УДК 510.5 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.104 2023, том 26, № 1, 47-92

НЕГАТИВНЫЕ НУМЕРАЦИИ В ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВАХ, I

И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко, М. Х. Файзрахманов

В работе строятся примеры допустимых множеств $\mathbb{A}$, в которых семейство всех $\mathbb{A}$-в.п. множеств имеет негативную вычислимую $\mathbb{A}$-нумерацию, но не имеет позитивных вычислимых $\mathbb{A}$-нумераций. Обсуждается также вопрос существования минимальных $\mathbb{A}$-нумераций среди негативных.

Ключевые слова и фразы: нумерация, разрешимая нумерация, позитивная нумерация, негативная нумерация, вычислимая нумерация, вычислимое множество, вычислимо перечислимое множество, допустимое множество.

Введение

Одним из классических результатов теории вычислимости является теорема Фридберга [1] о существовании вычислимой нумерации без повторений семейства всех вычислимо перечислимых (в.п.) множеств. Такие нумерации называются *однозначными* или, принимая во внимание процитированный результат, *фридберговыми* и примечательны тем, что они образуют минимальные элементы относительно сводимости в классе всех нумераций рассматриваемого множества. В настоящей статье вместо семейства всех в.п. множеств рассматриваются семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ всех Σ-подмножеств допустимых множеств $\mathbb{A}$ (или, что то же самое, $\mathbb{A}$-в.п. подмножеств). Как следует из результатов работы [2], теорему Фридберга невозможно перенести на семейства вида $\Sigma(\mathbb{A})$; более того, в [2, 3] построен пример допустимого множества $\mathbb{A}$ такого, что семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ не имеет однозначных и даже позитивных вычислимых $\mathbb{A}$-нумераций. В [2] найдено допустимое множество $\mathbb{A}$ любой наперёд заданной бесконечной мощности, семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ которого обладает однозначными вычислимыми; разрешимыми вычислимыми, но не обладает однозначными вычислимыми $\mathbb{A}$-нумерациями (см. также [4]). В [4] найдены семейства вида $\Sigma(\mathbb{A})$, имеющие позитивные вычислимые $\mathbb{A}$-нумерации, но не имеющие негативных вычислимых $\mathbb{A}$-нумераций. В настоящей статье описанная картина дополняется построением допустимого множества $\mathbb{A}$ любой наперёд заданной бесконечной мощности, у которого семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ обладает негативными вычислимыми, но не обладает позитивными вычислимыми $\mathbb{A}$-нумерациями. При этом доказательство основного результата настоящей статьи не сводится к замене всех понятий и утверждений на двойственные из доказательства процитированного результата работы [4].

Работа первого автора поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 18-11-00028), работа третьего автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393)

Пусть здесь и далее $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ — семейство всех арифметических подмножеств натуральных чисел.

Определение 1. Определим $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ как модель сигнатуры $\sigma_0 \leftrightharpoons \{\mathrm{s}^2, \mathrm{S}^1, \mathrm{R}^2\}$ следующим образом:
• основным множеством служит $\omega \uplus \biguplus\{P_A \mid A \in \mathcal{S}\}$, причём множество P_A бесконечно для каждого $A \in \mathcal{S}$;
• s интерпретируется как график функции $\lambda x.(x \mathbin{\dot{-}} 1)$ на ω (а именно, $\mathrm{s}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}} \leftrightharpoons \{\langle n+1, n\rangle \mid n \in \omega\} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$; данное условие обеспечивает наличие структуры натуральных чисел в $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$);
• S интерпретируется как множество кодов элементов семейства $\mathcal{S}$, а R — как отношение принадлежности натуральных чисел множествам семейства $\mathcal{S}$, которые кодируют соответствующие элементы (а именно, $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}} \leftrightharpoons \biguplus\{P_A \mid A \in \mathcal{S}\}$ и $\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}} \leftrightharpoons \{\langle x, n\rangle \mid x \in P_A$ и $n \in A$ для некоторого $A \in \mathcal{S}\}$; отношение $\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}$ и множество $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}$ позволяют в структуре $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ закодировать все множества семейства $\mathcal{S}$, при этом каждое такое множество будет иметь бесконечно много кодов). $\diamond$

Часто будем записывать просто S вместо интерпретации $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}$.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ — класс всех арифметических подмножеств натуральных чисел. Тогда семейство $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$ имеет негативную вычислимую $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерацию, но не имеет позитивных вычислимых $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумераций.*

Ввиду большого объёма, а также большого количества технических деталей и методов, статья разбита на две части. В § 1 даются предварительные сведения, необходимые для доказательства основного результата. В §§ 2, 3 приводятся соответственно отрицательное и положительное условия вышеупомянутой теоремы. В § 4 обсуждается вопрос о существовании минимальных нумераций среди негативных в допустимых множествах. Попутно в нём строится бесконечно убывающая относительно сводимости цепь негативных вычислимых $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумераций семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$. В § 5 предлагаются некоторые обобщения основных результатов настоящей статьи, а также открытые вопросы. Вторая часть содержит доказательства утверждений из § 3, касающихся автоморфизмов и представлений Σ-множеств $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ с помощью натуральных чисел, имеющих свойства, близкие к единственности.

§1. Предварительные сведения.

Основные сведения из теории нумераций можно найти в [5], из теории допустимых множеств, в том числе и $\mathbb{HF}$-вычислимости — в [6, 7, 8], из классической вычислимости — в [9], а из теории конструктивных моделей — в [10, 11]. Дополнительная информация о нумерациях на допустимых множествах содержится в [12, 13].

Символом $\leftrightharpoons$ будем обозначать равенство по определению. Конец доказательства будем обозначать символом $\square$, а конец определения, соглашения или замечания — символом $\diamond$. Односортные структуры будем обозначать готическими символами (возможно, с индексами), а допустимые структуры, которые могут быть рассмотрены как двухсортные модели, — специальными символами, — о чём будет сказано ниже. Если $\mathfrak{M}$ — структура произвольной природы, то зачастую будем записывать $\mathfrak{M}$ вместо основного множества данной структуры. Сигнатурное отношение равенства будем обозначать как $\approx$. Через ω будем обозначать множество натуральных чисел.

Пусть $A, B \subseteq \omega$; под записью $A \leqslant_{CE} B$ будем понимать обстоятельство, что A в. п. относительно B. Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ подмножеств натуральных чисел называется *(B-)вычислимой*, если бинарное отношение $\{\langle m, n\rangle \mid m \in A_n,\ n \in \omega\}$ в. п. относительно B.

Пусть далее X — множество произвольной природы. Через $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать множество всех подмножеств множества X, а через $\mathcal{P}_\omega(X)$ — множество всех его конечных подмножеств. Через $|X|$ будем обозначать мощность множества X.

Пусть также f — функция произвольной природы; тогда через δf и ρf будем обозначать области соответственно задания и значений функции f. Как обычно, через $f \upharpoonright X$ будем обозначать функцию h (называемую *сужением* функции f на X), для которой выполняются соотношения $\delta h = X \cap \delta f$ и $h(x) = f(x)$ для всех $x \in \delta h$. Пусть, к тому же, g также является функцией; будем говорить, что *g продолжает f* или *f продолжается до g* (будем использовать соответственно записи $g \trianglerighteq f$ или $f \trianglelefteq g$), если эти функции удовлетворяют соотношениям $\delta f \subseteq \delta g$ и $f = g \upharpoonright \delta f$. Как обычно, через $f \circ g$ будем обозначать композицию данных функций (аргументы функций, как и выше, будут располагаться справа); если, к тому же, f является биекцией, то через f^{-1} будем обозначать функцию, обратную к f.

Под *кортежем* или *набором* элементов из X будем понимать $\overrightarrow{x} \leftrightharpoons \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \in X^n$, где $n \in \omega$ (заметим, что X^0 состоит только из пустого кортежа, который будем обозначать как λ). Если $n \in \omega$ таково, что $\overrightarrow{x} \in X^n$, то положим $\mathrm{lh}(\overrightarrow{x}) \leftrightharpoons n$ (например, $\mathrm{lh}(\lambda) = 0$ и $\mathrm{lh}(x) = 1$, где $x \in X$). Под *конкатенацией* кортежей $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$ будем понимать приписывание слева набора $\overrightarrow{a}$ к набору $\overrightarrow{c}$ и обозначать как $\overrightarrow{a}\hat{\ }\overrightarrow{c}$. Нетрудно видеть, что значения lh длины и операции конкатенации в общем случае зависят от выбора множества X (для этого следует рассмотреть, к примеру, множество, замкнутое относительно взятия упорядоченных пар). Всюду в рассмотрениях ниже такие разночтения будут отсутствовать.

Пусть далее $n \in \omega$ таково, что $|X| \geqslant n$; тогда через $X^n_{\neq}$ будем обозначать множество всех кортежей длины n попарно различных элементов из X. Удобно считать, что $X^n_{\neq} = \varnothing$ при условии, что $|X| < n$.

Через $f(\overrightarrow{x})$ будем обозначать набор $\langle f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})\rangle$, где $\overrightarrow{x} = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ — кортеж элементов области задания функции f, действующей в элементы произвольной природы ($n \in \omega$).

Введём обозначения для канторовских представлений кортежей натуральных чисел. Сначала зафиксируем вычислимую функцию $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, осуществляющую биективное соответствие между парами натуральных чисел и натуральными числами. Будем считать, что эта функция монотонна по каждой координате. Через $\langle\!\langle \cdot, \ldots, \cdot \rangle\!\rangle$ будем обозначать канторовскую нумерующую функцию, сопоставляющую кортежи натуральных чисел, имеющие наперёд заданную длину, натуральным числам. Индукцией по длине кортежа определим эту функцию следующим образом: $\langle\!\langle n_0 \rangle\!\rangle \leftrightharpoons n_0$, $\langle\!\langle n_0, n_1, \ldots, n_k \rangle\!\rangle \leftrightharpoons \langle\!\langle n_0, \langle\!\langle n_1, \ldots, n_k \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle$ ($k, n_0, n_1, \ldots, n_k \in \omega$; $k \geqslant 1$).

Пусть M — множество; тогда $HF_0(M) \leftrightharpoons \varnothing$,

$$HF_{n+1}(M) \leftrightharpoons \mathcal{P}_\omega(HF_n(M) \cup M),\ HF(M) \leftrightharpoons \bigcup_{n\in\omega} HF_n(M).$$

Множество a называется *наследственно конечным* над M, если $a \in HF(M)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель чисто предикатной сигнатуры σ, заданная на множестве M. В этом случае на $HF(M) \cup M$ можно задать модель $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ сигнатуры $\sigma^* \leftrightharpoons \sigma \uplus \{\mathrm{U}^1, \in^2, \varnothing\}$ (называемую *наследственно конечной надстройкой над* $\mathfrak{M}$) так, что сигнатурные символы из σ будут интерпретироваться так же, как и на $\mathfrak{M}$, символы $\varnothing$ и $\in$ — как пустое множество и отношение принадлежности соответственно ($\in^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} \subseteq (HF(M) \cup M) \times HF(M)$), а U будет интерпретироваться как множество M, элементы которого будут называться *праэлементами* и не будут иметь никакой теоретико-множественной структуры, в отличие от остальных элементов, носящих название "*множества*". Здесь ограничимся случаем, когда σ будет конечной сигнатурой. Наследственно конечные надстройки будут служить ключевыми объектами исследований в настоящей работе. И в дальнейшем под допустимыми множествами будем подразумевать, если не оговорено особо, именно представителей данного класса.

Под $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-*вычислимыми* и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-*вычислимо перечислимыми* (сокращённо, $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-*в.* и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-*в.п.*) отношениями будем понимать соответственно Δ- и Σ-предикаты на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Семейства всех $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-в. и всех $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-в.п. множеств (т. е. унарных отношений) будем обозначать как $\Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ и $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ соответственно. В следующих абзацах, касающихся наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над моделью $\mathfrak{M}$, все классы формул будут рассматриваться в сигнатуре σ^*. Δ_0-*Формулы* образуют наименьший класс, содержащий атомарные формулы и замкнутый относительно логических связок $\neg$, $\to$, $\wedge$, $\vee$, а также ограниченнной квантификации ($\forall y \in x$ и $\exists y \in x$). Σ-*Формулы* образуют наименьший класс, содержащий Δ_0-формулы и замкнутый относительно логических связок $\wedge$, $\vee$, ограниченнной квантификации, а также квантора существования ($\exists x$). Π-*формулы* получаются из Σ-формул заменой каждого неограниченного квантора существования на неограниченный квантор всеобщности ($\forall x$). Σ-*Предикатами* называются отношения, определимые Σ-формулами (возможно, с параметрами). Π-*Предикаты* — это отношения, определимые Π-формулами (возможно, с параметрами). Отметим, что Π-предикаты могут быть заданы, как дополнения Σ-предикатов. Δ-*Предикаты* — это Σ- и Π-предикаты одновременно. Как обычно, будем говорить, что множество $D \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *определимо* формулой $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ с набором $\overrightarrow{s}$ параметров из $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, если имеет место равенство $D = \{a | \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(a, \overrightarrow{s})\}$.

Через $\mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ будем обозначать множество всех ординалов данной наследственно конечной надстройки, которое будет использоваться в конструкциях в настоящей статье, как совокупность натуральных чисел. Данное множество является $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$-вычислимым. Через sp и rnk будем обозначать одноместные Σ-операции *носителя* ($\mathrm{sp}(x) = \{u \in \mathrm{TC}(\{x\}) \mid \mathrm{U}(u)\}$) и *ранга* ($\mathrm{rnk}(u) = \varnothing$ для праэлемента u, $\mathrm{rnk}(a) = \sup\{\mathrm{rnk}(x) + 1 \mid x \in a\}$) соответственно. В рассматриваемой структуре носитель и ранг “множества” a будут играть роли его ширины и высоты соответственно. Здесь $\mathrm{TC}(a)$ — *транзитивное замыкание* “множества” a (см. I.6 [7]).

