УДК 512.643.4
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.102

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2023, том 26, № 1, 26-40

О РАСПОЛОЖЕНИИ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАБОЛЫ

Г. В. Демиденко, В. С. Прохоров

Рассматривается проблема локализации матричного спектра относительно параболы. В терминах разрешимости некоторого матричного уравнения типа Ляпунова мы доказываем теоремы о принадлежности спектра области $\mathcal{P}_i$, ограниченной параболой, а также о принадлежности области $\mathcal{P}_e$, лежащей вне замыкания $\mathcal{P}_i$. Построено решение матричного уравнения. Используя это уравнение, мы доказываем аналог теоремы Ляпунова-Крейна о дихотомии матричного спектра относительно параболы.

Ключевые слова и фразы: обобщенные уравнения Ляпунова, теорема Крейна, локализация матричного спектра, теорема о дихотомии

§1. Введение и постановка задачи

Спектральные проблемы линейной алгебры являются очень важными в теоретических и прикладных исследованиях. В частности, многие задачи теории управления, задачи описания ε-спектра или псевдоспектра приводят к необходимости изучения принадлежности матричного спектра различным областям, ограниченным некоторыми контурами в комплексной плоскости, а также к решению задачи о дихотомии матричного спектра относительно некоторых кривых (см., например, [1, 3, 9, 12]). Поэтому установление различных критериев и разработка алгоритмов для определения расположения матричного спектра в комплексной плоскости представляют очень важные задачи.

Наиболее известными критериями локализации матричного спектра, используемыми в линейной алгебре, являются критерии Ляпунова. Эти критерии дают необходимые и достаточные условия принадлежности матричного спектра единичному кругу

$$\mathcal{C}_i = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < 1\}$$

и левой полуплоскости

$$\mathcal{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}\lambda < 0\}.$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008)

Приведем формулировки этих критериев для матрицы A размера $n \times n$.

Теорема 1.1. (Ляпунов). *Все собственные числа матрицы A принадлежат единичному кругу $\mathcal{C}_i$ тогда и только тогда, когда матричное уравнение*

$$H - A^*HA = C, \quad C = C^* > 0, \tag{1.1}$$

имеет эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$.

Следствие 1.1. *Если все собственные значения матрицы A принадлежат единичному кругу $\mathcal{C}_i$, то решение $H = H^* > 0$ матричного уравнения (1.1) имеет вид*

$$H = \sum_{j=0}^{\infty} (A^*)^j C A^j. \tag{1.2}$$

Теорема 1.2. (Ляпунов). *Все собственные числа матрицы A принадлежат левой полуплоскости $\mathcal{C}_-$ тогда и только тогда, когда матричное уравнение*

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0, \tag{1.3}$$

имеет эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$.

Следствие 1.2. *Если все собственные значения матрицы A принадлежат левой полуплоскости $\mathcal{C}_-$, то решение $H = H^* > 0$ матричного уравнения (1.3) имеет вид*

$$H = \int_0^{\infty} e^{tA^*} C e^{tA} dt. \tag{1.4}$$

Матричные уравнения (1.1), (1.3) в литературе называются *уравнениями Ляпунова.* Отметим, что приведенные критерии используются при проведении численных исследований. В частности, на основе формул (1.2) и (1.4) С.К. Годуновым и А.Я. Булгаковым были разработаны алгоритмы, позволяющие численно решать задачи о принадлежности матричного спектра областям $\mathcal{C}_i$ и $\mathcal{C}_-$ соответственно с гарантированной точностью. Обзор результатов в этом направлении содержится в монографиях [1, 6].

В работах [7, 8] была изучена задача о принадлежности матричного спектра области, ограниченной эллипсом

$$\mathcal{E}_i = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{(\operatorname{Re}\lambda)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{b^2} < 1 \right\}, \quad a > b.$$

В частности, в [8] была доказана следующая теорема.

Теорема 1.3. *Все собственные числа матрицы A принадлежат области $\mathcal{E}_i$ тогда и только тогда, когда матричное уравнение*

$$H-\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)A^*HA-\left(\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{4b^2}\right)(HA^2+(A^*)^2H)=C, \quad C=C^*>0, \tag{1.5}$$

имеет эрмитово положительно определенное решение $H=H^*>0$.

