)\mathcal{R}} \left|\xi^\gamma\right| q(x_m)^{k+1}\|\varphi\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(W_m)}$$
$$\le \kappa \left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_j} \tilde{a}_\alpha^0\xi^\alpha\right| \sum_{\beta\in k\mathcal{R}_j} \left|\xi^\beta\right| q(x_m)^{k+1}\|\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

где $\omega_6(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Разделим последнее неравенство на $q(x_m)^{k+1}$ и просуммируем по $m > m_0$. Учитывая, что каждая область W_m пересекается с фиксированным количеством других областей, с некоторой постоянной $C_1 > 0$ получим оценку

$$C_1 \sum_{\beta\in(k+1)\mathcal{R}_j} \left|\xi^\beta\right| - \omega_7(\varepsilon) \sum_{\gamma\in(k+1)\mathcal{R}} \left|\xi^\gamma\right|$$
$$\le \left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_j} \tilde{a}_\alpha^0\xi^\alpha\right| \sum_{\beta\in k\mathcal{R}_j} \left|\xi^\beta\right|,$$

где $\omega_7(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Выбрав соответвующий ε и устремив $m_0 \to \infty$ получим, что с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеет место неравенство

$$C_2 \sum_{\alpha\in(k+1)\mathcal{R}_j} |\xi^\alpha| \le \left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_j} \tilde{a}^0_\alpha \xi^\alpha\right| \sum_{\beta\in k\mathcal{R}_j} \left|\xi^\beta\right|.$$

Из последнего, используя оценки (2.4) из доказательства теоремы 2.1 из работы [19], получим, что для $j \in \{1,\dots,I_{n-1}\}$ существует постоянная $\delta_j > 0$ такая, что

$$\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_j} \tilde{a}^0_\alpha \xi^\alpha\right| \ge \delta_j (1 + |\xi|_{\mathcal{R}_j^{n-1}}),$$

где $|\xi|_{\mathcal{R}_j^{n-1}} = \sum\limits_{\beta\in\mathcal{R}_j^{n-1}} \left|\xi^\beta\right|$.

Для $\lambda > 0$ заменой $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ на $\lambda^{-\frac{1}{\mu^j}}\xi = \left(\lambda^{-\frac{1}{\mu^j_1}}\xi_1,\dots,\lambda^{-\frac{1}{\mu^j_n}}\xi_n\right)$ получим

$$\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_j} \tilde{a}^0_\alpha \xi^\alpha \lambda^{1-(\alpha:\mu^j)}\right| \ge \delta_j (\lambda + |\xi|_{\mathcal{R}_j^{n-1}}).$$

Аналогично для всех $j \in \{1,\dots,I_{n-1}\}$. Тогда, используя теорему 6.1 из работы [3], получим, что имеет место оценка

$$\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \tilde{a}^0_\alpha \xi^\alpha \lambda^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_{\partial'\mathcal{R}}), \forall\lambda > 0, \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

В силу того, что последнее неравенство имеет место для всех предельных значений последовательностей $\{a^0_\alpha(x_m) : \alpha\in\mathcal{R}\}$, где $x_m \to \infty$, получим, что существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a^0_\alpha(x) \xi^\alpha \lambda^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_{\partial'\mathcal{R}}), \forall\lambda > 0, \forall\xi\in\mathbb{R}^n, |x| > M.$$

□

Замечание 2.1. Для $q \in Q$ из теоремы 2.1 работы [19] следует, что необходимым условием для выполнения априорной оценки вида (2.2) является равномерная регулярность $P(x,\mathbb{D})$ в $\mathbb{R}^n$. Из теоремы 2.2 следует, что в пространствах $H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ с весовой функцией из класса $Q^{k,\mathcal{R}}$ для выполнения априорной оценки вида (2.2), наряду с регулярностью $P(x,\mathbb{D})$, необходимым является и условие (2.3). Теорема 2.3 показывает, что данные условия на символ оператора являются также и достаточными для выполнения априорной оценки (2.2) в рассматриваемых пространствах.