Перейдём теперь к заданию подстановок на термах, кортежах и формулах. Пусть кортежи $\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{r}^0$, $\overrightarrow{r}^1$ элементов произвольной природы таковы, что $\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^0) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^1)$ и $\mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$. Под результатом *подстановки* $[\overrightarrow{s}]^{\overrightarrow{r}^0}_{\overrightarrow{r}^1}$ *в кортеже* $\overrightarrow{s}$ *набора* $\overrightarrow{r}^1$ *вместо* $\overrightarrow{r}^0$ будем понимать набор $\langle f(s_0), f(s_1), \ldots, f(s_{n-1})\rangle$, где кортеж $\overrightarrow{s} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle$ и функция f таковы, что будут выполняться равенства $f(s) = s$ и $f(r^0_i) = r^1_i$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0)$ и $i \in \omega$, $0 \leqslant i < \mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^0)$ (здесь $\overrightarrow{r}^k = \langle r^k_i | i \in \omega,\ i < \mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^k)\rangle$, $k = 0, 1$). Пусть теперь q, t_1, t_2 — термы, θ — формула и u — переменная. Тогда соответствующие *подстановки на формулах и термах* будем записывать как $[\theta]^u_{t_1}$, $[q]^u_{t_1}$, $[\theta]^{t_1}_{t_2}$ и $[q]^{t_1}_{t_2}$, в которых любое свободное вхождение переменной или терма сверху заменяется на терм, стоящий снизу. Естественным образом данные понятия обобщаются на подстановки формул и термов от нескольких переменных или термов.

Как и в [8, 12], Σ-предикаты будем задавать так называемыми вычислимыми дизъюнкциями.

Определение 2. Сначала зададим *последовательность* $\{t_k\}_{k \in \omega}$ *термов* сигнатуры $\{\varnothing, \cup^2, \{\cdot\}^1\}$ и связанную с ней сильно вычислимую (в классическом понимании) *последовательность* $\{\mathfrak{S}_k\}_{k \in \omega}$ *групп перестановок* следующим набором свойств (под местностью терма t_k будем понимать его *реальную* местность, т. е. фактическое количество переменных, участвующих в построении данного терма, которое будем в дальнейшем обозначать как n_k ($k \in \omega$)):

(T1): если $k \in \omega$ и $\overrightarrow{m} \in \mathfrak{M}^{n_k}$, то будет справедливым условие $t_k(\overrightarrow{m}) \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$;
(T2): каков бы ни был элемент $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, найдутся набор $\overrightarrow{m} \in \mathfrak{M}^{n_k}_{\neq}$, причём $\mathrm{sp}(a) = \mathrm{sp}(\overrightarrow{m})$, а также число $k \in \omega$, для которых будет выполняться соотношение $a = t_k(\overrightarrow{m})$;
(T3): для каждого $k \in \omega$ группа $\mathfrak{S}_k$ будет содержать только перестановки множества $\{l \in \omega : l < n_k\}$, отождествляемые с перестановками множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{m})$ так:

$$\pi(\langle m_0, m_1, \ldots, m_{n_k-1}\rangle) \leftrightharpoons \langle m_{\pi(0)}, m_{\pi(1)}, \ldots, m_{\pi(n_k-1)}\rangle,$$

где $\overrightarrow{m} = \langle m_0, m_1, \ldots, m_{n_k-1}\rangle \in \mathfrak{M}^{n_k}_{\neq}$, как и в (**T2**), а $\pi \in \mathfrak{S}_k$;
(T4): будем считать, что данное представление праэлементов и “множеств” наследственно конечных надстроек является почти однозначным, а именно, будет выполняться следующее для всех $k_0, k_1 \in \omega$ и $\overrightarrow{m}^0 \in \mathfrak{M}^{n_{k_0}}_{\neq}$, $\overrightarrow{m}^1 \in \mathfrak{M}^{n_{k_1}}_{\neq}$:
• если $t_{k_0}(\overrightarrow{m}^0) = t_{k_1}(\overrightarrow{m}^1)$, то $k_0 = k_1$;
• $t_{k_0}(\overrightarrow{m}^0) = t_{k_0}(\overrightarrow{m}^1)$, если и только если $\overrightarrow{m}^0 = \pi(\overrightarrow{m}^1)$ для некоторой перестановки $\pi \in \mathfrak{S}_{k_0}$ (отметим, что группа $\mathfrak{S}_{k_0}$ этим соотношением и условием (**T3**) задаётся однозначно);
(T5): последовательность $\{t_p\}_{p\in\omega}$ термов *сильно вычислима* в том смысле, что по каждой паре, состоящей из $p \in \omega$ и из кортежа $\overrightarrow{u} = \langle u_i | i \in \omega,\ i < n_p\rangle$ переменных, можно найти и притом эффективно конечное множество F_p пар вида $\langle k, \overrightarrow{u}'\rangle$ (здесь $k \in \omega$, а кортеж $\overrightarrow{u}'$ будет иметь длину n_k, образовывать который будут некоторые попарно различные переменные, участвующие в построении кортежа $\overrightarrow{u}$), удовлетворяющее равенству $t_p(\overrightarrow{m}) = [\{t_k(\overrightarrow{u}') | \langle k, \overrightarrow{u}'\rangle \in F_p\}]^{\overrightarrow{u}}_{\overrightarrow{m}}$ для любого кортежа $\overrightarrow{m} \in \mathfrak{M}^{n_p}_{\neq}$ (нетрудно, индукцией по $k < p$, построить терм сигнатуры $\{\{\cdot\}, \cup, \varnothing\}$, соответствующий правой части равенства). $\diamond$

Тем самым, конечное множество F_p будет задаваться сильным индексом в классическом понимании. Будем также считать, что $t_1(m) = m (\in \mathfrak{M})$, $t_0(\lambda) = \varnothing$ и, в этих случаях, $F_0 = F_1 = \varnothing$.

С помощью Σ-рекурсии (§ 2.5 [6]) доказывается, что соответствие

$$\langle k, \overrightarrow{m}\rangle (\in \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})) \times \mathfrak{M}^{n_k}_{\neq}) \mapsto t_k(\overrightarrow{m}),$$

является Σ-функцией, причём определяющая её график Σ-формула сигнатуры $\{\mathrm{U}, \in, \varnothing\}$ может быть задана без параметров и не будет зависеть от выбора $\mathfrak{M}$.

Так как любой элемент наследственно конечной надстройки над моделью $\mathfrak{M}$ задаётся подходящими натуральным числом, определяющим номер терма, и набором праэлементов, будем считать, что параметрами любой наперёд заданной Σ-формулы сигнатуры σ^* на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ служат праэлементы.

В дальнейшем через u_0, u_1, …, u_n, … будем обозначать *основные* переменные, принимающие в качестве значений элементы структуры, лежащей в основании наследственно конечной надстройки, а через v_0, v_1, …, v_n, … — *дополнительные* переменные, которые в качестве значений принимают параметры, также являющиеся праэлементами. Будем предполагать, что как основные, так и дополнительные переменные эффективно занумерованы натуральными числами (например, числами $\langle\!\langle 0, n\rangle\!\rangle$ для u_n и $\langle\!\langle 1, n\rangle\!\rangle$ для v_n, где $n \in \omega$) в гёделевой нумерации. Всегда будем считать, что как основные, так и дополнительные переменные, входящие в формулу, нумеруются начальными сегментами натурального ряда (а в выбранной гёделевой нумерации — начальными сегментами по второй координате).

Будем также предполагать, что формулы отождествляются с их номерами в заранее выбранной гёделевой нумерации. Тем самым, будет справедливым следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует вычислимая последовательность $\{A_n^\Phi\}_{n,\Phi\in\omega}$ множеств, состоящих из $\exists$-формул сигнатуры σ, удовлетворяющая следующему условию: если $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ и $\Phi(x_0, v_0, v_1 \dots, v_{k-1})$ — Σ-формула сигнатуры σ^*, то имеет место равенство*

$$\begin{gathered}\{a \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(a, s_0, s_1, \dots, s_{k-1})\} = \{t_l(m_0, m_1, \dots, m_{n_l-1})| \\ l \in \omega,\ \langle m_0, m_1, \dots, m_{n_l-1}\rangle \in \mathfrak{M}^{n_l},\ \mathfrak{M} \models \varphi(m_0, m_1, \dots, m_{n_l-1}, s_0, s_1, \dots, s_{k-1}) \\ \text{для некоторой } \exists\text{-формулы } \varphi(u_0, u_1, \dots, u_{n_l-1}, v_0, v_1, \dots, v_{k-1}) \in A_l^\Phi\},\end{gathered}$$

для любых элементов s_0, s_1, …, s_{k-1} из $\mathfrak{M}$ ($k \in \omega$).

Имеет место и обратное, в некотором смысле, утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\{A_n\}_{n\in\omega}$ — вычислимая последовательность множеств, состоящих из $\exists$-формул сигнатуры σ. Тогда*

$$\begin{gathered}D \leftrightharpoons \{t_l(\overrightarrow{m})|l \in \omega,\ \overrightarrow{m} \in \mathfrak{M}^{n_l},\ \mathfrak{M} \models \varphi(\overrightarrow{m}, s_0, s_1, \dots, s_{k-1}) \\ \text{для некоторой } \varphi(u_0, u_1, \dots, u_{n_l-1}, v_0, v_1, \dots, v_{k-1}) \in A_l\}\end{gathered} \tag{1}$$

будет Σ-подмножеством $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, для любых модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и элементов s_0, s_1, …, s_{k-1} из $\mathfrak{M}$. Более того, номер Σ-формулы с параметрами s_0, s_1, …, s_{k-1} из $\mathfrak{M}$, определяющей множество D, эффективно находится по вычислимой последовательности $\{A_n\}_{n\in\omega}$ и не зависит от выбора модели $\mathfrak{M}$ ($k \in \omega$).

Пусть $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ — формула сигнатуры σ от наборов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ основных и дополнительных переменных соответственно и пусть π — перестановка множества $\{l \in \omega : l < \mathrm{lh}(\overrightarrow{u})\}$; тогда через φ^π обозначим формулу $\varphi(\pi(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v})$. Отметим, что кванторные и некоторые другие формульные характеристики для φ и φ^π совпадают. К формульным характеристикам можно отнести свойства формул быть бескванторными, конъюнкциями атомарных формул и/или их отрицаний и т. д. При этом операция $(\varphi, \pi) \mapsto \varphi^\pi$ вычислима.

Далее, пусть Ψ — множество формул сигнатуры σ от наборов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ основных и дополнительных переменных соответственно; пусть также $\mathfrak{G}$ — группа перестановок (необязательно всех) множества $\{l \in \omega | l < \mathrm{lh}(\overrightarrow{u})\}$. Через $\Psi^{\mathfrak{G}}$ будем обозначать замыкание множества Ψ относительно действия группы $\mathfrak{G}$ (а именно, наименьшее множество, содержащее Ψ и удовлетворяющее следующему условию: если $\varphi \in \Psi^{\mathfrak{G}}$, то $\varphi^{\pi} \in \Psi^{\mathfrak{G}}$ для любой перестановки $\pi \in \mathfrak{G}$). Здесь также следует упомянуть о совпадении кванторных характеристик множеств Ψ и $\Psi^{\mathfrak{G}}$, а также сохранении свойств быть вычислимым или вычислимо перечислимым.

В дальнейшем будем использовать метод интерпретации одной модели в другой.

Определение 3. Будем говорить, что соответствие $\mathcal{I}$ — *интерпретация* модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ в модели $\mathcal{I}(\mathfrak{M})$ вычислимой сигнатуры $\mathcal{I}(\sigma)$, если оно удовлетворяет следующим условиям (здесь $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ — наборы основных и дополнительных переменных соответственно, и $\overrightarrow{s} \in \mathfrak{M}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{v})}$ — кортеж параметров):
- основные множества моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathcal{I}(\mathfrak{M})$ совпадают;
- $\mathcal{I}(\sigma)$ может содержать только предикатные и константные символы, причём имеется хотя бы один константный символ в $\mathcal{I}(\sigma)$;
- для каждой $\exists$-формулы $\psi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры σ найдётся и притом эффективно вычислимая дизъюнкция $\bigvee \Psi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ бескванторных формул сигнатуры $\mathcal{I}(\sigma)$, для которой выполняется соотношение

$$\mathfrak{M} \models \psi_0(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \mathcal{I}(\mathfrak{M}) \models \bigvee \Psi_0(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}),$$

для всех $\overrightarrow{a} \in \mathfrak{M}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{u})}$;
- для каждой бескванторной формулы $\psi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\mathcal{I}(\sigma)$ найдётся и притом эффективно вычислимая дизъюнкция $\bigvee \Psi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ $\exists$-формул сигнатуры σ, для которой выполняется соотношение

$$\mathcal{I}(\mathfrak{M}) \models \psi_1(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \bigvee \Psi_1(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}),$$

для всех $\overrightarrow{a} \in \mathfrak{M}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{u})}$. ◇

Пусть даны множество $D \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ множеств, состоящих из формул специального вида (например, $\exists$-формул или бескванторных формул) некоторой фиксированной сигнатуры (возможно, не совпадающей с σ, о чём говорилось в определении 3), а также набор $\overrightarrow{s}$ параметров из $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ с набором $\overrightarrow{s}$ параметров *задаёт* D (или, что то же самое, множество D *задаётся* последовательностью $\{A_n\}_{n\in\omega}$ с набором $\overrightarrow{s}$ параметров), если имеет место равенство (1), где отождествляются истинность на модели и её интерпретации.

Соглашение 1. Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{v})$ — Σ-формула сигнатуры σ^* и пусть $\overrightarrow{s} \in \mathfrak{M}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{v})}$; тогда запись $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ будет означать, что данная Σ-формула рассматривается с набором $\overrightarrow{s}$ параметров.

Пусть $\{A_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность (возможно, невычислимая) множеств, состоящих из формул специального вида сигнатуры, заданной моделью или её интерпретацией. Будем использовать запись $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$, чтобы указать то обстоятельство, что данная последовательность рассматривается с набором $\overrightarrow{s}$ параметров. Более того, для каждой последовательности в формулировках утверждений и их доказательствах набор параметров будет фиксирован, поэтому в таких случаях записи $\{A_n\}_{n\in\omega}$ и $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ будут равноправными.