В работе [7] была получена формула решения уравнения (1.5) при $C=I$:

$$H=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}C_k^l\alpha^{k-l}(A^*)^{k-l}\left[\beta^l\sum_{j=0}^{l}C_l^j(A^*)^{2j}A^{2(l-j)}\right]A^{k-l}\right), \tag{1.6}$$

где

$$\alpha=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}, \quad \beta=\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{4b^2}.$$

Формула (1.6) может быть переписана следующим образом

$$H=(1-\gamma^2)\sum_{k=0}^{\infty}f_k^*f_k,$$

где

$$f_0=I, \quad f_1=\sigma A,$$
$$f_k=\sigma f_{k-1}A+\gamma f_{k-2}, \quad k=2,3,\ldots,$$
$$\gamma=-\frac{a-b}{a+b}, \quad \sigma=\frac{2}{a+b}.$$

На основе этой формулы в работе [7] был разработан алгоритм для численного решения задачи о принадлежности матричного спектра области $\mathcal{E}_i$.

Отметим, что теоремы 1.1–1.3 можно обобщить для решения задачи о дихотомии матричного спектра относительно окружности, прямой и эллипса (см. [1, 2, 6, 8]).

Приведенные теоремы устанавливают связи между принадлежностью матричного спектра областям $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_-$ и $\mathcal{E}_i$ и разрешимостью матричных уравнений (1.1), (1.3) и (1.5) соответственно. Интересно отметить, что аналогичные связи имеют место для более общих случаев. В монографиях А.Г. Мазко [3, 9] подобные связи были установлены при решении задач о принадлежности матричного спектра широкому кругу областей в комплексной плоскости и рассмотрении класса *обобщенных уравнений Ляпунова* следующего вида

$$\sum_{j,k=0}^{N}a_{jk}B^jHA^k=C, \tag{1.7}$$

где A, B, C — известные матрицы размеров $n \times n$, $m \times m$, $m \times n$ соответственно, N определяет порядок уравнения (1.7), a_{jk} — постоянные коэффициенты, а H — неизвестная матрица размера $m \times n$.

Очевидно, класс матричных уравнений вида (1.7) при $N \leq 2$, $m = n$, $B = A^*$ включает уравнения (1.1), (1.3) и (1.5).

Отметим, что впервые обобщенные уравнения Ляпунова вида (1.7) были рассмотрены в работах М.Г. Крейна (см. [2, гл. 1]). Ниже мы приведем один из его результатов.

Обозначим

$$P(\lambda, \mu) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} \lambda^j \mu^k \tag{1.8}$$

— характеристический полином уравнения (1.7). Введем следующие обозначения:

$\sigma(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ — спектр матрицы A;

$\sigma(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ — спектр матрицы B;

γ_A — замкнутый контур, охватывающий спектр $\sigma(A)$;

γ_B — замкнутый контур, охватывающий спектр $\sigma(B)$.

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1.4. (Крейн). *Пусть выполнено условие*

$$P(\lambda_s, \mu_r) \neq 0,$$

где

$$\lambda_s \in \sigma(B), \quad s = 1, \dots, m, \quad \mu_r \in \sigma(A), \quad r = 1, \dots, n.$$

Тогда для любой матрицы C уравнение (1.7) имеет единственное решение, и его можно представить в виде

$$H = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_A} \int\limits_{\gamma_B} \frac{1}{P(\lambda, \mu)} (\lambda I - B)^{-1} C (\mu I - A)^{-1} d\lambda \, d\mu. \tag{1.9}$$

