УДК 517.929.4
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.111

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2023, том 26, № 1, 208–218

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Рассматривается класс систем линейных дифференциальных уравнений с бесконечным распределенным запаздыванием и периодическими коэффициентами. Используя функционал Ляпунова – Красовского, получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения для рассматриваемой системы, указаны условия на возмущения коэффициентов системы, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость, установлены оценки на нормы решений исходной и возмущенной системы, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности.

Ключевые слова и фразы: линейные уравнения с распределенным запаздыванием, периодические коэффициенты, устойчивость, функционал Ляпунова – Красовского

Введение

В работе рассматривается система вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int_{-\infty}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими коэффициентами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с T-периодическими по первой переменной, непрерывными по первой переменной и кусочно-непрерывными по второй переменной коэффициентами, т.е.

$$A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t,s) = B(t+T,s),$$

при этом

$$\int_0^{\infty} \|B(t,s)\|\,ds < \infty, \quad t > 0.$$

Здесь и далее под нормой матрицы понимается её спектральная норма.

Цель работы заключается в исследовании экспоненциальной и робастной устойчивостей нулевого решения системы (1), непрерывной зависимости решения системы (1) от коэффициентов системы.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

© Т. Ыскак; 2023

Исследованию устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом посвящено много работ (см., например, [1-15]). Одним из наиболее распространенных методов исследования является метод функционалов Ляпунова – Красовского. Данный метод не требует наличия спектральной информации, более того, он позволяет при правильно подобранном функционале получать не только условия устойчивости, но и оценки на решения, а в нелинейном случае — оценки на множество притяжения. Отметим, что с помощью таких функционалов были исследованы уравнения с запаздывающим аргументом в работах [16-19]. В работах [16-18] рассматривались уравнения с сосредоточенным запаздыванием, в [19] — с распределенным запаздыванием.

Исследования в данной работе будут проводиться с использованием функционала Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s,\eta)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta. \qquad (2)$$

Предполагается, что матрицы $H(t)$ и $K(t,\eta)$ являются эрмитовыми и положительно определенными.

Основные результаты

Рассмотрим начальные данные для системы (1):

$$\begin{cases} y(s) = \varphi(s), \quad s \in (-\infty, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \qquad (3)$$

где $\varphi \in C(-\infty, 0]$ — ограниченная заданная функция.

Введем обозначения:

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \int_0^\infty K(0,s)\, ds$$

$$- \int_0^\infty H(t)B(t,s)K^{-1}(s,s)B^*(t,s)H(t)\, ds, \qquad (4)$$

$$\gamma(t) = \min\{p_H(t), k\}, \qquad (5)$$

где $p_H(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)$ $H^{-\frac{1}{2}}(t)$, k — положительное число, и

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int_0^\infty \int_{-\eta}^0 \langle K(-s,\eta)\varphi(s), \varphi(s)\rangle \, ds d\eta. \qquad (6)$$

Сформулируем теорему об оценках решения начальной задачи (1), (3):

Теорема 1. *Пусть*
1) существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$, и дифференцируемая по первой переменной матрица $K(t,\eta) = K^*(t,\eta)$, такие, что

$$H(t) > 0, \quad K(t,\eta) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}K(t,\eta) < 0, \quad t > 0, \quad \eta > 0,$$

$$\int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \|\frac{\partial}{\partial t}K(t-s,\eta)\|\, ds d\eta < \infty, \quad t > 0;$$

2) существует такое число $k > 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,\eta) + kK(t,\eta) \le 0, \quad t > 0, \quad \eta > 0; \tag{7}$$

3) определена матрица $P(t)$ из (4), при этом

$$\int_0^T \gamma(s)\, ds > 0, \tag{8}$$

где $\gamma(t)$ определена в (5).

Тогда для решения начальной задачи (1), (3) справедлива оценка

$$\|y(t)\|^2 \le \|H^{-1}(t)\| \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\, ds\right) v(0,\varphi), \tag{9}$$

где $v(0,\varphi)$ определен в (6).