Чтобы не возникало коллизий, запись “*последовательность* $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ *вычислима (с оракулом* $A \subseteq \omega$*)*” означает, что соответствующая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ множеств формул от основных и дополнительных переменных является таковой (с тем же оракулом).

Если последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ задаёт множество, определимое Σ-формулой $\Psi(x, \overrightarrow{s}')$ сигнатуры σ^*, то будем писать просто “$\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ *задаёт* $\Psi(x, \overrightarrow{s}')$” (здесь набор $\overrightarrow{s}'$ элементов из $\mathfrak{M}$ может отличаться от $\overrightarrow{s}$, даже с точностью до порядка элементов в кортеже). $\diamond$

Использование интерпретации из определения 3 позволяет осуществлять эффективный переход от последовательности $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ множеств, состоящих из $\exists$-формул сигнатуры σ, к последовательности $\{B_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры $\mathcal{I}(\sigma)$, задающей то же самое множество в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, и наоборот (здесь $\overrightarrow{s}$ — любой набор элементов из $\mathfrak{M}$).

Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ — структуры сигнатуры σ и пусть f — вложение модели $\mathfrak{M}$ в модель $\mathfrak{M}'$. Тогда f продолжается, притом единственным образом, до концевого вложения $f^\# : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}')$ так, что будет выполняться соотношение $f^\#(x) = \{f^\#(y) | y \in x\}$ для любого $x \in HF(M)$. Данное обстоятельство остаётся справедливым и для транзитивных подструктур наследственно конечных надстроек специального вида, речь о которых пойдёт в определении 4. То, что f осуществляет концевое вложение структуры $\mathbb{A}$ в структуру $\mathbb{A}'$, будем обозначать как $f : \mathbb{A} \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{A}'$, где $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ — модели одной и той же сигнатуры $\sigma \supseteq \{\in^2\}$.

В частности, любой автоморфизм структуры $\mathfrak{M}$ единственным образом продолжается до автоморфизма $f^\#$ наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над ней.

Напомним теперь основные понятия теории нумераций на допустимых множествах. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и пусть V — множество произвольной природы; отображение ν, заданное на некотором Σ-подмножестве структуры $\mathbb{A}$ и действующее на V, называется $\mathbb{A}$-*нумерацией* множества V. $\mathbb{A}$-Нумерация ν называется *всюду определённой*, если $\delta\nu = \mathbb{A}$.

Как обычно, на множестве $\delta\nu$ определяется отношение η_ν эквивалентности следующим образом:

$$\eta_\nu \leftrightharpoons \{\langle a; b\rangle \in (\delta\nu)^2 \mid \nu(a) = \nu(b)\}.$$

Для каждого $a \in \delta\nu$ обозначаем через $[a]_{\eta_\nu}$ класс η_ν-эквивалентности, содержащий a (т. е. $[a]_{\eta_\nu} \leftrightharpoons \{b \in \delta\nu | \eta_\nu(a, b)\}$).
$\mathbb{A}$-Нумерация ν называется
- *позитивной*, если η_ν — Σ-предикат на $\mathbb{A}$;
- *негативной*, если $(\delta\nu)^2 \setminus \eta_\nu$ — Σ-предикат на $\mathbb{A}$;
- *разрешимой*, если она позитивна и негативна одновременно;
- *однозначной*, если η_ν совпадает с отношением равенства на $\delta\nu$.

Пусть теперь ν_0, ν_1 — $\mathbb{A}$-нумерации множеств V_0 и V_1 соответственно. Будем говорить, что ν_0 *сводится* к ν_1 (и обозначать как $\nu_0 \leqslant \nu_1$), если существует бинарный Σ-предикат T_0 на $\mathbb{A}$, удовлетворяющий следующим условиям:
- $\delta\nu_0 = \{a \mid T_0(a, y)$ для некоторого $y\}$;
- $\delta\nu_1 \supseteq \{b \mid T_0(x, b)$ для некоторого $x\}$;
- $T_0(a_0, a_1) \Rightarrow \nu_0(a_0) = \nu_1(a_1)$, для всех $a_0, a_1 \in \mathbb{A}$.

В частности, имеем $V_0 \subseteq V_1$, если $\nu_0 \leqslant \nu_1$. Будем говорить, что ν_0 и ν_1 *эквивалентны* (и обозначать как $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leqslant \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant \nu_0$. Будем писать, что $\nu_0 < \nu_1$, если $\nu_0 \leqslant \nu_1$ и $\nu_0 \not\equiv \nu_1$.

Отметим, что если $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу униформизации, то бинарный Σ-предикат T_0 из определения сводимости можно заменить на график Σ-функции (см. [6]). Однако далеко не всегда на допустимом множестве выполняется свойство униформизации или даже существует универсальная Σ-функция (см., к примеру, [8, 14]).

$\mathbb{A}$-Нумерация ν множества V называется *минимальной*, если $\mu \leqslant \nu \Rightarrow \mu \equiv \nu$, для любой $\mathbb{A}$-нумерации μ множества $\rho\nu (= V)$. Напомним, что однозначные, разрешимые и позитивные $\mathbb{A}$-нумерации являются минимальными, чего, в общем случае, не скажешь о негативных $\mathbb{A}$-нумерациях. Подробнее к этой проблеме вернёмся в § 4.

Далее, пусть $V \subseteq \Sigma(\mathbb{A})$; тогда Γ^*_ν определяется следующим образом:

$$\Gamma^*_\nu \leftrightharpoons \{\langle a; b\rangle \mid a \in \delta\nu,\ b \in \nu(a)\}.$$

$\mathbb{A}$-Нумерация ν называется *вычислимой*, если $\Gamma^*_\nu \in \Sigma(\mathbb{A})$. Семейство V называется $\mathbb{A}$-*вычислимым*, если оно имеет хотя бы одну вычислимую $\mathbb{A}$-нумерацию. Вычислимая $\mathbb{A}$-нумерация ν_0 семейства V называется *главной*, если справедливо неравенство $\nu \leqslant \nu_0$ для любой вычислимой $\mathbb{A}$-нумерации ν семейства V. Нетрудно также понять, что если $\mathbb{A}$-нумерация ν_0 вычислима и $\nu \leqslant \nu_0$, то $\mathbb{A}$-нумерация ν также вычислима. Из существования универсального бинарного Σ-предиката на допустимом множестве $\mathbb{A}$ конечной сигнатуры (см., например, теорему 2.6.2 [6]) вытекает, что семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ является $\mathbb{A}$-вычислимым; более того, в этом случае вычислимая

$\mathbb{A}$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ может быть выбрана главной (см. § 2.8 [6]). Как заявлено выше, основной целью настоящей работы является построение допустимого множества $\mathbb{A}$, имеющего для семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ всех $\mathbb{A}$-в.п. множеств негативные вычислимые $\mathbb{A}$-нумерации, но не имеющего для него позитивных вычислимых $\mathbb{A}$-нумераций.

Из предложения 1.1 [13] вытекает, что рассмотрение непустой *частичной* позитивной (негативной, разрешимой) вычислимой $\mathbb{A}$-нумерации не расширяет объём понятия соответствующей *всюду определённой* $\mathbb{A}$-нумерации.

Перейдём теперь к детальному изучению свойств моделей вида $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ и наследственно конечных надстроек над ними.

Для каждого $a \in \mathrm{S}$, через $[a]_{\mathrm{R}}$ обозначим множество

$$\{x \in \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} | \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\mathrm{S}(x) \wedge \forall n(\mathrm{R}(a,n) \leftrightarrow \mathrm{R}(x,n)))\}$$

(нетрудно видеть, что $[a]_{\mathrm{R}}$ — П-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$). Заметим, что множества вида $[a]_{\mathrm{R}}$, $a \in \mathrm{S}$, образуют разбиение множества S. Отношение эквивалентности, соответствующее данному разбиению, будем называть R-*эквивалентностью* и обозначать как $\sim_{\mathrm{R}}$. Следует также обратить внимание на то, что выполняется равенство $[a]_{\mathrm{R}} = P_A$ для подходящего $A \in \mathcal{S}$. Как обычно, полагаем $\mathrm{R}^0 \leftrightharpoons \neg\mathrm{R}$, $\mathrm{R}^1 \leftrightharpoons \mathrm{R}$.

Через $\gamma_{\mathcal{S}}$ обозначим функцию, заданную на S и сопоставляющую каждому элементу $a \in \mathrm{S}$ подмножество $A \subseteq \omega$ натуральных чисел, удовлетворяющую следующему условию:

$$n \in A \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \mathrm{R}(a,n),$$

для всех $n \in \omega$. При этом элемент a будем называть $\gamma_{\mathcal{S}}$–*кодом* множества A. Отметим, что имеет место соотношение

$$\gamma_{\mathcal{S}}(a_0) = \gamma_{\mathcal{S}}(a_1) \Leftrightarrow a_0 \sim_{\mathrm{R}} a_1,$$

для всех $a_0, a_1 \in \mathrm{S}$.

Нетрудно видеть, что $\omega \subseteq \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ термально представимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ Более точно, операция $g_0(n) = \mathbf{n}(\in \omega \subseteq \mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, заданная на $\mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$, является Σ-функцией, что легко проверяется с помощью Σ-рекурсии (§ 2.5 [6]): $g_0(\varnothing) = a$, если $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \mathrm{s}(a,a)$; $g_0(n+1) = a$, если

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models (\mathrm{s}(a, g_0(n)) \wedge \neg(a \approx g_0(n)).$$

Это обстоятельство позволяет отождествить множества ω натуральных чисел и $\mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$ натуральных ординалов; кроме того, согласно лемме 1, можно считать, что “множества” и праэлементы из $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ кодируют Σ-подмножества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, а также элементы $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ (здесь следует отличать $\gamma_{\mathcal{S}}$–коды, о которых говорится выше, от понятий индексов или кодов для Σ-подмножеств и элементов, по существу являющихся “номерами” подходящих $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумераций).

Лемма 1. *Существует частичная инъективная Σ-функция F, для которой справедливы соотношения $\rho F = \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ и $\delta F \in \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})) \cap \mathcal{P}(HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S})$.*

Доказательство. В самом деле, положим $F(x) \leftrightharpoons t_k(u_0, u_1, \ldots, u_{n_k-1})$, если $x = \langle k, \{\pi(\overrightarrow{u}) | \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle^{\langle g_0(n) | n \in \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))\rangle}_{\langle n | n \in \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))\rangle}$, где $k \in \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ и $\overrightarrow{u} = \langle u_0,\ u_1, \ldots, u_{n_k-1}\rangle \in (\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})^{n_k}_{\neq}$, а $g_0(n)$ — Σ-функция, осуществляющая естественное соответствие между натуральными ординалами и натуральными числами, определённая выше. Очевидным образом выполняется соотношение $\delta F \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$, а свойство инъективности функции F и равенство $\rho F = \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ вытекают из определения 2. Для доказательства того, что $\delta F \in \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$, следует также привлечь условие $\mathrm{S} \in \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$. $\square$

Пусть f — вложение счётной модели $\mathfrak{M}_0$ сигнатуры σ_0, построенной по семейству $\mathcal{S}$, в структуру $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующее тождественно на множестве ω натуральных чисел, а также удовлетворяющее условию $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_0} = \mathfrak{M}_0 \setminus \omega$. Тогда оно продолжается (притом однозначно) до элементарного вложения $f^{\#} : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ (похожая картина подробно обсуждается в [14]). Кроме того, наличие негативных (позитивных) вычислимых $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумераций семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$ является элементарным свойством (см., например, [4]), поэтому можно считать ниже, что $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ счётна.

Σ-Предикаты на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ будем задавать также Δ_0-аппроксимациями, состоящими из конечных подструктур (см., например, [14]). Все конечные структуры будем рассматривать с точностью до изоморфизма, поэтому будем считать, что они заданы на начальных сегментах натуральных чисел (ср. с определением вычислимой структуры) и кодируются своими сильными индексами.

Определение 4. Определим *сильно вычислимую последовательность* $n(\in \omega) \mapsto \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)$ *конечных структур сигнатуры* σ_0^* следующим образом:

• основным множеством $\mathfrak{M}_n$ служит $\{m \in \omega \mid m \leqslant n\} \uplus \mathrm{S}_n$, причём множество S_n совпадает с $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_n}$;

• определим функцию γ_n, заданную на S_n и действующую на $\mathcal{P}(\{m \in \omega \mid m \leqslant n\})$ так, чтобы каждый элемент $\mathcal{P}(\{m \in \omega \mid m \leqslant n\})$ имел в качестве γ_n–прообраза множество, состоящее в точности из 2^{n+1} элементов множества S_n (как и прежде, $x \in \mathrm{S}_n$ — γ_n–*код* множества $\gamma_n(x)$); тем самым, $\mathfrak{M}_n$ будет иметь $n + 1 + 2^{n+1} \cdot 2^{n+1}$ элементов;

• s интерпретируется, как бинарное отношение на $\mathfrak{M}_n$, и действует, как сужение отношения $\mathrm{s}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}$ на $\{m \in \omega \mid m \leqslant n\}$;

• $\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_n}(x, k)$ означает, что $k \in \gamma_n(x) \subseteq \{m \in \omega \mid m \leqslant n\}$, где $x \in \mathrm{S}_n$ и $k \in \omega$;

• $\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n) \leftrightharpoons \{a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_n) \mid \mathrm{rnk}(a) \leqslant 2^{n+1},\ |\mathrm{sp}(a)| \leqslant n + 1\}$;

• символы из $\{\mathrm{U}, \varnothing, \in\}$ интерпретируются на элементах из $\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)$ так же, как и на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_n)$. ◇

Для $k \in \omega$ и набора $\overrightarrow{a}$ попарно различных праэлементов длины n_k, положим $r_k \leftrightharpoons \mathrm{rnk}(t_k(\overrightarrow{a}))$. Отметим, что функции r_k и n_k вычислимы в классическом смысле и не зависят от выбора модели, над которой рассматривается наследственно конечная надстройка. Нетрудно понять, что для любого $\overrightarrow{c} \in (\mathfrak{M}_n)^{n_k}_{\neq}$ условие $t_k(\overrightarrow{c}) \in \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)$ равносильно неравенству $\max\{\log_2(r_k), n_k\} \leqslant n+1$ $(n \in \omega)$. Непосредственно из принципа Σ-рефлексии (I.4.6 [7]) и свойств отношения $\leqslant_{\mathrm{end}}$ быть концевым расширением (§ I.8 [7]) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $\Phi(\overrightarrow{x})$ — Σ-формула сигнатуры σ_0^* от набора $\overrightarrow{x}$ переменных. Тогда равносильны следующие условия (здесь $\overrightarrow{a} \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{x})}$):*
(T3.1): $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(\overrightarrow{a})$;
(T3.2): $\exists n \exists \overrightarrow{c} [\exists f (f : (\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n), \overrightarrow{c}) \leqslant_{\mathrm{end}} (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}), \overrightarrow{a})) \& (\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n) \models \Phi(\overrightarrow{c}))]$;
(T3.3): $\exists n \exists \overrightarrow{c} \exists f [(f : (\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n), \overrightarrow{c}) \leqslant_{\mathrm{end}} (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}), \overrightarrow{a})) \&$
$\& (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi^{(f(\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)))}(\overrightarrow{a}))]$.