В этой статье мы рассматриваем задачу о расположении матричного спектра относительно параболы, в частности, решаем задачу о дихотомии спектра относительно параболы. Отметим, что в литературе имеется ряд алгоритмов по решению подобных задач (см., например, [4, 5, 10, 11]). Однако эти алгоритмы основаны на сведении изучаемых спектральных задач к хорошо известным задачам о расположении матричного спектра относительно окружности или прямой. В работе мы даем новое решение рассматриваемых задач без промежуточного сведения их к известным. Это решение основано на изучении специального матричного уравнения типа Ляпунова. В терминах разрешимости этого уравнения мы доказываем теоремы о принадлежности матричного спектра области $\mathcal{P}_i$, ограниченной параболой, а также о принадлежности области $\mathcal{P}_e$, лежащей вне замыкания $\mathcal{P}_i$. Более того, используя норму решения матричного уравнения, мы указываем полосу, прилегающую к параболе

$$h = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{2p} (\operatorname{Im} \lambda)^2 = \operatorname{Re} \lambda \right\}, \quad p > 0,$$

в которой нет ни одного собственного значения матрицы A. При рассмотрении задачи о принадлежности матричного спектра области $\mathcal{P}_i$ мы получаем явную формулу для решения матричного уравнения, являющуюся некоторым аналогом формул (1.2), (1.4), (1.6) и которую можно использовать при разработке алгоритмов для проведения численных исследований. Отметим также, что используя это уравнение, мы доказываем аналог теоремы Ляпунова-Крейна о дихотомии матричного спектра относительно параболы.

§2. Расположение матричного спектра области, ограниченной параболой

В этом параграфе мы устанавливаем критерий принадлежности матричного спектра области в комплексной плоскости, ограниченной параболой. Этот критерий является аналогом критериев, указанных выше, и будет сформулирован в терминах разрешимости одного матричного уравнения.

Пусть A — матрица размера $n \times n$. Обозначим $\mathcal{P}_i$ область, ограниченную параболой h:

$$\mathcal{P}_i = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{2p} (\operatorname{Im} \lambda)^2 < \operatorname{Re} \lambda \right\}, \quad p > 0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_i$. Тогда матричное уравнение*

$$HA + A^*H - \frac{1}{2p} \left[A^*HA - \frac{1}{2} (HA^2 + (A^*)^2 H) \right] = C \tag{2.1}$$

однозначно разрешимо для любой матрицы C.

Доказательство. Очевидно, уравнение (2.1) входит в класс обобщенных уравнений Ляпунова (1.7), где

$$N = 2, \ \ B = A^*, \ \ a_{00} = 0, \ \ a_{10} = a_{01} = 1, \ \ a_{11} = -\frac{1}{2p}, \ \ a_{02} = a_{20} = \frac{1}{4p}$$

(см. [3]). По условию теоремы все собственные значения μ_j матрицы A принадлежат области $\mathcal{P}_i$. Спектр матрицы $B = A^*$ также принадлежит $\mathcal{P}_i$. Покажем, что условие теоремы Крейна выполнены.

Выпишем характеристический полином вида (1.8), соответствующий уравнению (2.1):

$$P(\lambda, \mu) = \mu + \lambda - \frac{1}{2p}\lambda\mu + \frac{1}{4p}(\mu^2 + \lambda^2).$$

Пусть $\mu_r = \alpha_r + i\beta_r$. Тогда в нашем случае $\lambda_s = \overline{\mu}_s = \alpha_s - i\beta_s$ и

$$P(\lambda_s, \mu_r) = \mu_r + \overline{\mu}_s - \frac{1}{2p}\overline{\mu}_s\mu_r + \frac{1}{4p}(\mu_r^2 + \overline{\mu}_s^2).$$

Очевидно, имеем

$$\operatorname{Re} P(\lambda_s, \mu_r) = \alpha_r + \alpha_s - \frac{1}{2p}(\alpha_s\alpha_r + \beta_s\beta_r) + \frac{1}{4p}(\alpha_s^2 - \beta_s^2 + \alpha_r^2 - \beta_r^2)$$

$$= (\alpha_r - \frac{1}{2p}\beta_r^2) + (\alpha_s - \frac{1}{2p}\beta_s^2) + \frac{1}{4p}(\alpha_r + \alpha_s)^2 + \frac{1}{4p}(\beta_r + \beta_s)^2$$