Теорема 2.3. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}_+, q \in Q^{k,\mathcal{R}}$ *и* $P(x,\mathbb{D})$ *дифференциальный оператор* (2.1), *коэффициенты которого удовлетворяют* $\lim\limits_{p\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_p}} |a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)| = 0$ *для всех* $\alpha \in \mathcal{R}$. *Пусть* $P\,(x,\mathbb{D})$ *является регулярным в* $\mathbb{R}^n$ *и существуют постоянные* $\delta > 0$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a^0_\alpha(x)\lambda^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\xi^\alpha\right| \geq \delta(\lambda + |\xi|_{\partial'\mathcal{R}}), \forall\xi\in\mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| > M. \tag{2.17}$$

Тогда существуют постоянные $\kappa > 0$ *и* $N > 0$ *такие, что*

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q} \leq \kappa\left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q} + \|u\|_{L_2(K_N)}\right), \forall u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n). \tag{2.18}$$

Доказательство. Пусть m_0 – натуральное число. В силу свойств системы функций $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$ с некоторой постоянной $C > 0$ имеет место оценка

$$\|u\|^2_{k+1,\mathcal{R},q} \leq C\left(\sum_{m=0}^{m_0}\|\varphi_m u\|^2_{k+1,\mathcal{R},q} + \sum_{m=m_0+1}^{\infty}\|\varphi_m u\|^2_{k+1,\mathcal{R},q}\right),$$
$$\forall u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n). \tag{2.19}$$

Используя априорную оценку для ограниченной области из работы [23], с некоторыми постоянными $C_1 > 0$ и $N_1 > 0$ получим оценку

$$\sum_{m=1}^{m_0}\|\varphi_m u\|^2_{k+1,\mathcal{R},q} \leq C_1\left(\|Pu\|^2_{k,\mathcal{R},q} + \|u\|^2_{L_2(K_{N_1})}\right), \forall u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n), \tag{2.20}$$

где N_1 такое, что $\bigcup\limits_{i=0}^{m_0} W_i \subset K_{N_1}$.

Обозначим

$$P_0(x,\mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a^0_\alpha(x)D^\alpha,$$
$$L(x,\mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a^1_\alpha(x)D^\alpha,$$

$$P^m(x,\mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathcal{R}}\left[\psi_m(x)\left(a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} - a^0_\alpha(x_m)q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\right)\right.$$
$$\left. + a^0_\alpha(x_m)q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\right]D^\alpha, m = 1,2,\ldots.$$

Используя свойства системы функций $\{\psi_m\}_{m=0}^\infty$, условия для коэффициентов $\lim\limits_{p\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_p}}|a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)| = 0$ для $\alpha\in\mathcal{R}$, $q \in Q^{k,\mathcal{R}}$ и неравенство

(2.4), нетрудно проверить, что для $\alpha \in \mathcal{R}$ и $\beta \in k\mathcal{R}$ при достаточно большом m_0 и достаточно малом $\max\limits_{j=1,\ldots,l} \mathrm{diam} U_j$ для $m > m_0$ имеет место оценка

$$\left| D^\beta \left(\psi_m(x) \left(a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max_i(\alpha:\mu^i)} - a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max_i(\alpha:\mu^i)} \right) \right) \right| \\ \leq \tau_{\alpha,\beta}(\varepsilon) q(x_m)^{1-max_i(\alpha-\beta:\mu^j)},$$

где $\tau_{\alpha,\beta}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из последней оценки и теоремы 2.2 работы [11] следует, что при достаточно большом m_0 для $m > m_0$ операторы $P^m(x, \mathbb{D}) : H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n)$ обладают обратными операторами, причем, из условия (2.17) следует, что нормы этих операторов равномерно ограничены. Тогда с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеет место оценка

$$\|\varphi_m u\|^2_{k+1,\mathcal{R},q} \leq C_2 \|P^m(\varphi_m u)\|^2_{k,\mathcal{R},q}, \forall u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n),$$

где C_2 не зависит от m.