(Здесь $\Phi^{(v)}(\overrightarrow{x})$ — это Δ_0-формула, полученная из Σ-формулы $\Phi(\overrightarrow{x})$ заменой каждого неограниченного квантора $\exists y$ ограниченным квантором $\exists y \in v$.)

Положим $\sigma_1 \leftrightharpoons \{\mathrm{R}\} \cup \{\mathbf{m} \mid m \in \omega\}$ и $\sigma_1^{(n)} \leftrightharpoons \{\mathrm{R}\} \cup \{\mathbf{m} \mid m \in \omega, m \leqslant n\}$ для каждого $n \in \omega$.

Замечание 1. Будем считать, что формулы сигнатуры σ_1 задаются стандартной гёделевой нумерацией, в которой по $n \in \omega$ эффективно находится номер константного символа $\mathbf{n}$. ◇

Пусть формула φ сигнатуры σ_0 или σ_1 имеет вид $\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_p$, $p \in \omega$, конъюнкции атомарных формул и/или их отрицаний, расстановка скобок при этом предполагается левой: $\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_p \leftrightharpoons ((\ldots(\psi_0 \wedge \psi_1) \wedge \ldots) \wedge \psi_p)$. Всегда будем считать, что все конъюнкты формулы φ попарно различны. Далее, пусть θ — формула; тогда под *подстановкой* $[\varphi]^{\psi_{i_0}}_{\theta}$ будем понимать формулу $\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \ldots \psi_{i_0-1} \wedge \theta \wedge \psi_{i_0+1} \wedge \ldots \wedge \psi_p$. Если формула ψ не является конъюнктом формулы φ, то полагаем $[\varphi]^{\psi}_{\theta} \leftrightharpoons \varphi$. Естественным образом подстановка в формуле обобщается на подстановку нескольких конъюнктов в ней. Результатами подстановок будут в основном формулы сигнатуры σ_1, даже если первоначально были заданы формулы сигнатуры σ_0. Операция *удаления* конъюнкта χ в формуле φ может быть задана как результат подстановки $[\varphi]^{\chi}_{(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})}$ (разумеется, с точностью до отношения истинности на кортежах).

В завершение приведём информацию, касающуюся бинарных строк (функций, заданных на начальных сегментах натуральных чисел и принимающих значения из $\{0, 1\}$). Пусть $\tau \in \{0, 1\}^n$, где $n \leqslant \omega$; определим следующие операции (здесь также $k \leqslant \omega$):

• $\mathrm{lh}(\tau) \leftrightharpoons n$ и $\delta\tau \leftrightharpoons n$;

• если $k \leqslant n$, то $\tau \upharpoonright k$ — такая строка ρ, что будут выполняться равенства $\mathrm{lh}(\rho) = k$ и $\rho(i) = \tau(i)$ для всех $i \in \omega$, $i < k$.

Перейдём теперь к заданию отношения $\sqsubseteq$ линейного порядка на бинарных строках одной и той же длины. Пусть $\tau_0,\ \tau_1 \in \{0, 1\}^n$, $n \leqslant \omega$; тогда положим $\tau_0 \sqsubseteq \tau_1$, если τ_0 меньше или равна τ_1 относительно лексикографического порядка, при котором имеет место $0 < 1$ (начинаем рассмотрения с наименьшей позиции). Будем писать, что $\tau_0 \sqsubset \tau_1$, если справедливы неравенства $\tau_0 \sqsubseteq \tau_1$ и $\tau_0 \neq \tau_1$. Заметим, что для $f_0, f_1 \in \{0, 1\}^\omega$ будет выполняться следующее: $f_0 \sqsubset f_1$, если и только если выполняется соотношение $\exists m \in \omega[f_0 \upharpoonright m \sqsubset f_1 \upharpoonright m]$.

Далее, пусть $\overrightarrow{\tau} \leftrightharpoons \langle \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\rangle$, $n \in \omega$, — кортеж бинарных строк и пусть $m \in \omega$. Тогда положим $\overrightarrow{\tau} \upharpoonright m \leftrightharpoons \langle \tau_0 \upharpoonright m, \tau_1 \upharpoonright m, \ldots, \tau_{n-1} \upharpoonright m\rangle$.

Элементы $\mathcal{P}(\omega)$ зачастую будем отождествлять с соответствующими им бинарными строками длины ω (другими словами, множество $A \subseteq \omega$ сопоставим строке, совпадающей с его характеристической функцией: $A(i) = 0$, если $i \notin A$; $A(i) = 1$, если $i \in A$).

Пусть $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ — конечное семейство подмножеств натуральных чисел. Определим $\bigoplus F$ следующим образом: если $F = \varnothing$, то положим $\bigoplus F \leftrightharpoons \varnothing$; если же $F \neq \varnothing$, то возьмём последовательность $\langle C_0, C_1, \ldots, C_k\rangle$, $k \in \omega$, так, что $F = \{C_0, C_1, \ldots, C_k\}$, $C_0 \sqsubset C_1 \sqsubset \ldots \sqsubset C_k$, и в качестве $\bigoplus F$ положим *сочленение* $C_0 \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_k \leftrightharpoons \{(k+1) \cdot l + i | l \in C_i,\ 0 \leqslant i \leqslant k\}$ элементов множества F в указанном порядке.

§2. Отрицательное условие.

Пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$ — наследственно конечная надстройка над моделью $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Не существует позитивной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерации семейства $\mathcal{V}$ такого, что $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})) \cap \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{V} \subseteq \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}))$.*

Доказательство. Допустим, что позитивная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерация семейства $\mathcal{V}$ существует (скажем, ν_1, причём $\Gamma^*_{\nu_1}$ и η_{ν_1} определимы соответственно Σ-формулами $\Phi_0(x, y, \overrightarrow{s})$ и $\Phi_1(x, y, \overrightarrow{s})$ сигнатуры σ^*_0 с одним и тем же набором $\overrightarrow{s}$ параметров из S). Считаем также, что $\delta\nu_1 \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ (что возможно, согласно лемме 1). Возьмём арифметическое множество $C_0 \subseteq \omega$ такое, что $C_0 \not\leqslant_{CE} \bigoplus\limits_{s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})} \gamma_\mathcal{S}(s)$. Далее, пусть $x_0 \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ таково, что $\nu_1(x_0) = C_0$. Возможны два случая.

1) $\mathrm{sp}(x_0) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$. Тогда C_0 определимо некоторой Σ-формулой сигнатуры σ_0^* с набором $\overrightarrow{s}$ параметров: для этого возьмём $[\Phi_0(x_0, y, \overrightarrow{s})]^{x_0}_{t_k(\overrightarrow{a})}$ для подходящих $k \in \omega$ и набора $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}_{\neq}$, удовлетворяющих условию $x_0 = t_k(\overrightarrow{a})$, в качестве Σ-формулы от переменной y с набором $\overrightarrow{s}$ параметров, что правомерно ввиду $\mathrm{sp}(\overrightarrow{a}) = \mathrm{sp}(x_0) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ (см. (**T2**) из определения 2). Следовательно, $C_0 \leqslant_{CE} \bigoplus\limits_{s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})} \gamma_{\mathcal{S}}(s)$ (см., например, доказательство теоремы 1 [15]), противоречие.

2) $\mathrm{sp}(x_0) \nsubseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$. Возьмём автоморфизм f структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующий тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, так, чтобы выполнялось соотношение

$$\mathrm{sp}(x_0) \cap f^{\#}(\mathrm{sp}(x_0)) = \mathrm{sp}(x_0) \cap \mathrm{sp}(f^{\#}(x_0)) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$$

(что возможно, поскольку имеется бесконечно много $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодов каждого множества семейства $\mathcal{S}$). Тогда $\nu_1(x_0) = C_0 = \nu_1(f^{\#}(x_0))$ и, следовательно, выполняется соотношение $\langle x_0, f^{\#}(x_0)\rangle \in \eta_{\nu_1}$, т. е. имеет место соотношение

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_1(x_0, f^{\#}(x_0), \overrightarrow{s}).$$

По теореме 4, имеем

$$\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n) \models (\Phi_1(a, b, \overrightarrow{t}) \wedge \exists y(\Phi_0(a, y, \overrightarrow{t}) \wedge \Phi_0(b, y, \overrightarrow{t})))$$

для некоторых $n \in \omega$, $a, b \in \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)$, кортежа $\overrightarrow{t}$ элементов из $\mathfrak{M}_n$ и функции f_0, для которых выполняется соотношение

$$f_0 : (\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n), a, b, \overrightarrow{t}) \leqslant_{\mathrm{end}} (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}), x_0, f^{\#}(x_0), \overrightarrow{s}).$$

Далее, возьмём вложение

$$g : (\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n), a, b, \overrightarrow{t}) \leqslant_{\mathrm{end}} (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}), x_0, x_1, \overrightarrow{s}),$$

для которого будет выполняться соотношение $\gamma_{\mathcal{S}}(c) \leqslant_T \bigoplus\limits_{s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})} \gamma_{\mathcal{S}}(s)$ для всех $c \in \mathrm{sp}(x_1) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ (более того, элементы из $\mathrm{sp}(x_1) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ можно выбрать так, чтобы они являлись $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодами лишь конечных множеств). Таким образом, не может выполняться равенство $\nu_1(x_0) = \nu_1(x_1)$, поскольку в противном случае C_0 определялось бы некоторой Σ-формулой сигнатуры σ_0^* с параметрами из $\mathrm{sp}(x_1) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, а следовательно, $C_0 \leqslant_{CE} \bigoplus\limits_{s \in \mathrm{sp}(\langle x_1, \overrightarrow{s}\rangle)} \gamma_{\mathcal{S}}(s) \leqslant_T \bigoplus\limits_{s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})} \gamma_{\mathcal{S}}(s)$; однако, имеет место $\eta_{\nu_1}(x_0, x_1)$, по теореме 4. Пришли к противоречию. □

§3. Положительное условие.

В настоящем параграфе приводится построение негативной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$, и здесь под допустимым множеством будет подразумеваться только $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, где $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ счётна и задана в определении 1, а её основные свойства — в § 1. Условно говоря, построение

негативной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации будет состоять из следующих этапов.
(1) Сведение вычислимых дизъюнкций $\exists$-формул сигнатуры σ_0 к вычислимым дизъюнкциям бескванторных формул сигнатуры σ_1 (леммы 2, 3, определение 5, соглашение 2, замечание 2).
(2) Построение автоморфизмов, действующих на параметрах Σ-формул сигнатуры σ_0^* и сохраняющих решения этих формул.
(3) Виды параметров Σ-формул сигнатуры σ_0^*, определяющих $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-в.п. множества, и минимизация их количества.
(4) Единственность представления Σ-множеств с помощью подмножеств натуральных чисел.
(5) Основная конструкция негативного представления (кроме основной конструкции здесь задаются вычислимые $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации ν_0, ν_1, ν_1', ν_2, ν_3, ν_4, из которых только ν_2 является негативной, а остальные однозначны; приводятся также леммы 4–7).

В изложении настоящего параграфа активно используется соглашение 1. Все основные формулировки и доказательства, касающиеся этапов (2)–(4), содержатся во второй части.

Определение 5. Пусть $\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ — модель сигнатуры $\mathcal{J}(\sigma_0) \leftrightharpoons \sigma_1 \cup \{\mathrm{S}\}$, заданная следующим образом:
- основные множества $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ совпадают;
- $\mathbf{n}^{\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})} = n \in \omega$;
- $\mathrm{S}^{\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})} = \mathrm{S}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}$;
- $\mathrm{R}^{\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})} = \mathrm{R}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}$.

Пусть также $n \in \omega$ и $\mathcal{I}_n(\mathfrak{M}_n)$ — модель сигнатуры $\mathcal{I}_n(\sigma_0) = \sigma_1^{(n)} \cup \{\mathrm{S}\}$, заданная следующим образом:
- основные множества $\mathfrak{M}_n$ и $\mathcal{I}_n(\mathfrak{M}_n)$ совпадают;
- $\mathbf{k}^{\mathcal{I}_n(\mathfrak{M}_n)} = k \in \omega$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$;
- $\mathrm{S}^{\mathcal{I}_n(\mathfrak{M}_n)} = \mathrm{S}^{\mathfrak{M}_n}$;
- $\mathrm{R}^{\mathcal{I}_n(\mathfrak{M}_n)} = \mathrm{R}^{\mathfrak{M}_n}$. $\diamond$

По лемме 2, соответствие $\mathcal{J}$ является интерпретацией модели $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, а по замечанию 3, последовательность $n \in \omega \mapsto \mathbb{HF}_n(\mathcal{I}_n(\mathfrak{M}_n))$ может служить Δ_0-аппроксимацией $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ в смысле теоремы 4, где структура $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ отождествляется со своей интерпретацией $\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, а структура $\mathfrak{M}_n$ — с $\mathcal{I}_n(\mathfrak{M}_n)$ $(n \in \omega)$.