и отсюда

$$\operatorname{Re} P(\lambda_s, \mu_r) \geq \left(\alpha_r - \frac{1}{2p}\beta_r^2\right) + \left(\alpha_s - \frac{1}{2p}\beta_s^2\right).$$

Поскольку $\sigma(A) \subset \mathcal{P}_i$, то $\alpha_j - \frac{1}{2p}\beta_j^2 > 0$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому

$$\operatorname{Re} P(\lambda_s, \mu_r) > 0, \quad \lambda_s \in \sigma(A^*), \quad \mu_r \in \sigma(A), \quad s, r = 1, \dots, n.$$

Следовательно, условие теоремы 1.4 выполнено и значит уравнение (2.1) однозначно разрешимо для любой матрицы C, при этом в силу формулы (1.9) имеем

$$H = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_A} \int\limits_{\gamma_{A^*}} \frac{1}{P(\lambda, \mu)} (\lambda I - A^*)^{-1} C (\mu I - A)^{-1} d\lambda\, d\mu, \qquad (2.2)$$

где контуры γ_A и γ_{A^*} охватывают спектры матриц A и A^* соответственно. В качестве контуров γ_A и γ_{A^*} можно взять границу множества

$$\left\{\lambda : |\lambda| \leq \|A\| + \varepsilon, \quad \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\lambda)^2 \leq \operatorname{Re}\lambda\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Теорема доказана. □

Следствие 2.1. *Если $C = C^*$, то $H = H^*$. А если $C = C^* > 0$, то $H = H^* > 0$.*

Теорема 2.2. *Предположим, что уравнение (2.1) при $C = C^* > 0$ имеет эрмитово положительно определенное решение H. Тогда все собственные значения μ_k матрицы A принадлежат области $\mathcal{P}_i$. Более того, выполняется оценка*

$$\frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\mu_k)^2 \leq \operatorname{Re}\mu_k - \frac{1}{2\|C^{-1}\|\|H\|}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть μ_k — произвольное собственное число матрицы A и v_k — единичный собственный вектор. Учитывая уравнение (2.1), имеем

$$\langle Cv_k, v_k\rangle = \left\langle \left(HA + A^*H - \frac{1}{2p}\left[A^*HA - \frac{1}{2}(HA^2 + (A^*)^2H)\right]\right) v_k, v_k \right\rangle$$

$$= (\mu_k + \overline{\mu}_k)\langle Hv_k, v_k\rangle - \frac{1}{2p}\overline{\mu}_k\mu_k\langle Hv_k, v_k\rangle + \frac{1}{4p}(\mu_k^2 + \overline{\mu}_k^2)\langle Hv_k, v_k\rangle$$

и поскольку

$$\mu_k + \overline{\mu}_k = 2\operatorname{Re}\mu_k, \qquad \overline{\mu}_k\mu_k = (\operatorname{Re}\mu_k)^2 + (\operatorname{Im}\mu_k)^2,$$

$$\mu_k^2 + \overline{\mu}_k^2 = 2(\operatorname{Re}\mu_k)^2 - 2(\operatorname{Im}\mu_k)^2,$$

получим

$$\langle Cv_k, v_k\rangle = 2\left(\operatorname{Re}\mu_k - \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\mu_k)^2\right)\langle Hv_k, v_k\rangle. \tag{2.4}$$

Следовательно, из условия $C = C^* > 0$, $H = H^* > 0$ вытекает $\mu_k \in \mathcal{P}_i$, $k = 1, \dots, n$. Более того, учитывая (2.4), получаем оценку

$$2\left(\operatorname{Re}\mu_k - \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\mu_k)^2\right)\|H\| \geq \frac{1}{\|C^{-1}\|},$$

которая эквивалентна (2.3).

Теорема доказана. □

Следующий критерий непосредственно вытекает из теорем 2.1, 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть $C = C^* > 0$. Спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_i$ тогда и только тогда, когда уравнение (2.1) имеет эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$.*

§3. Формулы решения уравнения (2.1)

В этом параграфе мы получим аналог формул Ляпунова для решения уравнения (2.1) при условии, что спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_i$.