Учитывая, что $P^m(\varphi_m u) = P_0(\varphi_m u)$ для всех $u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n)$ при $m = 1, 2, \ldots$ получим

$$\|\varphi_m u\|^2_{k+1,\mathcal{R},q} \leq C_2 \|P^m(\varphi_m u)\|^2_{k,\mathcal{R},q} \leq C_2 \|P_0(\varphi_m u)\|^2_{k,\mathcal{R},q}, \forall u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n).$$

Из свойств функций $\{\varphi_m\}^\infty_{m=1}$ и оценки (2.9) нетрудно проверить, что при достаточно большом m_0 и достаточно малом $\max\limits_{j=1,\ldots,l} \mathrm{diam} U_j$ для $m > m_0$ с некоторыми постоянными $C_3, C_4 > 0$ имеет место оценка

$$\|\varphi_m P_0 u - P_0(\varphi_m u)\|^2_{k,\mathcal{R},q} \\ \leq C_3 \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\gamma|>0} a^0_\alpha(x) D^\beta u D^\gamma \varphi_m q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \right\|^2_{k,\mathcal{R},q} \\ \leq C_4 \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\gamma|>0} a^0_\alpha(x) D^\beta u D^\gamma \varphi_m \frac{1}{q(x)^{\min\limits_i(\gamma:\mu^i)}} q(x)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \right\|^2_{k,\mathcal{R},q} \\ \leq \omega(\varepsilon) \|u\|^2_{H^{k+1,\mathcal{R}}_q(W_m)},$$

где $\omega(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из последних двух оценок получим, что с некоторой постоянной $C_5 > 0$ имеет место оценка

$$\|\varphi_m u\|^2_{k+1,\mathcal{R},q} \leq C_5 \left(\|\varphi_m P_0 u\|^2_{k,\mathcal{R},q} + \omega(\varepsilon) \|u\|^2_{H^{k+1,\mathcal{R}}_q(W_m)} \right), \forall u \in H^{k+1,\mathcal{R}}_q(\mathbb{R}^n).$$

Суммируя по всем $m > m_0$ и учитывая свойства $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$ получим, что с некоторой постоянной $C_6 > 0$ имеет место оценка

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty} \|\varphi_m u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2 \leq C_6 \left(\|P_0 u\|_{k,\mathcal{R},q}^2 + \omega(\varepsilon)\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2\right), \forall u \in H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n). \tag{2.21}$$

Из (2.19), (2.20) и (2.21) получим оценку

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2 \leq CC_1 \left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q}^2 + \|u\|_{L_2(K_{N_1})}^2\right)$$
$$+CC_6 \left(\|P_0 u\|_{k,\mathcal{R},q}^2 + \omega(\varepsilon)\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2\right), \forall u \in H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n).$$

При достаточно большом m_0 и достаточно малом $\max\limits_{j=1,\ldots,l} \mathrm{diam} U_j$ можем считать, что

$$CC_6\omega(\varepsilon) < \frac{1}{2}.$$

Тогда получим, что с некоторой постоянной $C_7 > 0$ имеет место оценка

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2 \leq C_7 \left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q}^2 + \|u\|_{L_2(K_{N_1})}^2 + \|P_0 u\|_{k,\mathcal{R},q}^2\right), \forall u \in H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n). \tag{2.22}$$

Имеем, что $P_0(x,\mathbb{D}) = P(x,\mathbb{D}) - L(x,\mathbb{D})$. Тогда

$$\|P_0 u\|_{k,\mathcal{R},q} \leq \|Pu\|_{k,\mathcal{R},q} + \|Lu\|_{k,\mathcal{R},q}, \forall u \in H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n).$$

В силу условий $D^\beta(a_\alpha^1(x)) = o\left(q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha-\beta:\mu^i)}\right)$ при $|x| \to \infty$, $\alpha \in \mathcal{R}, \beta \in k\mathcal{R}$ нетрудно проверить, что для некоторого $N_2 > 0$ имеет место оценка

$$\|Lu\|_{k,\mathcal{R},q}^2 \leq \tau(N_2)\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2 + C_8\|u\|_{H^{k+1,\mathcal{R}}(K_{N_2})}^2, \forall u \in H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n),$$

где $\tau(N_2) \to 0$ при $N_2 \to \infty$ и $C_8 = C_8(N_2) > 0$.