Лемма 2. *Соответствие $\mathcal{J}$, заданное в определении 5, является интерпретацией модели $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$.*

Доказательство. Для доказательства проверим справедливость всех условий определения 3 для соответствия $\mathcal{J}$.

В самом деле, основные множества $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ совпадают. Второе условие определения 3 также очевидным образом выполняется.

Для того, чтобы показать справедливость третьего условия определения 3, достаточно, ввиду эквивалентности $\exists y(\varphi_0 \vee \varphi_1) \equiv (\exists y\varphi_0 \vee \exists y\varphi_1)$, эффективно построить вычислимую дизъюнкцию бескванторных формул сигнатуры $\sigma_1 \cup \{\mathrm{S}^1\}$ для формулы $\exists \overrightarrow{y} \bigwedge \Psi_0(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, где Ψ_0 — конечное множество атомарных формул сигнатуры σ_0 и/или их отрицаний. Не умаляя общности, в рамках данного доказательства будем различать переменные, принимающие в качестве значений элементы из $\omega \subseteq \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ (*натуральные переменные*) и переменные, принимающие значения из $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}$ (*кодовые переменные*). Другими словами, будем считать, что рассматриваемая формула является формулой сигнатуры $\{\mathrm{s}^2, \mathrm{R}^2\}$, а также имеет вид

$$\exists \overrightarrow{y'} \exists \overrightarrow{y''} \bigwedge \Psi_0(\overrightarrow{y'}, \overrightarrow{y''}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{u}'', \overrightarrow{v}', \overrightarrow{v}''), \tag{2}$$

где $\overrightarrow{y}'$, $\overrightarrow{u}'$, $\overrightarrow{v}'$ — наборы натуральных переменных, а $\overrightarrow{y}''$, $\overrightarrow{u}''$, $\overrightarrow{v}''$ — наборы кодовых переменных, для которых имеют место равенства $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}'\hat{}\overrightarrow{u}''$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}'\hat{}\overrightarrow{v}''$. Будем также считать, что выполняется следующее:

(1) любая натуральная переменная x_0 не встречается в подформулах вида $\mathrm{R}(x_0, z)$, где z — любая переменная;

(2) любая кодовая переменная x_1 не встречается в конъюнктах, содержащих сигнатурный символ s, а также в подформулах вида $\mathrm{R}(z, x_1)$, где z — любая переменная;

(3) натуральные и кодовые переменные не встречаются одновременно в подформулах, содержащих символ $\approx$ равенства.

В самом деле, если конъюнкция (2) не удовлетворяет этим условиям, то либо конъюнкт (а вместе с ним и вся конъюнкция) ложен, либо он всегда истинен, вследствие чего всю конъюнкцию (в первом случае) заменим на $\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$ или этот конъюнкт (во втором случае) — на $(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$.

Разберём последовательно два случая.

Удаление натуральных переменных. Сначала выделим в Ψ_0 все конъюнктивные члены, содержащие только натуральные переменные (скажем, $\{\varphi_0^1, \varphi_1^1, \ldots, \varphi_{k_1-1}^1\}$, где $k_1 \in \omega$), и зафиксируем кортеж $\overrightarrow{p} \in \omega^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}')}$ натуральных чисел, являющихся параметрами. Так как решением формулы $\varphi_0^1 \wedge \varphi_1^1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{k_1-1}^1$ является вычислимое отношение местности $\mathrm{lh}(\overrightarrow{y}'\hat{}\overrightarrow{u}'\hat{}\overrightarrow{v}')$ (более того, его вычислимый индекс находится эффективно по номеру формулы $\varphi_0^1 \wedge \varphi_1^1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{k_1-1}^1$), проведём следующую процедуру:

• сначала возьмём $\overrightarrow{q} \in \omega^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y}'\hat{}\overrightarrow{u}')}$ и $\overrightarrow{z}^0 = \overrightarrow{y}'\hat{}\overrightarrow{u}'\hat{}\overrightarrow{v}' = \langle z_0^0, z_1^0, \ldots, z_{\mathrm{lh}(\overrightarrow{z}^0)-1}^0 \rangle$;

• заменим каждый конъюнкт φ_j^1, $0 \leqslant j < k_1$, формулы $\bigwedge \Psi_0$ на $(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ или $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$, в соответствии с тем, истинна формула $\varphi_0^1 \wedge \varphi_1^1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{k_1-1}^1$ или ложна в модели $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ на кортеже $\overrightarrow{q}\hat{}\overrightarrow{p}$;

• проведём в полученной формуле подстановку натуральных переменных константными символами из $\{\mathbf{n} | n \in \omega\}$, соответствующими элементам кортежа $\overrightarrow{q}\hat{}\overrightarrow{p}$ (напомним, что натуральное число $n \in \omega$ соответствует константному символу $\mathbf{n}$, если оно удовлетворяет равенству $\mathbf{n}^{\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})} = n$);

• тем самым, имеем формулу $[[\bigwedge\Psi_0]^{\langle\varphi^1_i|i\in\omega,\,i<k_1\rangle}_{\langle(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})|i\in\omega,\,i<k_1\rangle}]^{\overrightarrow{z}^0}_{\overrightarrow{\mathbf{q}}\hat{}\,\overrightarrow{\mathbf{p}}}$, если $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}\models(\varphi^1_0\wedge\varphi^1_1\wedge\ldots\wedge\varphi^1_{k_1-1})(\overrightarrow{q}\hat{}\,\overrightarrow{p})$; и $\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$ в противном случае;
• для задания эффективной нумерации с помощью натуральных чисел формулы, полученной в результате приведённых выше подстановок, воспользуемся канторовским представлением.

В конечном итоге, приходим к формуле

$$(3)\qquad \bigvee_{m\in\omega}\Bigg(\bigwedge_{i=\mathrm{lh}(\overrightarrow{y}')}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{z}^0)-1}(z^0_i\approx\mathbf{l}^m_i)\wedge\exists\overrightarrow{y}''[\varphi_m(\overrightarrow{y}',\overrightarrow{y}'',\overrightarrow{u}',\overrightarrow{u}'',\overrightarrow{v}',\overrightarrow{v}'')]^{\overrightarrow{z}^0}_{\overrightarrow{\mathbf{l}}^m}\Bigg)$$

(здесь бескванторная формула φ_m сигнатуры $\{\mathrm{R},\mathbf{0}\}$ и набор $\overrightarrow{\mathbf{l}}^m=\langle\mathbf{l}^m_0,\mathbf{l}^m_1,\ldots,\mathbf{l}^m_{\mathrm{lh}(\overrightarrow{z}^0)-1}\rangle$ константных символов из $\{\mathbf{n}|n\in\omega\}$ находятся эффективно по Ψ_0 и $m\in\omega$), равносильной первоначальной формуле (2) (более точно, формулы (2) и (3) истинны соответственно в структурах $\mathfrak{M}_S$ и $\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ на одних и тех же кортежах, при фиксированном наборе параметров).

Обратим внимание на то, что для каждого $m\in\omega$ в рамках следующей процедуры будем обрабатывать $\exists$-формулу

$$\exists\overrightarrow{y}''[\varphi_m(\overrightarrow{y}',\overrightarrow{y}'',\overrightarrow{u}',\overrightarrow{u}'',\overrightarrow{v}',\overrightarrow{v}'')]^{\overrightarrow{z}^0}_{\overrightarrow{\mathbf{l}}^m}$$

сигнатуры σ_1, при этом формула φ_m представляет собой конъюнкцию атомарных формул и/или их отрицаний от кодовых переменных, удовлетворяющую условию (**2**) настоящего доказательства, константный символ $\mathbf{l}$ в которой может встречаться только в подформуле вида $\mathrm{R}(x,\mathbf{l})$ где $l\in\omega$, а x — кодовая переменная.

Удаление кодовых переменных. Пусть $\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ — конъюнкция атомарных формул сигнатуры σ_1 и/или их отрицаний от кодовых переменных. Если в формулу θ входят в качестве конъюнктов некоторая атомарная формула вместе со своим отрицанием, то формулу θ можно заменить на $\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$, а следовательно, и $\exists y\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\equiv\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$; поэтому будем считать, что в θ не встречаются в качестве конъюнктов никакая атомарная формула вместе со своим отрицанием. Далее, будем считать, что $(y\approx z)$ входит в качестве подформулы в формулу θ, для любой переменной z из набора $\overrightarrow{z}\hat{}\,\overrightarrow{u}\hat{}\,\overrightarrow{v}$ остальных переменных (иначе, используя эквивалентность $\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\equiv(\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\wedge((y\approx z)\vee\neg(y\approx z)))$, переходим к двум формулам $\exists y(\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\wedge(y\approx z))$ и $\exists y(\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\wedge\neg(y\approx z))$; при необходимости следует продолжить процесс; используем также эквивалентность $(z\approx y)\equiv(y\approx z)$).

Если $(y\approx z_0)$ является конъюнктом формулы θ для некоторой переменной z_0 из набора $\overrightarrow{z}\hat{}\,\overrightarrow{u}\hat{}\,\overrightarrow{v}$, то имеем $\exists y\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\equiv[\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})]^y_{z_0}\equiv[[\theta(y,\overrightarrow{z},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})]^y_{z_0}]^{(z_0\approx z_0)}_{(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})}$. Для завершения построения остаётся лишь оставить по одному конъюнкту среди повторяющихся, удалив дубликаты и, возможно, $(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$, чтобы перейти к формуле, равносильной данной, все конъюнкты которой попарно различны.

Если же $(y \approx z)$ не является конъюнктом формулы θ ни для какой переменной z из набора $\overrightarrow{z}\hat{\ }\overrightarrow{u}\hat{\ }\overrightarrow{v}$, а θ' получается из θ удалением всех конъюнктов, в которых встречается переменная y, то справедлива эквивалентность $\exists y\theta(y, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \theta'(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ в $\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ (это утверждение выполняется, поскольку каждое конечное множество имеет бесконечно много $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодов).

Для того, чтобы удалить все переменные из набора $\overrightarrow{y}''$ в формуле φ_m, последовательно проведём для каждой переменной из набора $\overrightarrow{y}''$ вышеприведённую процедуру удаления связанной кодовой переменной, где y играет роль удаляемой переменной, а $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{z}$ — соответственно кортежи $\overrightarrow{u}''$, $\overrightarrow{v}''$ и набор оставшихся к данному шагу переменных из кортежа $\overrightarrow{y}''$, не совпадающих с y.

Для того, чтобы проверить четвёртое условие определения 3, достаточно доказать только, что по формуле $(y \approx \mathbf{n})$, где y — переменная, а $\mathbf{n}$ — константный символ из $\{\mathbf{n} | n \in \omega\}$, эффективно находится эквивалентная ей некоторая $\exists$-формула сигнатуры σ_0 без параметров. В самом деле, для сведения ситуации к рассмотрению указанных выше формул воспользуемся эквивалентностью

$$\varphi(\overrightarrow{y}, \mathbf{n}^0, \mathbf{n}^1, \ldots, \mathbf{n}^m) \equiv \exists z^0 \exists z^1 \ldots \exists z^m ((\bigwedge_{i=0}^{m} (z^i \approx \mathbf{n}^i)) \wedge \varphi(\overrightarrow{y}, z^0, z^1, \ldots, z^m)).$$

Для задания $\exists$-формулой сигнатуры σ_0 формулы $(y \approx \mathbf{n})$ применим метод индукции:

$n = 0$**:** $\mathrm{s}(y, y)$;
$n = m + 1$**:** $\exists z((z \approx \mathbf{m}) \wedge (\mathrm{s}(y, z) \wedge \neg(y \approx z)))$.

Таким образом, $\mathcal{J}$ действительно является интерпретацией модели $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$. □

Соглашение 2. В дальнейшем в настоящем параграфе все рассуждения будем проводить, рассматривая лишь структуру $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ на множестве $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$, при этом отождествляя структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{J}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$; наличие похожих отождествлений будем предполагать и для пар моделей $\mathfrak{M}_n$ и $\mathcal{I}_n(\mathfrak{M}_n)$ $(n \in \omega)$. Такие отождествления позволят ограничиться рассмотрением бескванторных формул сигнатур σ_1 и $\sigma_1^{(n)}$ $(n \in \omega)$ соответственно.

Другими словами, будем предполагать наличие двухсортной структуры в качестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, в которой все переменные принимают только значения из $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ (носителем другого сорта является множество $\{a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) | \mathrm{sp}(a) \cap \omega \neq \varnothing\}$, о существовании которого “забываем” в рамках настоящего параграфа; это возможно, в силу сведения бинарного отношения $\lambda x.\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}(x, n)$, где $n \in \omega$, к счётному семейству $\{\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}(\cdot, \mathbf{n}) | n \in \omega\}$ унарных отношений, а также наличия инъективной частичной Σ-функции, действующей из некоторого $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-вычислимого подмножества $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ на множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, что следует из леммы 1.

Здесь и далее будет использоваться обозначение $\mathrm{R}_l(\cdot)$ для формулы $\mathrm{R}(\cdot, \mathbf{l})$ наряду с обычным использованием данной формулы ($l \in \omega$).

Кроме того, все Σ-формулы настоящего параграфа будут рассматриваться в сигнатуре σ_0^* с попарно различными параметрами из S.

В дальнейшем, дополнительные переменные будем зачастую отождествлять с параметрами, которые они принимают в качестве своих значений. $\diamond$

Замечание 2. Для каждого $n \in \omega$ модель $\langle \mathrm{S}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}; \mathrm{R}_0^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}, \mathrm{R}_1^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}, \ldots, \mathrm{R}_n^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}} \rangle$ сильно конструктивна (определение см. в гл. 6 § 1 [10]), теория которой является счётно категоричной, допускающей при этом элиминацию кванторов (см. гл. 5 § 2 [10]). Этот подход позволяет привести другое доказательство леммы 2 (удаление кодовых переменных). $\diamond$

Как говорилось выше, интерпретация, предложенная в лемме 2, позволяет осуществлять эффективный переход от последовательности множеств, состоящих из $\exists$-формул сигнатуры σ_0, к последовательности множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1, и наоборот, о чём говорится в следующем утверждении.