Пусть правая часть уравнения (2.1) является единичной матрицей, т. е. $C = I$. В предыдущем параграфе мы уже показали однозначную разрешимость уравнения, при этом решение является эрмитовым положительно определенным и в силу формулы (2.2) его можно представить в виде

$$H = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_A} \int\limits_{\gamma_{A^*}} \frac{1}{\mu + \lambda - \frac{1}{2p}\lambda\mu + \frac{1}{4p}(\mu^2 + \lambda^2)}$$

$$\times(\lambda I - A^*)^{-1}(\mu I - A)^{-1} d\lambda\, d\mu. \qquad (3.1)$$

Однако при решении конкретных задач пользоваться этой формулой не удобно. Поэтому мы сейчас получим более простую формулу, которую можно использовать и при численных расчетах.

Пусть μ — произвольное собственное значение матрицы A и v — соответствующий собственный вектор. Учитывая (2.4), имеем равенство

$$2\left(\operatorname{Re}\mu - \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\mu)^2\right)\langle Hv, v\rangle = \langle v, v\rangle$$

или

$$\langle Hv, v\rangle = \frac{1}{2\left(\operatorname{Re}\mu - \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\mu)^2\right)}\langle v, v\rangle. \qquad (3.2)$$

Поскольку $\mu \in \mathcal{P}_i$, то имеем

$$0 < \frac{(\operatorname{Im}\mu)^2}{2p\operatorname{Re}\mu} < 1.$$

Поэтому (3.2) можно переписать в виде

$$\langle Hv, v\rangle = \frac{1}{2\operatorname{Re}\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(\operatorname{Im}\mu)^2}{2p\operatorname{Re}\mu}\right)^k \langle v, v\rangle$$

или

$$\langle Hv, v\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4p}\right)^k \frac{(\mu - \overline{\mu})^{2k}}{(\mu + \overline{\mu})^{k+1}}\langle v, v\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} J_k. \qquad (3.3)$$

Преобразуем каждое слагаемое J_k, $k = 0, 1, \ldots$. Поскольку $\operatorname{Re}\mu > 0$, то при $k = 0$ получим

$$J_0 = \frac{1}{(\mu + \overline{\mu})}\langle v, v\rangle = \int\limits_0^{\infty} e^{-(\mu+\overline{\mu})t} dt \langle v, v\rangle$$

$$= \int\limits_0^\infty \langle e^{-tA}v, e^{-tA}v\rangle dt = \langle \left(\int\limits_0^\infty e^{-tA^*}e^{-tA}dt \right) v, v\rangle.$$

При $k = 1$, очевидно, имеем

$$J_1 = -\frac{1}{4p}\frac{(\mu-\overline{\mu})^2}{(\mu+\overline{\mu})^2}\langle v, v\rangle = -\frac{1}{4p}\frac{(\mu-\overline{\mu})}{(\mu+\overline{\mu})^2}\left(\langle Av, v\rangle - \langle v, Av\rangle\right)$$

$$= -\frac{1}{4p}\frac{1}{(\mu+\overline{\mu})^2}\left(\langle A^2v, v\rangle - 2\langle Av, Av\rangle + \langle v, A^2v\rangle\right),$$

и как в случае $k = 0$, получим

$$J_1 = -\frac{1}{4p}\frac{1}{(\mu+\overline{\mu})}\int\limits_0^\infty e^{-(\mu+\overline{\mu})t_0}dt_0\left(\langle A^2v, v\rangle - 2\langle Av, Av\rangle + \langle v, A^2v\rangle\right)$$

$$= -\frac{1}{4p}\frac{1}{(\mu+\overline{\mu})}\Bigg(\int\limits_0^\infty \langle A^2e^{-t_0A}v, e^{-t_0A}v\rangle dt_0 - 2\int\limits_0^\infty \langle Ae^{-t_0A}v, Ae^{-t_0A}v\rangle dt_0$$

$$+ \int\limits_0^\infty \langle e^{-t_0A}v, A^2e^{-t_0A}v\rangle dt_0\Bigg).$$

Повторяя аналогичные преобразования, будем иметь

$$J_1 = -\frac{1}{4p}\Bigg(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \langle A^2e^{-(t_1+t_0)A}v, e^{-(t_1+t_0)A}v\rangle dt_0dt_1$$

$$-2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \langle Ae^{-(t_1+t_0)A}v, Ae^{-(t_1+t_0)A}v\rangle dt_0dt_1$$