Тогда, использую априорную оценку для ограниченной области из работы [23], аналогично оценке (2.20), с некоторой постоянной $C_9 = C_9(N_2) > 0$ получим оценку

$$\|Lu\|_{k,\mathcal{R},q}^2 \leq \tau(N_2)\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2 + C_9 \left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q}^2 + \|u\|_{L_2(K_{N_2})}^2\right).$$

Подставляя полученные оценки в (2.22), получим

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2 \leq C_7 \left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q}^2 + \|u\|_{L_2(K_{N_1})}^2\right) + 2C_7\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q}^2$$
$$+2C_7\tau(N_2)\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}^2 + 2C_7C_9 \left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q}^2 + \|u\|_{L_2(K_{N_2})}^2\right), \forall u \in H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n).$$

Возьмем N_2 таким, что $C_7\tau(N_2) < 1/4$, тогда с некоторой постоянной $C_{10} > 0$ и $N = \max(N_1, N_2) > 0$ получим, что имеет место оценка

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q} \leq C_{10}\left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q} + \|u\|_{L_2(K_N)}\right), \forall u \in H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

Далее будем использовать следующую теорему (см. теорема 3.14 [21]):

Теорема 2.4. *Пусть A линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространвства X в банахово пространство Y. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *если оператор A обладает левым регуляризатором, тогда ядро оператора A в X конечномерно;*
2. *если оператор A обладает правым регуляризатором, тогда образ оператора A замкнут и коядро конечномерно в Y;*
3. *оператор A обладает левым и правым регуляризатором тогда и только тогда, когда A фредгольмов.*

Теорема 2.5. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+, q \in Q^{k,\mathcal{R}}$ и $P(x, \mathbb{D})$ дифференциальный оператор (2.1), коэффициенты которого удовлетворяют $\lim\limits_{p\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_p}} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$.*

Тогда оператор $P(x, \mathbb{D}) : H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} a_\alpha^0(x)\lambda^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\xi^\alpha\right| \geq \delta(\lambda + |\xi|_{\partial'\mathcal{R}}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| > M. \tag{2.23}$$

Доказательство. Докажем достаточность условий.

Пусть $m_0 \in \mathbb{N}$ и $x_m \in W_m, m = 1, 2 \ldots$. Для $m \leq m_0$ обозначим

$$P^m(x, \mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \left(\psi_m(x)\left(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_m)\right) + a_\alpha(x_m)\right) D^\alpha,$$

$$P^{m,0}(x, \mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\partial\mathcal{R}} \left(\psi_m(x)\left(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_m)\right) + a_\alpha(x_m)\right) D^\alpha,$$

$$R^{m,0} := F^{-1}\frac{|\xi|_{\partial'\mathcal{R}}}{(1 + |\xi|_{\partial'\mathcal{R}})P^{m,0}(x_m, \xi)}F.$$

В силу регулярности $P(x,\mathbb{D})$ в $\mathbb{R}^n$ при достаточно малых диаметрах областей $\{W_m\}_{m=1}^{m_0}$ из леммы 3.1 работы [19] следует, что при $m \le m_0$ имеет место представление:

$$P^m(x,\mathbb{D})R^{m,0} = I + T_1^m + T_2^m, \tag{2.24}$$

где $T_1^m : H^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+1+\sigma,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma = \sigma(\mathcal{R}) > 0$ и оператор $T_2^m : H^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет $\|T_2^m\| < 1$. Обозначим

$$R^m := R^{m,0}(I + T_2^m)^{-1}.$$

Тогда имеет место

$$P^m R^m = I + T^m, \tag{2.25}$$

где $T^m : H^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+\sigma,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ с некоторой $\sigma = \sigma(\mathcal{R}) > 0$.