Лемма 3. *По любой Σ-формуле $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ эффективно строится вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1, удовлетворяющая следующему соотношению:*

$$\begin{aligned} \{a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S} \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(a, \overrightarrow{s})\} = \\ = \{t_l(\overrightarrow{a}) \mid l \in \omega,\ \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_l},\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \\ \text{для некоторой } \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in A_l,\ \mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_l,\ \mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\}. \end{aligned} \tag{4}$$

В обратную сторону, вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1, задаёт и притом эффективно некоторую Σ-формулу $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ (в смысле (4)).

Доказательство. Следует из теорем 2, 3, а также леммы 2. $\square$

Приведём сейчас некоторые сведения из второй части, необходимые для изложения конструкций данного параграфа.

Будем говорить, что Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ и $\Phi'(x, \overrightarrow{s}')$ *Σ-эквивалентны* и обозначать как $\Phi(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi'(x, \overrightarrow{s}')$, если они определяют одно и то же множество в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$.

Определение 6. Пусть даны Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ и набор $\overrightarrow{r} = \langle r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}\rangle \in \mathrm{S}^n_{\neq}$, $n \in \omega$, элементов из $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, в точности лежащих в $[a]_{\mathrm{R}}$ для наперёд заданного $a \in \mathrm{S}$. Будем говорить, что кортеж $\overrightarrow{r}$ *имеет вид* I *для*

$\Phi(x, \overrightarrow{s})$, если $n = 1$ и выполняется соотношение

$$r_0 \sim_{\mathrm{R}} r_0' \Leftrightarrow \Phi(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma [\Phi(x, \overrightarrow{s})]^{r_0}_{r_0'};$$

кортеж $\overrightarrow{r}$ *имеет вид* II *для* $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, если $n \geqslant 1$ и существует группа $\mathfrak{G}$ перестановок множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{r})$ такая, что справедливо следующее:

$$\forall \overrightarrow{r}' \in \mathrm{S}^n \big(\Phi(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma [\Phi(x, \overrightarrow{s})]^{\overrightarrow{r}}_{\overrightarrow{r}'} \Longrightarrow \exists \pi \in \mathfrak{G}(\pi(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r}')\big),$$

$$\forall \pi \in \mathfrak{G}\big(\Phi(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma [\Phi(x, \overrightarrow{s})]^{\overrightarrow{r}}_{\pi(\overrightarrow{r})}\big). \qquad \diamond$$

Отметим, что любое $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-в.п. подмножество $D \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ определяется некоторой Σ-формулой $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$, где параметр r имеет вид I, а набор $\overrightarrow{s}$ служит конкатенацией кортежей вида II (разумеется, все его координаты попарно различны).

По теореме 1 [15], имеем $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})) \cap \mathcal{P}(\omega) = \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})) \cap \mathcal{P}(\omega) = \mathcal{S}$ (несмотря на то, что в [15] рассматриваются семейства, заданные только положительно, легко доказать, что данное семейство Σ-эквивалентно в смысле [15], к примеру, семейству своих характеристических функций). Далее, возьмём Σ-формулу $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$, где r — параметр вида I для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$, а набор $\overrightarrow{s}$ попарно различных параметров составлен из кортежей вида II для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$ так, что набор $\gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s})$ возрастает относительно $\sqsubseteq$; сопоставим ей некоторое $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-вычислимое подмножество $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r}$ натуральных чисел, задающее последовательность (необязательно вычислимую) множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1 с набором $\overrightarrow{s}$ параметров, определяющую, в свою очередь, множество $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$.

Прежде, чем перейти к заданию множества $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r}$, определим несколько вспомогательных понятий и конструкций.

Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — наборы элементов множеств S или S_n, где $n \in \omega$. Будем использовать запись $\langle \overrightarrow{a}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{b}; =\rangle$, если выполняются равенство $\mathrm{lh}(\overrightarrow{a}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{b})$, а также соотношение $(a_i = a_j) \Leftrightarrow (b_i = b_j)$, для всех $i, j \in \omega$ $(0 \leqslant i < j < \mathrm{lh}(\overrightarrow{a}))$.

Для использования бескванторных формул на Δ_0-аппроксимациях будем активно использовать следующее

Замечание 3. Пусть $m \in \omega$ и пусть $\varphi(\overrightarrow{y})$ — бескванторная формула сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ от свободных переменных $\overrightarrow{y}$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{y}) \leqslant 2m + 2$ (свободными могут быть как основные, так и дополнительные переменные). Тогда имеют место следующие соотношения:

(1): для любых $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y})}$ и $\overrightarrow{b} \in \mathrm{S}_m^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y})}$ справедлива эквивалентность

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_m \models \varphi(\overrightarrow{b}),$$

как только выполняются соотношения

$$\gamma_m(\overrightarrow{b}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{a}) \restriction (m + 1) \text{ и } \langle \overrightarrow{a}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{b}; =\rangle;$$

(2): для любых $n \in \omega$, $n > m$, кортежей $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y})}$ и $\overrightarrow{b} \in \mathrm{S}_m^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y})}$ справедлива эквивалентность

$$\mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_m \models \varphi(\overrightarrow{b}),$$

как только выполняются соотношения

$$\gamma_m(\overrightarrow{b}) = \gamma_n(\overrightarrow{a}) \restriction (m+1) \text{ и } \langle \overrightarrow{a}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{b}; =\rangle.$$

Условия (**1**), (**2**) являются переформулировками для множества бескванторных предложений структуры $(\mathfrak{M}_m, \overrightarrow{b})$, где $\overrightarrow{b}$ — кортеж элементов $\mathfrak{M}_m$. ◇

Определение 7. Возьмём сначала числа $m, k \in \omega$ и набор $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов из S, для которых имеет место неравенство $m + 1 \geqslant \max\{\log_2(r_k),\, n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\}$. Под *СДНФ сигнатуры* $\sigma_1^{(m)}$ будем понимать формулу

$$\varphi(u_0, u_1, \ldots, u_{n_k-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1})$$

этой сигнатуры, полученную как результат следующей подстановки СДНФ логики высказываний, где x — пропозициональная переменная, $\top$ и $\bot$ — константные символы, которые интерпретируются как соответственно тождественно истинное предложение и тождественно ложная формула:
- $\bot$ заменяется на $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$;
- $\top$ заменяется на $(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$;
- x можно заменить на одну из следующих атомарных формул (в скобках указано общее количество попарно различных атомарных формул сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ такого вида):
  - $\mathrm{R}_l(u_i)$, где $i, l \in \omega$, $l \leqslant m$, $i < n_k$ (их количество равняется $n_k \cdot (m+1)$);
  - $(u_i \approx v_j)$, где $i, j \in \omega$, $i < n_k$, $j < \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$ (их количество равняется $n_k \cdot \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$);
  - $(u_i \approx u_j)$, где $i, j \in \omega$, $i < j < n_k$ (их количество равняется $\frac{n_k \cdot (n_k-1)}{2}$; входят только непосредственно после знака отрицания);
- для каждого $i_0 \in \omega$ $(i_0 < n_k)$ существует не более одного $j_0 \in \omega$ $(j_0 < \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}))$, для которого $(u_{i_0} \approx v_{j_0})$ является конъюнктом;
- для каждого $j_0 \in \omega$ $(j_0 < \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}))$ существует не более одного $i_0 \in \omega$ $(i_0 < n_k)$, для которого $(u_{i_0} \approx v_{j_0})$ является конъюнктом. ◇

Тем самым, любая элементарная конъюнкция СДНФ (рассмотрением СДНФ такого вида мы и ограничимся) будет состоять либо из одного конъюнкта, либо из $\frac{1}{2} \cdot (n_k \cdot (n_k + 2 \cdot m + 2 \cdot \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) + 1))$ конъюнктов. Кроме того, полагаем, что позиции атомарных формул (вместе со своими отрицаниями) в СДНФ однозначно задаются порядком на их номерах в гёделевой нумерации.

Нетрудно также понять, что множества решений различных совместимых элементарных конъюнкций СДНФ сигнатуры σ_1 ($\sigma_1^{(m)}$ для фиксированного $m \in \omega$) от одного и того же наперёд заданного набора параметров различны (не пересекаются). Кроме того, каковы бы ни были $a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$, $\overrightarrow{s} \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$ и $m \in \omega$, удовлетворяющие условию $m+1 \geqslant \max\{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}), \mathrm{rnk}(a), |\mathrm{sp}(a)|\}$, найдётся элементарная конъюнкция СДНФ $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ от наборов $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ попарно различных основных и дополнительных переменных длин $|\mathrm{sp}(a)|$ и $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$ соответственно, такая что $a = t_k(\overrightarrow{a})$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$ для подходящих $k \in \omega$ и $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{\neq}^{|\mathrm{sp}(a)|}$.

Пусть также переменные списка $\overrightarrow{v}$ принимают в качестве значений попарно различные параметры, составляющие набор $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}_0\hat{\ }\overrightarrow{s}_1\hat{\ }\ldots\hat{\ }\overrightarrow{s}_{q-1}$, где $q \in \omega$, причём непустой кортеж $\overrightarrow{s}_i$ является кортежем вида II для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, все компоненты которого являются $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодами множества $C_i \subseteq \omega$, где $i \in \omega$, $i < q$; кроме того, имеет место система неравенств $C_0 \sqsubset C_1 \sqsubset \ldots \sqsubset C_{q-1}$. Будем также считать, что выполняется равенство $\gamma_{\mathcal{S}}(r) = A \subseteq \omega$.

Зафиксируем A-вычислимую последовательность $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$, определяющую $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ (детальное построение такой последовательности можно найти во второй части).

Определение 8. Зададим теперь $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ как множество, удовлетворяющее следующим условиям:

(C1): $\langle\!\langle 0, m, k, \varphi\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если выполняется следующее (здесь $m, k \in \omega$ и φ — гёделев номер формулы):

a: $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) \leqslant m+1$ и $t_k(\overrightarrow{b}) \in \mathbb{HF}_m(\mathfrak{M}_m)$ для подходящего непустого кортежа $\overrightarrow{b} \in (\mathrm{S}_m)_{\neq}^{n_k}$ (это обстоятельство равносильно тому, что имеют место соотношения $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant m+1$ и $n_k > 0$);

b: $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ — элементарная конъюнкция СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$, не совпадающая ни с $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$, ни с $(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ (здесь $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$);

c: $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \exists \overrightarrow{u}\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$;

d: $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \to \bigvee\{\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in A_k\})$ для любых $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$;

(C2): производим (**C1**) для всех $m, k \in \omega$ и формул φ из (**C1a**), (**C1b**);

(C3): $\langle\!\langle 0, m, k, (\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если $m, k \in \omega$ таковы, что $n_k = 0$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi(\overrightarrow{s})$ для некоторой бескванторной формулы $\psi(\overrightarrow{v}) \in A_k$, а также $t_k(\lambda) \in \mathbb{HF}_m(\mathfrak{M}_m)$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) \leqslant m+1$ (последние два условия равносильны неравенству $\max\{\log_2(r_k), \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant m+1$);

(C4): $\langle\!\langle 0, m_0, k_0, \ulcorner(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\urcorner\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$, если после обработки всех формул φ из (**C1a**), (**C1b**) и (**C3**) для заданных $m_0, k_0 \in \omega$, удовлетворяющих неравенству $\max\{\log_2(r_{k_0}), n_{k_0}, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant m_0 + 1$, множество $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$ не приобрело элементов вида $\langle\!\langle 0, m_0, k_0, \cdot\rangle\!\rangle$;

(C5): $\langle\!\langle i+2, m\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$, если $m \in C_i$ $(m, i \in \omega;\ i < q)$;

(C6): $\langle\!\langle 1, i\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$, если $\langle\!\langle 1, i\rangle\!\rangle \notin C_i$ $(i \in \omega,\ i < q)$;

(C7): $\langle\!\langle 1, p_0^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_0)} \cdot p_1^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_1)} \cdot \ldots \cdot p_{q-1}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_{q-1})}\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$, где p_i, $i \in \omega$ — простое число с номером i в порядке возрастания (к примеру, $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5, \ldots$); если $q = 0$ (или, что то же самое, $\overrightarrow{s} = \lambda$), то $\langle\!\langle 1, 1\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$;

(C8): множество $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$ формируется полностью к данному моменту. $\diamond$

Конструкция построения множества $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$ может быть выбрана вычислимой относительно оракула $(A \oplus (C_0 \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{q-1}))'$, поэтому $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r} \in \mathcal{S}$ (подробно этот факт, носящий ключевой характер для статьи, обсуждается во второй части).

Множество $A_{\Phi,s\hat{}r}$ определяет $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$ в следующем смысле (см. вторую часть):

$$\begin{aligned}(5)\qquad &\{a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S} \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(a, \overrightarrow{s}\hat{}r)\} = \{t_k(\overrightarrow{a}) \mid k \in \omega,\ \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k},\\ &\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \text{ для некоторых } m \in \omega \text{ и } \langle\!\langle 0, m, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}\}.\end{aligned}$$

Сейчас зададим понятие минимальности кортежа параметров, участвующих в определении Σ-формулы. Данное свойство будет задаваться для набора, составленного из кортежей вида II, а кортеж вида I всегда будет состоять из одного элемента.

Определение 9. Пусть даны $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-в.п. множество $D \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ и набор $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов из S. Будем называть $\overrightarrow{s}$ *минимально возможным набором параметров для* D, если будут выполняться следующие условия:

• существует Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$, определяющая D, при этом параметр r имеет вид I для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$, а набор $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей вида II для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$;

• если Σ-формула $\Phi'(x, \overrightarrow{s}'\hat{}r')$ определяет D, причём параметр r' имеет вид I для $\Phi'(x, \overrightarrow{s}'\hat{}r')$, а набор $\overrightarrow{s}'$ составлен из кортежей вида II для $\Phi'(x, \overrightarrow{s}'\hat{}r')$, то выполняется соотношение $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$. $\diamond$

Будем использовать сокращение '$\overrightarrow{s}$ — *минимально возможный набор* (или *кортеж*) *для* $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$', если этот набор является таковым для решения Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$.