$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \langle e^{-(t_1+t_0)A}v, A^2e^{-(t_1+t_0)A}v\rangle dt_0dt_1\Bigg).$$

Следовательно, это слагаемое можно записать в виде

$$J_1 = \langle\Bigg(-\frac{1}{4p}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(t_1+t_0)A^*}(A^2 + 2(-A^*)A + (-A^*)^2)e^{-(t_1+t_0)A}dt_0dt_1\Bigg)v, v\rangle.$$

Преобразуя по этой схеме каждое слагаемое J_k, $k \geq 2$, (3.3) можно переписать следующим образом

$$\langle Hv, v\rangle = \langle \Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4p}\right)^k \int\limits_0^{\infty} \dots \int\limits_0^{\infty} e^{-(t_k+\ldots+t_0)A^*}$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j (-A^*)^{2k-j} A^j \right) e^{-(t_k+\ldots+t_0)A} dt_0 \dots dt_k \Bigg) v, v\rangle. \tag{3.4}$$

Для каждого $k \geq 0$ введем обозначение

$$H_k = \left(\frac{-1}{4p}\right)^k \int\limits_0^{\infty} \dots \int\limits_0^{\infty} e^{-(t_k+\ldots+t_0)A^*} \left(\sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j (-A^*)^{2k-j} A^j \right) e^{-(t_k+\ldots+t_0)A} dt_0 \dots dt_k.$$

Тогда равенство (3.4) можно переписать в виде

$$\langle \left(H - \sum_{k=0}^{\infty} H_k \right) v, v\rangle = 0.$$

Поэтому, если все собственные значения $\mu_l \in \mathcal{P}_i$ различные, то для соответствующих им собственным векторам v_l имеем n равенств

$$\langle \left(H - \sum_{k=0}^{\infty} H_k \right) v_l, v_l\rangle = 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

А из того, что $H = H^*$, $H_k = H_k^*$ отсюда следует, что эрмитова матрица

$$H - \sum_{k=0}^{\infty} H_k$$

является нулевой. Следовательно, формула решения (3.1) может быть переписана в виде

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4p}\right)^k \int\limits_0^{\infty} \dots \int\limits_0^{\infty} e^{-(t_k+\ldots+t_0)A^*}$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j (-A^*)^{2k-j} A^j \right) e^{-(t_k+\ldots+t_0)A} dt_0 \dots dt_k. \tag{3.5}$$

Отметим, что произвольную матрицу можно аппроксимировать сколь угодно точно матрицами, имеющими различные собственные значения. Поэтому формула (3.5) справедлива и в общем случае.

Формула (3.5) является аналогом формулы (1.6). Как и в работе [7], эту формулу можно использовать при разработке алгоритма для проведения численных исследований.

§4. Дихотомия матричного спектра относительно параболы

В этом параграфе мы будем рассматривать задачу о дихотомии матричного спектра относительно параболы h.

Вначале мы рассмотрим задачу о принадлежности матричного спектра $\sigma(A)$ области

$$\mathcal{P}_e = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\lambda)^2 > \operatorname{Re}\lambda \right\}, \quad p > 0.$$

Выпишем матричное уравнение (2.1) с измененной правой частью

$$HA + A^*H - \frac{1}{2p}A^*HA + \frac{1}{4p}(HA^2 + (A^*)^2H) = -C. \qquad (4.1)$$

Теорема 4.1. *Пусть спектр матрицы A лежит вне замыкания области $\mathcal{P}_i$. Тогда для любой матрицы C уравнение (4.1) имеет единственное решение H, при этом, если $C = C^*$, то $H = H^*$, а если $C = C^* > 0$, то $H = H^* > 0$.*