Для $m > m_0$ обозначим

$$P^m(x,\mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \Big[\psi_m(x)\left(a_\alpha^0(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} - a_\alpha^0(x_m)q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\right) + a_\alpha^0(x_m)q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\Big] D^\alpha.$$

Так как $q \in Q^{k,\mathcal{R}}$ и $\lim\limits_{p\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_p}} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$, то по теореме 2.2 работы [11], можем взять m_0 достаточно большим таким, что для $m > m_0$ оператор $P^m : H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ имеет обратный оператор $R^m : H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$, причём, в силу (2.23) нормы этих операторов равномерно ограничены.

Рассмотрим

$$Rf := \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l R^l(\varphi_l f), f \in H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n).$$

В силу равномерной ограниченности норм операторов R^l, действующих из $H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$, свойств весовой функции q и систем функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty, \{\psi_m\}_{m=1}^\infty$, нетрудно проверить, что R является линейным ограниченным оператором, действующим из $H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$. Аналогично доказательству теоремы 2.6 из работы [19] можно проверить, что $R : H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ является правым регуляризатором. Тогда по теореме 2.4 получим, что коядро оператора $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ конечномерно. Из теоремы 2.3 следует, что оператор $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ является также n–нормальным. Следовательно, фредгольмовость оператора $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ доказана.

Докажем необходимость условий теоремы. Так как фредгольмов оператор является $n-$ нормальным, следовательно, по теореме 2.1 выполняется априорная оценка (2.2). Применяя теорему 2.2, получим, что $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и выполняется неравенство (2.23).

$\square$

Теорема 2.6. *Пусть* $k\in\mathbb{Z}_+, q\in Q^{k,\mathcal{R}}$ *и* $P(x,\mathbb{D})$ *дифференциальный оператор* (2.1), *коэффициенты которого удовлетворяют* $\lim\limits_{p\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_p}}|a^0_\alpha(x)-a^0_\alpha(y)|=0$ *для всех* $\alpha\in\mathcal{R}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *оператор* $P(x,\mathbb{D}): H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ *является фредгольмовым;*

2. *существуют постоянные* $\kappa>0$ *и* $N>0$ *такие, что*

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q}\le\kappa\left(\|Pu\|_{k,\mathcal{R},q}+\|u\|_{L_2(K_N)}\right),\forall u\in H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n);\qquad(2.26)$$

3. $P(x,\mathbb{D})$ *является регулярным в* $\mathbb{R}^n$ *и существуют постоянные* $\delta>0$ *и* $M>0$ *такие, что*

$$\left|\sum_{\alpha\in\mathcal{R}}a^0_\alpha(x)\lambda^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\xi^\alpha\right|\ge\delta(\lambda+|\xi|_{\partial'\mathcal{R}}),\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\lambda>0,|x|>M.\qquad(2.27)$$

Доказательство. Из фредгольмовости оператора $P(x,\mathbb{D}): H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ следует $n-$нормальность. Тогда из теоремы 2.1 следует выполнение априорной оценки (2.26). Тем самым доказали, что из условия 1 следует условие 2. Из выполнения априорной оценки по теореме 2.2 следуют регулярность $P(x,\mathbb{D})$ в $\mathbb{R}^n$ и условие на символ (2.27), т. е. из условия 2 следует условие 3. Из условий на символ $P(x,\mathbb{D})$ из теоремы 2.5 следует, что оператор $P(x,\mathbb{D}): H_q^{k+1,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{k,\mathcal{R}}(\mathbb{R}^n)$ фредгольмов, т. е. из условия 3 следует условие 1. Тем самым доказали, что все эти условия эквивалентны. $\square$

Список литературы

1. *Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* Москва: Мир, 1965.