Определение 10. Зададим теперь подмножество $W_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$ натуральных чисел, изменив при этом конструкцию из [2] (здесь Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$ и набор $\overrightarrow{s}\hat{}r$ её параметров описаны перед определением 8; кроме того, считаем, что $\overrightarrow{s}$ минимально возможен для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$). Натуральное число

$\langle\!\langle n_w, \mathfrak{G}_w \rangle\!\rangle$ помещаем в $W_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если оно удовлетворяют следующим условиям:

(W1): все необходимые свойства такие, как быть минимально возможным для набора и отсутствия сохраняемости решения перестановками, будут проверяться на образе элемента $\mathbb{HF}_{n_w}(\mathfrak{M}_{n_w})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$); см. определение 11;

(W2): группа $\mathfrak{G}_w$ перестановок на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, действующая инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ для всех $i \in \omega$, $i < q$, и отвечающая за свойство сохраняемости решения Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ (а именно, имеет место соотношение $\pi \in \mathfrak{G}_w$, если и только если справедливо отношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x(\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \leftrightarrow \Phi(x, \pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r)))$; аппроксимация действия этой группы $\mathfrak{G}_w$ описывается в (**N1**), (**N2**); здесь и далее $\mathfrak{G}_w$ отождествляется со своим сильным индексом;

(W3): $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) \leqslant n_w + 1$;

(W4): $C_i \restriction (n_w + 1) \sqsubset C_j \restriction (n_w + 1)$ для всех $i, j \in \omega$, $i < j < q$ (как выше, $C_i = \gamma_{\mathcal{S}}(s)$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$, $i \in \omega$, $i < q$). $\diamond$

Нас будет прежде всего интересовать наименьший элемент множества, заданного в определении 10 (разумеется, если $W_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r} \neq \varnothing$; здесь следует вспомнить принцип наименьшего числа для множества натуральных чисел).

Определение 11. Пусть даны Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и $\langle\!\langle n_w, \mathfrak{G}_w \rangle\!\rangle \in W_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, как в определении 10. *Аппроксимации* для отношения равенства Σ-множеств, задаваемого группой $\mathfrak{G}_w$ перестановок, и свойства минимальности для набора параметров определим следующим образом:

(N1): пусть даны $n \in \omega$, перестановка $\pi \in \mathfrak{G}_w$ и набор $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющий равенству $\gamma_n(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n + 1)$; тогда имеет место следующее равенство для всех $k \in \omega$:

(6)
$$\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}) \text{ для некоторого } \langle\!\langle 0, n, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} =$$
$$= \{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}, \pi(\overrightarrow{x})) \text{ для некоторого } \langle\!\langle 0, n, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}\};$$

(N2): пусть даны перестановка π на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, удовлетворяющая соотношению $\pi \notin \mathfrak{G}_w$ и действующая инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ для всех $i \in \omega$, $i < q$, и набор $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_{n_w})_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющий равенству $\gamma_{n_w}(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n_w + 1)$; тогда найдётся $k \in \omega$, для которого выполняется следующее:

$$\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{n_w}^{n_k}, \mathfrak{M}_{n_w} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}) \text{ для некоторого } \langle\!\langle 0, n_w, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} \neq$$
$$\neq \{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{n_w}^{n_k}, \mathfrak{M}_{n_w} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \pi(\overrightarrow{x})) \text{ для некоторого } \langle\!\langle 0, n_w, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}\};$$

(N3): если $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) > 0$, то найдётся кортеж $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_{n_w})_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющий равенству $\gamma_{n_w}(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n_w + 1)$, такой что для каждого кортежа $\overrightarrow{x}' \in (\mathrm{S}_{n_w})_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$, удовлетворяющего соотношению $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}') \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{x})$, существует $k \in \omega$, для которого имеет место неравенство $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant n_w + 1$, а также выполняется следующее соотношение:

(7)

$$\{t_k(\overrightarrow{a}) | \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}_{n_w}, \mathfrak{M}_{n_w} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}) \text{ для некоторого } \langle\!\langle 0, n_w, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} \neq \\ \neq \{t_k(\overrightarrow{a}) | \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}_{n_w}, \mathfrak{M}_n \models \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}')\},$$

для любой бескванторной формулы $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n_w)}$ от наборов $\overrightarrow{u} = \langle u_0, u_1, \ldots, u_{n_k-1}\rangle$, $\overrightarrow{v} = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-2}\rangle$ попарно различных соответственно основных и дополнительных переменных. ◇

Во второй части показано, что на уровне n_w условие (**N3**) гарантирует свойство для $\overrightarrow{s}$ быть минимально возможным набором параметров Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а наличие условия (**N2**) обеспечивает обстоятельство, что любая перестановка $\pi \notin \mathfrak{G}_w$ не сохраняет решение рассматриваемой Σ-формулы. Для того, чтобы гарантировать свойство сохраняемости решения для всякой перестановки $\pi \in \mathfrak{G}_w$, следует осуществлять проверку соотношения (6) на всех уровнях.

Определение 12. Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ — Σ-формула с параметром r, имеющим вид I, и набором $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов из S, составленным из кортежей вида II, причём набор $\gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s})$ представляет собой последовательность подмножеств натуральных чисел, возрастающих относительно $\sqsubseteq$; кроме того, набор $\overrightarrow{s}$ минимально возможен для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$. Пусть также π — перестановка на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, действующая инвариантно на классах R-эквивалентности. Зададим *действие* $\pi^{\#}(A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r})$ перестановки π на множестве $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ как $\pi^{\#}(A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}) \leftrightharpoons A_{\Phi, \pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r}$. Другими словами, $\pi^{\#}(A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r})$ определяется следующим образом:

(1) для всех $i \geqslant 1$ и $m \in \omega$ имеет место соотношение $\langle\!\langle i, m \rangle\!\rangle \in \pi^{\#}(A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}) \Leftrightarrow \langle\!\langle i, m \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$;

(2) помещаем $\langle\!\langle 0, m, k, \psi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \rangle\!\rangle$ в $\pi^{\#}(A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r})$, если ψ_0 — элементарная конъюнкция СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$, $\langle\!\langle 0, m, k, \varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ и

$$\mathfrak{M}_m \models \forall \overrightarrow{u}(\psi_0(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{s})) \leftrightarrow \varphi_0(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{s})))$$

(отметим, что формула ψ_0 находится единственным образом по $\varphi_0(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{v}))$ при учёте свойства совместимости формулы и количества её основных переменных, где $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$ и $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$). ◇

Множества вида $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, где их атрибуты определены выше, определяющие одно и то же Σ-множество (в смысле (5)), совпадают с точностью до действия указанной в определении 10 группы перестановок (см. вторую часть).

Для построения негативной $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации воспользуемся конструкцией Дж. Сакса построения фридберговой нумерации (см., например, [16];

для допустимых множеств, соответствующих ординальной вычислимости, проблема существования фридберговой нумерации обсуждается также в [17, 18, 19]). В отличие от оригинальной конструкции, здесь будет использоваться бесконечно много "наибольших элементов", что во многом связано с тем, что рассматриваемая структура обладает большим количеством нетривиальных автоморфизмов.

Рассуждения практически идентичны на подмножествах множеств δF из леммы 1 и $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$, поэтому для простоты изложения рассмотрим второй случай.

Семейством "наибольших элементов" будет $\mathcal{R}_0$, которое будет "нумероваться" $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерацией ν_0 следующим образом: упорядоченной паре $\langle\varnothing,\varnothing\rangle$ сопоставим множество $\nu_0(\langle\varnothing,\varnothing\rangle) \rightleftharpoons HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$; если же пара имеет вид $\langle k, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle$ (здесь $k \in \omega$, $n_k > 0$ и $\overrightarrow{s} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n_k-1}\rangle \in \mathrm{S}^{n_k}_{\neq}$, причём $t_k(\overrightarrow{s}) = \{n, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\}$ для некоторого $n \in \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})))$, то положим

$$\nu_0(\langle k, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle) \rightleftharpoons \{t_k(\overrightarrow{s})\}\cup$$

$$\cup\{a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S} | \neg\exists \overrightarrow{w} \in \mathrm{S}^{n_k}\big((\bigwedge_{0\leqslant i<j<n_k} \neg(w_i \approx w_j)) \wedge (a \approx t_k(\overrightarrow{w}))\big)\} =$$

$$= \{t_k(\overrightarrow{s})\} \cup \{a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S} | \exists l \exists \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_l}_{\neq}\big(\neg(l = k) \wedge (a = t_l(\overrightarrow{a}))\big)\}.$$

Отметим, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерация ν_0 является однозначной вычислимой. Более того, семейство $\mathcal{R}_0$ имеет также бесконечно много множеств, инвариантной группой которых является $\mathfrak{S}_k$, для каждого $k \in \omega$.

Как и выше, положим

$$\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \rightleftharpoons \{a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \mid \mathrm{rnk}(a) \leqslant 2^{n+1},\ |\mathrm{sp}(a)| \leqslant n+1\}$$

для каждого $n \in \omega$. Определим $\mathcal{R}_1$ как множество аппроксимаций семейства $\mathcal{R}_0$ (а именно, в $\mathcal{R}_1$ поместим множество $A \cap \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, если $A \in \mathcal{R}_0$). Зададим однозначную вычислимую $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерацию ν_1 семейства $\mathcal{R}_1$ следующим образом ($n \in \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$):

$$\nu_1(\langle\langle\!\langle 0, n\rangle\!\rangle, \varnothing\rangle) \rightleftharpoons \nu_0(\langle\varnothing,\varnothing\rangle) \cap \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}),$$

$$\nu_1(\langle\langle\!\langle k, n\rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle) \rightleftharpoons \nu_0(\langle k, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle) \cap \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$$

(во втором случае $k \in \mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$ и набор $\overrightarrow{s} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n_k-1}\rangle \in \mathrm{S}^{n_k}_{\neq}$ будут удовлетворять условию $\max\{\log_2(r_k), n_k\} \leqslant n+1$).

Перейдём теперь к описанию конструкции. Каждый шаг конструкции будет отвечать за некоторый конечный набор конечных непустых функций τ с $\delta\tau \subseteq \omega$ и $\rho\tau \subseteq \{0, 1\}$ (обозначим множество всех рассматриваемых на шагах конструкции функций через $\mathcal{T}$). Множество $\mathcal{T}$ будет вычислимым относительно естественной кодировки натуральными числами.

Конструкция также будет удовлетворять следующему условию: если $\tau \in \mathcal{T}$ появляется на шаге $n \in \omega$, при этом она получается из $\tau' \in \mathcal{T}$ в процессе конструкции (и в этом случае имеем $\tau' \trianglelefteq \tau$), то τ' появляется на некотором шаге $m < n$. Обращаем внимание на то, что условие $\tau_0 \trianglelefteq \tau_1$ может и не гарантировать свойства для τ_1 быть полученной из τ_0 за несколько шагов, даже в том случае, когда $\tau_0, \tau_1 \in \mathcal{T}$. Если $\tau \in \mathcal{T}$ получена за несколько шагов конструкции из $\tau' \in \mathcal{T}$ (фактически речь идёт о рефлексивном и транзитивном замыкании), то будем обозначать это обстоятельство как $\tau' \trianglelefteq' \tau$.

Далее, будем рассматривать *последовательность* $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$, удовлетворяющую следующим условиям:

• τ_0 — функция типа (**0**);

• функция τ_{3i+k+1} типа (**k+1**) непосредственно получена из τ_{3i+k}, где $i \in \omega$, $k = 0, 1, 2$.

Пределом этой последовательности будем называть множество $\bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$. Будем записывать $\tau_n \trianglelefteq' \bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$ для любого $n \in \omega$.

Кроме того, конструкция будет удовлетворять следующим условиям:

1) пределом каждой последовательности $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$ будет множество $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ для подходящей Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, где параметр r имеет вид I, а кортеж $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов из S составлен из кортежей вида II, причём $\overrightarrow{s}$ является минимально возможным для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а $\gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s})$ упорядочен по возрастанию относительно $\sqsubseteq$;

2) пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ такова, что параметр r имеет вид I, а кортеж $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов из S составлен из кортежей вида II, причём $\overrightarrow{s}$ является минимально возможным для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а $\gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s})$ упорядочен по возрастанию относительно $\sqsubseteq$; тогда $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ будет пределом некоторой последовательности $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$;

3) какова бы ни была последовательность $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$, существует не более одного числа $n' \in \omega$ такого, что на шаге, посвящённом данной функции, будет меняться $\delta\nu_2$; в этом случае функция $\tau_{n'}$ будет типа (**0**) или (**3**), а в $\delta\nu_2$ будут помещены кортежи вида $\langle \tau_{n'}; \tilde{r}; \overrightarrow{s} \rangle$ для подходящего кортежа $\tilde{r}\hat{\ }\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов S фиксированной длины, что эффективно задаётся по $\tau_{n'}$;

4) различные последовательности функций из $\mathcal{T}$ имеют различные пределы.

Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ такова, что параметр r имеет вид I, а кортеж $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов составлен из кортежей вида II, причём $\overrightarrow{s}$ является минимально возможным для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а $\gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s})$ упорядочен по возрастанию относительно $\sqsubseteq$. Пусть также π — перестановка множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, действующая инвариантно на классах R-эквивалентности. Если $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ является пределом последовательности $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$, то по данной последовательности нетрудно построить функцию $\tau'_n =$

$\pi^{\#}(A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}) \upharpoonright \delta\tau_n$ для каждого $n \in \omega$. Тогда $\{\tau'_n\}_{n\in\omega}$ будет последовательностью функций из $\mathcal{T}$, пределом которой будет $\pi^{\#}(A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r})$. В этом случае полагаем $\pi^{\#}(\tau_n) \leftleftharpoons \tau'_n$ для всех $n \in \omega$. Действие перестановок на функциях из $\mathcal{T}$ задаётся корректно, что будет следовать из их построения. Заметим, что если τ — функция типа ($\mathbf{0}$), $h_0(\tau) = \langle\!\langle n, \mathfrak{G}_\tau \rangle\!\rangle$ и действие $\pi^{\#}(\tau)$ перестановки π на ней задано, то будет выполняться равенство $h_0(\pi^{\#}(\tau)) = \langle\!\langle n, \pi \circ \mathfrak{G}_\tau \circ \pi^{-1} \rangle\!\rangle$ (функция h_0 определяется в описании функций типа ($\mathbf{0}$) и отвечает за наименьший элемент множества вида $W_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$).