Доказательство. Поскольку все собственные значения μ_j матрицы A лежат в области $\mathcal{P}_e$, то, как при доказательстве теоремы 2.1, имеем

$$\operatorname{Re} P(\lambda_s, \mu_r) \neq 0, \quad \lambda_s \in \sigma(A^*), \quad \mu_r \in \sigma(A), \quad s, r = 1, \dots, n.$$

Следовательно, условия теоремы Крейна выполнены, поэтому уравнение (4.1) однозначно разрешимо при любой правой части C, при этом решение можно представить в интегральном виде, и формула решения будет отличаться от (2.2) только знаком и выбором контуров интегрирования. Поэтому, если правая часть уравнения эрмитова матрица, то решение будет также эрмитовым. Нетрудно показать, что при $C = C^* > 0$ имеет место $H = H^* > 0$.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $C = C^* > 0$. Предположим, что уравнение (4.1) имеет эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$. Тогда* *спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{P}_e$ и*

$$\frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\mu_k)^2 \geq \operatorname{Re}\mu_k + \frac{1}{2\|C^{-1}\|\|H\|}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть μ_k — произвольное собственное значение матрицы A и v_k — единичный собственный вектор. Повторяя рассуждения, как при выводе (2.4), из (4.1) получим

$$-\langle Cv_k, v_k\rangle = 2\left(\operatorname{Re}\mu_k - \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\mu_k)^2\right)\langle Hv_k, v_k\rangle. \tag{4.3}$$

Тогда из условий $C = C^* > 0$, $H = H^* > 0$ следует, что μ_k принадлежит области $\mathcal{P}_e$. Более того, из (4.3) следует, что для любого собственного значения справедливо неравенство

$$2\left(\frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\mu_k)^2 - \operatorname{Re}\mu_k\right)\|H\| \geq \frac{1}{\|C^{-1}\|},$$

которое эквивалентно (4.2).

Теорема доказана. □

Из теорем 4.1, 4.2 вытекает следующий критерий.

Теорема 4.3. *Все собственные значения матрицы A принадлежат области*

$$\mathcal{P}_e = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\lambda)^2 > \operatorname{Re}\lambda\right\}, \quad p > 0,$$

тогда и только тогда, когда матричное уравнение (4.1) при $C = C^* > 0$ имеет эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$.

Рассмотрим теперь матричное уравнение вида (2.1) со специальной правой частью

$$HA + A^*H - \frac{1}{2p}A^*HA + \frac{1}{4p}(HA^2 + (A^*)^2H) = P^*CP - (I-P)^*C(I-P). \tag{4.4}$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 4.4. *Пусть P — проектор на инвариантное подпространство относительно A, при этом коммутирующий с A. Если для матрицы $C = C^* > 0$ существует эрмитово положительно определенное решение $H = H^* > 0$ уравнения (4.4) такое, что*

$$H = P^*HP - (I-P)^*H(I-P), \tag{4.5}$$

то матричный спектр $\sigma(A)$ не пересекается с параболой h. Более того, P — проектор на максимальное инвариантное подпространство относительно матрицы A, соответствующее собственнным значениям, принадлежащим области $\mathcal{P}_i$.

Доказательство. Поскольку $AP = PA$, то $(I - P)$ также является проектором на инвариантное подпространство относительно матрицы A. Поэтому существует невырожденная матрица T такая, что

$$A = T \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} T^{-1}$$

и

$$P = T \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \quad I = T \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

В силу (4.5) имеем

$$H = (T^*)^{-1} \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^* H T \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$+ (T^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{22} \end{pmatrix} T^* H T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{22} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Следовательно, матрица

$$\hat{H} = T^* H T = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом (4.4) может быть переписано в виде

$$\hat{H}\hat{A} + \hat{A}^*\hat{H} - \frac{1}{2p}\hat{A}^*\hat{H}\hat{A} + \frac{1}{4p}(\hat{H}\hat{A}^2 + (\hat{A}^*)^2\hat{H}) = \hat{P}^*\hat{C}\hat{P} - (I - \hat{P})^*\hat{C}(I - \hat{P}),$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = T^* C T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$\hat{P}^*\hat{C}\hat{P} - (I - \hat{P})^*\hat{C}(I - \hat{P}) = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix},$$