Доказательство. Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского (2) вдоль решения начальной задачи (1), (3). Производная данного функционала будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + \int_0^\infty K(0,s)\, ds\right) y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+ \int_{-\infty}^t \langle H(t)B(t,t-s)y(s), y(t)\rangle\, ds + \int_{-\infty}^t \langle H(t)y(t), B(t,t-s)y(s)\rangle\, ds$$

$$- \int_{-\infty}^t \langle K(t-s,t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds + \int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \langle \frac{\partial}{\partial t}K(t-s,\eta)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta.$$

Используя определение матрицы $P(t)$ из (4), имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = -\langle P(t)y(t), y(t)\rangle - \int_{-\infty}^t \langle K^{-1}(t-s,t-s)z(t-s,t,s), z(t-s,t,s)\rangle\, ds$$

$$+\int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \langle \frac{\partial}{\partial t} K(t-s,\eta)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta, \tag{10}$$

где

$$z(t-s,t,s) = K(t-s,t-s)y(s) - B^*(t,t-s)H(t)y(t).$$

В силу определения $p_H(t)$, положительной определенности матрицы $K(t,s)$ и (7) получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -p_H(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle - k\int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s,\eta)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta.$$

Воспользуемся определением $\gamma(t)$ из (5) и функционала (2):

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\gamma(t)v(t,y).$$

Из данного неравенства несложно увидеть справедливость оценки (9).

Теорема доказана.

Замечание 1. Стоит отметить, что условие (8) в доказательстве теоремы не использовалось. Данное условие обеспечивает экспоненциальное убывание решения начальной задачи в оценке (9), поскольку функция $\gamma(t)$ в показателе экспоненты T-периодична. Тем самым условие (8) в теореме 1 является достаточным условием экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1).

Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему:

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A(t) + A_1(t))\, y(t) + \int_{-\infty}^t (B(t,t-s) + B_1(t,t-s))\, y(s)\, ds, \tag{11}$$

где $A_1(t)$ — матрица с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющая оценке

$$\|A_1(t)\| \le g, \quad t > 0, \tag{12}$$

$B_1(t,s)$ — матрица с коэффициентами, непрерывными по первой переменной и кусочно-непрерывными по второй переменной, при этом справедлива оценка

$$\|B_1(t,s)\| \le de^{-\delta s}, \quad t > 0, \quad s > 0. \tag{13}$$

Отметим, что возмущения, вообще говоря, могут быть непериодическими. Введем обозначение:

$$r(t) = 2g\nu(H(t))$$

$$+2\|H(t)\| \int_0^\infty \|K^{-1}(s,s)\| \left(2d\|B(t,s)\|e^{-\delta s} + d^2 e^{-2\delta s}\right) ds, \tag{14}$$

где $\nu(H(t)) = \|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|$ — число обусловленности матрицы $H(t)$.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) выполнены условия теоремы 1, матрицы возмущений системы (11) такие, что интеграл в (14) сходится, и существуют такие числа $\alpha > 0$, c, что выполнено неравенство*

$$\int_0^t r(s)\,ds + \alpha t - c \le \int_0^t \gamma(s)\,ds, \quad t > 0. \tag{15}$$

Тогда для решения начальной задачи (11), (3) справедлива оценка

$$\|y(t)\|^2 \le \|H^{-1}(t)\| \exp\left(-\alpha t + c\right) v(0,\varphi), \tag{16}$$

где $v(0,\varphi)$ определен в (6).

Доказательство. Как в теореме 1, рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (2) вдоль решения начальной задачи (11), (3). Рассматривая производную функционала, получим аналог (10):

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = -\langle \widehat{P}(t)y(t), y(t)\rangle - \int_{-\infty}^t \langle K^{-1}(t-s,t-s)\widehat{z}(t-s,t,s), \widehat{z}(t-s,t,s)\rangle\,ds$$

$$+ \int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \langle \frac{\partial}{\partial t}K(t-s,\eta)y(s), y(s)\rangle\,ds d\eta,$$

где

$$\widehat{P}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)(A(t)+A_1(t)) - (A^*(t)+A_1^*(t))H(t) - \int_0^\infty K(0,s)\,ds$$

$$- \int_0^\infty H(t)(B(t,s)+B_1(t,s))K^{-1}(s,s)(B^*(t,s)+B_1^*(t,s))H(t)\,ds,$$

$$\widehat{z}(t-s,t,s) = K(t-s,t-s)y(s) - (B^*(t,t-s)+B_1^*(t,t-s))H(t)y(t).$$

Несложно заметить, что в силу (4), (12), (13) и (14) имеет место неравенство

$$\widehat{P_H}(t) \ge P_H(t) - r(t)I,$$

где $\widehat{P}_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)\widehat{P}(t)H^{-\frac{1}{2}}(t)$, I — единичная матрица. В силу определения $p_H(t)$, положительной определенности матрицы $K(t,s)$ и (7) получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -(\gamma(t) - r(t))v(t,y).$$

Следовательно,

$$v(t,y) \le \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,ds + \int_0^t r(s)\,ds\right) v(0,\varphi).$$

Из неравенства (15) и вида функционала (2) вытекает оценка (16).