2. *Никольский С. М.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения // *Докл. АН СССР.* 1962. Т.146, № 4. С. 767–769.

3. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов // *Труды МИАН.* 1967. Т.91, С. 9–81.

4. *Friberg J.* Multi-quasi-elliptic polynomials // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* 1967. V.21, P. 239–260.

5. *Volevich L. R., Gindikin S. G. The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations.*/ Math. Appl., V. 86. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

6. *Багиров Л. А.* Эллиптические уравнения в неограниченной области // *Матем. Сб.* 1971. Т.86, С. 121–139.

7. *McOwen R. C.* On elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // *Communications in Partial Differential Equations.* 1980. V.5, N 8. P. 913–933.

8. *Lockhart R. B., McOwen R. C.* On elliptic systems in $\mathbb{R}^n$ // *Acta Math.* 1983. V.150, N 1. P. 125–135.

9. *Schrohe E.* Spectral invariance, ellipticity, and the Fredholm property for pseudodifferential operators on weighted Sobolev spaces // *Ann. Global Anal. Geom.* 1992. V.10, N 3. P. 237–254.

10. *Багиров Л. А.* Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ // *Матем. Сб.* 1979. Т.110, № 4. С. 475–492.

11. *Karapetyan G. A., Darbinyan A. A.* Index of semielliptic operator in $\mathbb{R}^n$ // *Proc. Nat. Acad. Sci. Armenya: Mathematics* 2007. V.42, N 5. P. 33–50.

12. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$ // *Сиб. матем. журн.* 1998. Т.39, № 5. С. 1028–1037.

13. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // *Сиб. матем. журн.* 2008. Т.49, № 5. С. 842–851.

14. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения, не разрешенные относительно старшей производной // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.* 2016. Т.16, № 3. С. 15–26.

15. *Darbinyan A. A., Tumanyan A. G.* On a priori estimates and the Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces // *J. Contemp. Math. Anal.* 2018. V.53, N 2. P. 61–70.

16. *Tumanyan A. G.* On the Fredholm property of semielliptic operators in anisotropic weighted spaces in $\mathbb{R}^n$ // *J. Contemp. Math. Anal.* 2021. V.56, N 3. P. 168–181.

17. *Tumanyan A. G.*On the invariance of index of semielliptical operator on the scale of anisotropic spaces // *J. Contemp. Math. Anal.* 2016. V.51, N 4. P. 187–198.

18. *Darbinyan A .A., Tumanyan A .G.* On index stability of Noetherian differential operators in anisotropic Sobolev spaces // *Eurasian Math. J.* 2019. V.10, N 1. P. 9-15.

19. *Tumanyan A. G.* Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators in multianisotropic spaces in $\mathbb{R}^n$ // *Italian J. of Pure and Appl. Math.* 2022. V.48, N 1. P. 1009–1028.

20. *Boggiatto P., Buzano E., Rodino L.* Multi-quasi-elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // *Partial Differential Operators and Mathematical Physics, Proceedings Holzau.* 1995. V.61, N 1. P. 31–42.

21. *Edmunds D. E., Evans W. D. Spectral theory and differential operators.* Oxford: Oxford University Press, 1987.

22. *Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховых пространствах.* Москва: Наука, 1971.

23. *Pehkonen E.* Ein hypoelliptisches Diriclet Problem // *Com.Mat.Phys.* 1978. V.48, N 3. C. 131–143.

Туманян Ани Гагиковна
Российско-Армянский Университет,
ул. О. Эмина 123,
Ереван, 0051 АРМЕНИЯ.
Siemens Digital Industries Software,
ул. Алабяна 16,
Ереван, 0038 АРМЕНИЯ.
E-mail: `ani.tumanyan92@gmail.com`

Поступила в редакцию
28 апреля 2022 г.
Получена после доработки
22 августа 2022 г.
Принята к публикации
2 ноября 2022 г.