поэтому (4.4) эквивалентно системам уравнений

$$H_{11}A_{11} + A_{11}^* H_{11} - \frac{1}{2p} A_{11}^* H_{11} A_{11} + \frac{1}{4p}(H_{11}A_{11}^2 + (A_{11}^*)^2 H_{11}) = C_{11},$$

$$H_{22}A_{22} + A_{22}^* H_{22} - \frac{1}{2p} A_{22}^* H_{22} A_{22} + \frac{1}{4p}(H_{22}A_{22}^2 + (A_{22}^*)^2 H_{22}) = -C_{22}.$$

Учитывая $H = H^* > 0$, $C = C^* > 0$, мы также имеем

$$H_{11} = H_{11}^* > 0, \quad H_{22} = H_{22}^* > 0, \quad C_{11} = C_{11}^* > 0, \quad C_{22} = C_{22}^* > 0.$$

Следовательно, в силу теорем 2.2 и 4.2 собственные значения матрицы A_{11} принадлежат области $\mathcal{P}_i$, а собственные значения матрицы A_{22} принадлежат $\mathcal{P}_e$. Очевидно также, что P является проектором на максимальное инвариантное подпространство относительно матрицы A, соответствующее собственным значениям, принадлежащим $\mathcal{P}_i$.

Теорема доказана. □

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда все собственные значения матрицы A принадлежат множеству*

$$\left\{\lambda \in \mathcal{P}_i : \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\lambda)^2 \le \operatorname{Re}\lambda - \frac{1}{2\|C^{-1}\|\|H\|}\right\}$$

$$\cup \left\{\lambda \in \mathcal{P}_e : \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\lambda)^2 \ge \operatorname{Re}\lambda + \frac{1}{2\|C^{-1}\|\|H\|}\right\}.$$

Список литературы

1. *Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры.* Новосибирск: Научная книга, 1997.

2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

3. *Мазко А.Г. Локализация спектра и устойчивость динамических систем.* Труды Института математики НАН Украины. Т. 28. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999.

4. *Biberdorf E.A., Blinova M.A., Popova N.I.* Modifications of the dichotomy method of a matrix spectrum and their application to stability tasks // *Numer. Anal. Appl.* 2018. V. 11, № 2. P. 108–120.

5. *Biberdorf E.A.* Development of the matrix spectrum dichotomy method. In.: *Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy – A Liber Amicorum to Professor Godunov* (eds.: Demidenko G.V., Romenski E., Toro E., Dumbser M.). Cham: Springer Nature, 2020. P. 37–43.

6. *Bulgak A., Bulgak H. Linear algebra.* Konya: Selcuk University, 2001.

7. *Bulgak A., Demidenko G., Matveeva I.* On location of the matrix spectrum inside an ellipse // *Selcuk J. Appl. Math.* 2003. V. 4, № 1. P. 25–41.

8. *Demidenko G.* On a functional approach to spectral problems of linear algebra. *Selcuk J. Appl. Math.* // 2001. V. 2, № 2. P. 39–52.

9. *Mazko A.G. Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems.* Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2008.

10. *Sadkane M., Touhami A.* On modifications to the spectral dichotomy algorithm // *Numer. Funct. Anal. Optim.* 2013. V. 34, № 7. P. 791–817.

11. *Traore S., Dosso M.* Spectral dichotomy methods of a matrix with respect to the general equation of the parabola. *Eur. J. Pure Appl. Math.* 2022. V. 15, № 2. P. 681–725.

12. *Trefethen L.N.* Computation of pseudospectra // *Acta Numer.* 1999. V. 8. P. 247–295.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики
им. С.Л.Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `demidenk@math.nsc.ru`

Прохоров Владислав Сергеевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `v.prokhorov@g.nsu.ru`

Поступила в редакцию
26 мая 2023 г.
Получена после доработки
14 июня 2023 г.
Принята к публикации
16 июня 2023 г.