Теорема доказана.

Замечание 2. Если у системы (11) нулевые возмущения, то в силу T-периодичности функции $\gamma(t)$ параметры в неравенстве (15) можно выбрать следующий образом:

$$\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma(s)\,ds,$$

$$c = \max_{\xi\in[0,T]}\left(\frac{\xi}{T}\int_0^T \gamma(s)\,ds - \int_0^\xi \gamma(s)\,ds\right).$$

Введем обозначения:

$$M = \max_{\xi\in[0,T]} \exp\left(\int_0^\xi \frac{\gamma(s)}{2}\,ds - \xi\int_0^T \frac{\gamma(s)}{2T}\,ds\right), \tag{17}$$

где $\gamma(t)$ определена в (5),

$$m = \min_{\xi\in[0,T]} \exp\left(\int_0^\xi \frac{\gamma(s)}{2}\,ds - \xi\int_0^T \frac{\gamma(s)}{2T}\,ds\right), \tag{18}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2T}\int_0^T \gamma(s)\,ds, \tag{19}$$

$$\nu_{\max}(H) = \max_{s\in[0,T]}\|H(s)\| \max_{s\in[0,T]}\|H^{-1}(s)\|, \tag{20}$$

$$L_1 = \frac{M}{m}\sqrt{\nu_{\max}(H)}e^{c/2}\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\left[g + d(\delta-\alpha/2)^{-1}\right], \tag{21}$$

$$L_2 = \frac{M}{m} d \max_{s\in[0,T]}\|H(s)\|^{1/2}\delta^{-1}\left(\varepsilon-\delta\right)^{-1}, \tag{22}$$

$$L_3 = d\sqrt{\nu_{\max}(H)}e^{\frac{c}{2}}(\delta-\alpha/2)^{-1}\left(\varepsilon-\delta\right)^{-1}. \tag{23}$$

где g определен в (12), α и c в (15), d и δ в (13).

Теорема 3. *Пусть*

1) для системы (1) выполнены условия теоремы 1;

2) для возмущенной системы (11) выполнены условия теоремы 2,

3) $\frac{1}{T}\int_0^T \gamma(s)\,ds \neq \alpha$, $\frac{1}{T}\int_0^T \gamma(s)\,ds \neq 2\delta$, $\alpha \neq 2\delta$,

тогда справедлива оценка

$$\|y(t) - \widehat{y}(t)\| \le \|H^{-1}(t)\|^{1/2}$$

$$\times\left|L_1\left(e^{-\alpha t/2} - e^{-\varepsilon t}\right)v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi) + \left(L_2 \sup_{s\in(-\infty,0]}\|\varphi(s)\| - L_3 v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)\right)\left(e^{-\delta t} - e^{-\varepsilon t}\right)\right|,$$

где $y(t)$ — решение начальной задачи (1), (3), $\widehat{y}(t)$ — решение начальной задачи (11), (3), L_1, L_2, L_3 определены в (21)-(23) соответственно, $v(0,\varphi)$ определен в (6).

Доказательство. Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (2) вдоль разности решений $y(t)$ и $\widehat{y}(t)$:

$$v(t, y-\widehat{y}) = \langle H(t)(y(t)-\widehat{y}(t)), y(t)-\widehat{y}(t)\rangle$$

$$+\int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s,\eta)(y(s)-\widehat{y}(s)), y(s)-\widehat{y}(s)\rangle\, ds d\eta.$$

Найдем производную данного функционала:

$$\frac{d}{dt}v(t, y-\widehat{y})$$

$$= \left\langle \left(H'(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + \int_0^\infty K(0,s)\, ds \right)(y(t)-\widehat{y}(t)), y(t)-\widehat{y}(t) \right\rangle$$

$$+\int_{-\infty}^t \langle H(t)B(t,t-s)(y(s)-\widehat{y}(s)), y(t)-\widehat{y}(t)\rangle\, ds$$

$$+\int_{-\infty}^t \langle H(t)(y(t)-\widehat{y}(t)), B(t,t-s)(y(s)-\widehat{y}(s))\rangle\, ds$$

$$-\int_{-\infty}^t \langle K(t-s,t-s)(y(s)-\widehat{y}(s)), y(s)-\widehat{y}(s)\rangle\, ds$$

$$+\int_0^\infty \int_{t-\eta}^t \langle \frac{\partial}{\partial t}K(t-s,\eta)(y(s)-\widehat{y}(s)), y(s)-\widehat{y}(s)\rangle\, ds d\eta$$

$$-\langle H(t)A_1(t)\widehat{y}(t), y(t)-\widehat{y}(t)\rangle - \langle H(t)(y(t)-\widehat{y}(t)), A_1(t)\widehat{y}(t)\rangle$$

$$-\int_{-\infty}^t \langle H(t)B_1(t,t-s)\widehat{y}(s), y(t)-\widehat{y}(t)\rangle\, ds$$

$$-\int_{-\infty}^t \langle H(t)(y(t)-\widehat{y}(t)), B_1(t,t-s)\widehat{y}(s)\rangle\, ds.$$

Оценивая производную функционала Ляпунова – Красовского, как в теореме 1, получим

$$\frac{d}{dt}v(t, y-\widehat{y}) \le -\gamma(t)v(t, y-\widehat{y})$$

$$-\langle H(t)A_1(t)\widehat{y}(t), y(t)-\widehat{y}(t)\rangle - \langle H(t)(y(t)-\widehat{y}(t)), A_1(t)\widehat{y}(t)\rangle$$

$$-\int_{-\infty}^t \langle H(t)B_1(t,t-s)\widehat{y}(s), y(t)-\widehat{y}(t)\rangle\, ds$$

$$-\int_{-\infty}^{t}\langle H(t)(y(t)-\widehat{y}(t)),B_1(t,t-s)\widehat{y}(s)\rangle\,ds.$$

В силу (2) имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y-\widehat{y})\le-\gamma(t)v(t,y-\widehat{y})+2\|H(t)\|^{1/2}\|A_1(t)\|\|\widehat{y}(t)\|v^{1/2}(t,y-\widehat{y})$$

$$+2\|H(t)\|^{1/2}v^{1/2}(t,y-\widehat{y})\int_{-\infty}^{t}\|B_1(t,t-s)\|\|\widehat{y}(s)\|\,ds.$$

Используя (12), (13), (16) и (20), получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y-\widehat{y})\le-\gamma(t)v(t,y-\widehat{y})$$

$$+2g\sqrt{\nu_{\max}(H)}e^{-\alpha t/2+c/2}v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)v^{1/2}(t,y-\widehat{y})$$

$$+2d\max_{s\in[0,T]}\|H(s)\|^{1/2}v^{1/2}(t,y-\widehat{y})$$

$$\times\left(e^{\frac{c}{2}}\max_{s\in[0,T]}\|H^{-1}(s)\|^{1/2}v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)\frac{2e^{-\alpha t/2}-2e^{-\delta t}}{2\delta-\alpha}+\frac{e^{-\delta t}}{\delta}\sup_{s\in(-\infty,0]}\|\varphi(s)\|\right).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(v^{1/2}(t,y-\widehat{y})\exp\left(\int_0^t\frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right)\right)$$

$$\le g\sqrt{\nu_{\max}(H)}\exp\left(\int_0^t\frac{\gamma(s)}{2}\,ds-\frac{\alpha}{2}t+\frac{c}{2}\right)v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)$$

$$+d\max_{s\in[0,T]}\|H(s)\|^{1/2}\exp\left(\int_0^t\frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right)$$

$$\times\left(e^{\frac{c}{2}}\max_{s\in[0,T]}\|H^{-1}(s)\|^{1/2}v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)\frac{2e^{-\alpha t/2}-2e^{-\delta t}}{2\delta-\alpha}+\frac{e^{-\delta t}}{\delta}\sup_{s\in(-\infty,0]}\|\varphi(s)\|\right).$$

Проинтегрировав от 0 до t и используя следующее неравенство

$$m\,(\varepsilon-\delta)^{-1}\left(e^{(\varepsilon-\delta)t}-1\right)\le\int_0^t\exp\left(\int_0^\xi\frac{\gamma(s)}{2}\,ds-\delta\xi\right)d\xi\le$$

$$\max_{\xi\in[0,T]}\exp\left(\int_0^\xi\frac{\gamma(s)}{2}\,ds-\xi\int_0^T\frac{\gamma(s)}{2T}\,ds\right)\int_0^t\exp\left(\frac{\xi}{T}\int_0^T\frac{\gamma(s)}{2}\,ds-\delta\xi\right)d\xi$$

$$=M\,(\varepsilon-\delta)^{-1}\left(e^{(\varepsilon-\delta)t}-1\right),$$

где M и ε определены в (17) и (19) соответственно, получим

$$v^{1/2}(t, y-\widehat{y}) \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma(s)}{2}\, ds\right) \leq$$

$$M\Bigg[g\sqrt{\nu_{\max}(H)}e^{c/2}\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\left(e^{(\varepsilon-\alpha/2)t}-1\right) v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)$$

$$+d\sqrt{\nu_{\max}(H)}e^{\frac{c}{2}}v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)(\delta-\alpha/2)^{-1}$$

$$\times\left(\left(\varepsilon-\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\left(e^{(\varepsilon-\alpha/2)t}-1\right) - \frac{m}{M}\left(\varepsilon-\delta\right)^{-1}\left(e^{(\varepsilon-\delta)t}-1\right)\right)$$

$$+d\max_{s\in[0,T]}\|H(s)\|^{1/2}\sup_{s\in(-\infty,0]}\|\varphi(s)\|\delta^{-1}\left(\varepsilon-\delta\right)^{-1}\left(e^{(\varepsilon-\delta)t}-1\right)\Bigg].$$

Учитывая обозначения (21)-(23), имеем

$$v^{1/2}(t, y-\widehat{y}) \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma(s)}{2}\, ds\right) \leq mL_1 v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)\left(e^{(\varepsilon-\alpha/2)t}-1\right)$$

$$+m(L_2\sup_{s\in(-\infty,0]}\|\varphi(s)\| - L_3 v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi))\left(e^{(\varepsilon-\delta)t}-1\right).$$

Из данного неравенства с учетом (2) и (18) вытекает нужная оценка.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Г.В. Демиденко за внимание к работе.

Список литературы

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений* . Москва: Наука, 1991.

2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

3. *Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений.* Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1996.

4. *Кореневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии.* Киев: Наукова думка, 1989.

5. *Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.* Москва: Физматгиз, 1959.

6. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.

7. Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* Москва: Ленанд; Издание 3-е, 2014.

8. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // *Изв. вузов. Матем.* 2007. № 6. С. 55–63.

9. *Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений.* Москва: Мир, 1984.

10. *Чудинов К. М.* Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // *Изв. вузов. Матем.* 2014. № 4. С. 52–61.

11. *Ыскак Т.* Устойчивость решений систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // *Мат. заметки СВФУ.* 2022. Т. 29, № 3. С. 93–107.

12. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* . Москва: Наука, 1971.

13. *Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications.* New York: Springer-Verl., 2012.

14. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // *J. Anal. Appl.* 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.

15. *Egorov A. V., Cuvas C., Mondié S.* Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // *Automatica J. IFAC.* 2017. V. 80. P. 218–224.

16. *Faria T.* Stability for Nonautonomous Linear Differential Systems with Infinite Delay // *J. Dynam. Differential Equations.* 2022. V. 34, P. 747–773.

17. *Gil' M. I. Stability of neutral functional differential equations.* Atlantis Stud. Differ. Equ., V. 3. Paris: Atlantis Press, 2014.

18. *Hatvani L.* Asymptotic stability of non-autonomous functional differential equations with distributed delays // *Electron. J. Differential Equations.* 2016. V. 2016, No. 302. P. 1–16.

19. *Kolmanovskiĭ V. B., Myshkis A. D. Introduction to the theory and applications of functional differential equations.* Mathematics and its Applications, V. 463. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.

Ыскак Тимур
Институт математики
им. С.Л.Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `istima92@mail.ru`

Поступила в редакцию
25 мая 2023 г.
Получена после доработки
12 июня 2023 г.
Принята к публикации
16 июня 2023 г.