Детальное строение соответствия между шагами и конечными наборами конечных непустых функций не столь важно: принципиальным является только наличие вычислимого представления для него. На каждом шаге будем строить атрибуты соответственно негативной и однозначной вычислимых $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумераций ν_2 и ν_3: области их задания, $\Gamma^*_{\nu_2}$ и $\Gamma^*_{\nu_3}$, а также $N_0 \leftleftharpoons (\delta\nu_2 \times \delta\nu_2) \setminus \eta_{\nu_2}$.

Негативная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерация ν_2 будет задаваться на кортежах, первыми координатами которых будут натуральные числа, индексы конечных непустых функций. При этом если кортежи будут "нумеровать" одинаковые множества, то первые координаты у них будут совпадать. Поэтому N_0 будем описывать только для кортежей, имеющих одинаковые первые координаты.

В дальнейшем конечные функции, заданные на натуральных числах и принимающие значения $\subseteq \{0, 1\}$, в частности, бинарные строки на натуральных числах будем отождествлять с их сильно вычислимыми индексами.

($\mathbf{0}$) Минимальными элементами из $\mathcal{T}$, участвующими в кодировании непустых Σ-подмножеств и являющимися началами соответствующих последовательностей, будут конечные непустые функции τ (которые и будут принимать тип ($\mathbf{0}$)), удовлетворяющие следующим условиям для подходящего $n \in \omega$ (при этом число n будет играть роль n_w из определения 10; фактически здесь повторяются условия из определений 8–11, а также используется замечание 3):
• (см. (**C6**), (**C7**)) имеется $q_0 + 1$ чисел вида $\langle\!\langle 1, \cdot \rangle\!\rangle$ в $\delta\tau$ для подходящего $q_0 \in \omega$, причём выполняется следующее:

(1) (в случае, когда $q_0 > 0$) $\delta\tau \supseteq \{\langle\!\langle 1, i \rangle\!\rangle \mid i \in \omega, i < q_0\}$ и, к тому же, оставшееся число $\langle\!\langle 1, c_0 \rangle\!\rangle$ из $\delta\tau$ таково, что $c_0 = p_0^{m_0} \cdot p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_{q_0-1}^{m_{q_0-1}}$, причём $m_i > 0$ для всех $i \in \omega$ ($i < q_0$) и $\tau(\langle\!\langle 1, c_0 \rangle\!\rangle) = 1$; в дальнейшем $l_0 \leftleftharpoons m_0 + m_1 + \ldots + m_{q_0-1}$ (здесь, как и в (**C7**), p_i, $i \in \omega$ — простое число с номером i в порядке возрастания);

(2) (в случае, когда $q_0 = 0$) $\delta\tau \supseteq \{\langle\!\langle 1, 1 \rangle\!\rangle\}$ и $\tau(\langle\!\langle 1, 1 \rangle\!\rangle) = 1$; в дальнейшем $l_0 \leftleftharpoons 0$;

• (см. (**C5**), (**C6**), (**W1**)) для каждого $i \in \omega$ ($i < q_0$, где q_0 определено выше) имеем $\delta\tau \cap \{\langle\!\langle i+2, m\rangle\!\rangle \mid m \in \omega\} = \{\langle\!\langle i+2, m\rangle\!\rangle \mid m \in \omega, m \leqslant n$ или $m = \langle\!\langle 1, i\rangle\!\rangle\}$;
• (см. (**C5**), (**C6**)) кроме того, выполняется условие $\tau(\langle\!\langle 1, i\rangle\!\rangle) \neq \tau(\langle\!\langle i+2, \langle\!\langle 1, i\rangle\!\rangle\rangle\!\rangle)$ для всех $i \in \omega$ ($i < q_0$);
• (см. (**W4**)) для каждого $i \in \omega$ ($i < q_0$) положим $\tau_i(m) \leftrightharpoons \tau(\langle\!\langle i+2, m\rangle\!\rangle)$ для всех $m \in \omega$ ($m \leqslant n$) и $\delta\tau_i = \{m \in \omega \mid m \leqslant n\}$; тогда должно выполняться $\tau_i \sqsubset \tau_j$, как только $i < j < q_0$;
• (здесь приводятся понятия и обозначения, используемые в дальнейшем) положим $\overrightarrow{x}^n \in (\mathrm{S}_n)^{l_0}_{\neq}$ как набор $\overrightarrow{x}^n_0 \hat{}\, \overrightarrow{x}^n_1 \hat{}\, \ldots \hat{}\, \overrightarrow{x}^n_{q_0-1}$, удовлетворяющий условиям $\mathrm{lh}(\overrightarrow{x}^n_i) = m_i$ и $\gamma_n(x) = \tau_i$ для всех $x \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n_i)$, где $i \in \omega$ ($i < q_0$); положим также в дальнейшем в качестве $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ наборы попарно различных основных и дополнительных переменных длин n_k и l_0, $l_0 - 1$ соответственно, где $k \in \omega$ — фиксированное натуральное число ($\overrightarrow{v}'$ определяется только в случае, когда $l_0 > 0$); кроме того, пусть $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ — обозначение элементарной конъюнкции СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$, отличной от $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$, от соответствующих наборов переменных, где m — заданное натуральное число, $m \leqslant n$;
• (см. (**C1**)–(**C4**), (**W3**)) среди чисел вида $\langle\!\langle 0, m, k, \varphi\rangle\!\rangle$, в $\delta\tau$ попадают в точности те, которые удовлетворяют неравенствам $m \leqslant n$, $m+1 \geqslant \max\{l_0, n_k, \log_2(r_k)\}$, а также одному из следующих соотношений:

(1) (в случае, когда $n_k = 0$) $\varphi \in \{(\mathbf{0} \approx \mathbf{0}), \neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\}$;
(2) (в случае, когда $n_k > 0$) φ есть $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ или $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;

• (см. (**C3**), (**C4**), (**W3**)) пусть $n_k = 0$, $m \leqslant n$ и $\max\{\log_2(r_k), l_0\} \leqslant m+1$; тогда выполняются следующие свойства:

(1) $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, (\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\rangle\!\rangle) \neq \tau(\langle\!\langle 0, m, k, \neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\rangle\!\rangle)$;
(2) если, к тому же, $m+1 \leqslant n$, то $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, \varphi\rangle\!\rangle) = \tau(\langle\!\langle 0, m+1, k, \varphi\rangle\!\rangle)$ для любой $\varphi \in \{\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0}), (\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\}$;

• (см. (**C1**)–(**C3**), (**W3**)) пусть $n_k > 0$, $m \leqslant n$ и $\max\{\log_2(r_k), l_0, n_k\} \leqslant m+1$; тогда выполняются следующие свойства:

(1) если $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, \neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\rangle\!\rangle) = 1$, то $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\rangle\!\rangle) = 0$ для любой $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;
(2) если $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, \neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\rangle\!\rangle) = 0$, то $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\rangle\!\rangle) = 1$ для некоторой $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;
(3) если $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\rangle\!\rangle) = 1$, то имеет место соотношение $\mathfrak{M}_n \models \exists \overrightarrow{u} \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^n)$;
(4) если $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\rangle\!\rangle) = 1$ и, к тому же, $m+1 \leqslant n$, то $\tau(\langle\!\langle 0, m+1, k, \varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}\rangle\!\rangle) = 1$, где $\varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}$ совпадает, с точностью до перестановки конъюнктов, с формулой $(\varphi \wedge \bigwedge_{i=0}^{n_k-1} \mathrm{R}^{\varepsilon_i}_{m+1}(u_i))$ и удовлетворяет условию $\mathfrak{M}_n \models \exists \overrightarrow{u} \varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x})$ (здесь $\overrightarrow{\varepsilon} = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_k-1}\rangle \in \{0, 1\}^{n_k}$);

(5) пусть снова $m+1 \leqslant n$, а $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ такова, что $\tau(\langle\!\langle 0, m+1, k, \varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}\rangle\!\rangle) = 1$ ($\varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}$ определена выше) для каждого $\overrightarrow{\varepsilon} \in \{0, 1\}^{n_k}$, удовлетворяющего условию $\mathfrak{M}_n \models \exists \overrightarrow{u} \varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^n)$; тогда $\tau(\langle\!\langle 0, m, k, \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\rangle\!\rangle) = 1$;

• (свойство непустоты множества) существует $k \in \omega$, для которого выполняется равенство $\tau(\langle\!\langle 0, n, k, \neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\rangle\!\rangle) = 0$;

• (см. (**N3**) и определение 9) пусть $l_0 > 0$ и кортеж $\overrightarrow{x}' \in (\mathrm{S}_n)^{l_0-1}_{\neq}$ таковы, что $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}') \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n)$; тогда существует $k \in \omega$, для которого имеет место соотношение

$$\{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}^n), \tau(\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\} \neq$$
$$\neq \{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \psi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}')\}$$

для любой бескванторной формулы $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}')$ сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$;

• (см. (**N1**), (**N2**), (**W2**)) определим группу $\mathfrak{G}_\tau$ как множество всех перестановок π множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n)$, действующих инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n_i)$ для всех $i \in \omega$ $(i < q_0)$, а также удовлетворяющих соотношению (здесь $k \in \omega$)

$$\{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}^n), \tau(\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\} =$$
$$= \{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{c}, \pi(\overrightarrow{x}^n)), \tau(\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\};$$

• (число $\langle\!\langle n, \mathfrak{G}_\tau\rangle\!\rangle$ наименьшее; см. определение 10) выполняется хотя бы одно из следующих условий (в случае, когда $q_0 > 0$):

(1) $\tau_i \restriction n = \tau_{i+1} \restriction n$ для некоторого $i \in \omega$ $(i < q_0 - 1)$;

(2) если $n > 0$, то найдётся кортеж $\overrightarrow{x}' \in (\mathrm{S}_n)^{l_0-1}_{\neq}$ такой, что $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}') \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n)$, и для каждого $k \in \omega$ выполняется соотношение

$$\{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}^n), \tau(\langle\!\langle 0, n-1, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\} =$$
$$= \{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \psi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}')\}$$

для некоторой бескванторной формулы $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}')$ сигнатуры $\sigma_1^{(n-1)}$;

(3) если $n > 0$, то существует перестановка π множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n)$, действующая инвариантно относительно $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n_i)$ для всех $i \in \omega$ $(i < q_0)$, но $\pi \notin \mathfrak{G}_\tau$, удовлетворяющая при этом следующему соотношению для всех $k \in \omega$:

$$\{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}^n), \tau(\langle\!\langle 0, n-1, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\} =$$
$$= \{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{c}, \pi(\overrightarrow{x}^n)), \tau(\langle\!\langle 0, n-1, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\}.$$

В этом случае полагаем $h_0(\tau) \leftrightharpoons \langle\!\langle n, \mathfrak{G}_\tau\rangle\!\rangle$; отметим, что функция h_0 отвечает за наименьший элемент множества вида $W_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\, r}$, где $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\, r)$ — Σ-формула, параметр r которого имеет вид I, а минимально возможный набор $\overrightarrow{s}$ для неё составлен из кортежей вида II в порядке возрастания их $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодов относительно $\sqsubseteq$; при этом $\tau \trianglelefteq' A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\, r}$.

На функциях типа (**0**) будем расставлять метки трёх видов.

- Функция τ *приобретает метку вида* 0, если она удовлетворяет следующим условиям:

• $\tau \leqslant \pi^{\#}(\tau)$ для любой перестановки π множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n)$, действующей инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n_i)$ для всех $i \in \omega$ $(i < q_0)$;
• $\{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in \mathrm{S}^{n_k},\ k \in \omega,\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s}),\ \tau(\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\} \notin \mathcal{R}_1$ (согласно замечанию 3, это условие эффективно проверяется на $\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)$ и не зависит от выбора Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$).

- Функция τ *приобретает метку вида* 1, если она удовлетворяет следующим условиям:
• $\tau \leqslant \pi^{\#}(\tau)$ для любой перестановки π множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n)$, действующей инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n_i)$ для всех $i \in \omega$ $(i < q_0)$;
• $\{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in \mathrm{S}^{n_k},\ k \in \omega,\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s}),\ \tau(\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\} \in \mathcal{R}_1$ (согласно замечанию 3, это условие также эффективно проверяется на $\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)$ и не зависит от выбора Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$).

- Функция τ *приобретает метку вида* 2, если $\pi^{\#}(\tau) < \tau$ для некоторой перестановки π множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n)$, действующей инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}^n_i)$ для всех $i \in \omega$ $(i < q_0)$.

Шаг для функции τ типа $(\mathbf{0})$. Если τ приобретает метку 0, то помещаем в $\delta\nu_2$ кортеж $\langle \tau; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle \in \omega \times \mathrm{S} \times \mathrm{S}^{m_0}_{\neq} \times \mathrm{S}^{m_1}_{\neq} \times \ldots \times \mathrm{S}^{m_{q_0-1}}_{\neq}$, удовлетворяющий формуле

$$\phi^{\tau}_0(\langle \tau; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle) \leftrightharpoons \bigwedge\{\mathrm{R}^{\tau(m)}_m(\tilde{r}) \mid m \in \delta\tau\} \wedge$$

$$\wedge \bigwedge\{\mathrm{R}^{\tau(\langle\!\langle i+2, m\rangle\!\rangle)}_m(s) \,|\, s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i),\ i < q_0,\ \langle\!\langle i+2, m\rangle\!\rangle \in \delta\tau\},$$

в определение N_0 помещаем формулу

$$\phi^{\tau}_1(\langle \tau; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle, \langle \tau; \tilde{r}'; \overrightarrow{s}'_0; \overrightarrow{s}'_1; \ldots; \overrightarrow{s}'_{q_0-1}\rangle) \leftrightharpoons$$

$$\leftrightharpoons \phi^{\tau}_0(\langle \tau; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle) \wedge \phi^{\tau}_0(\langle \tau; \tilde{r}'; \overrightarrow{s}'_0; \overrightarrow{s}'_1; \ldots; \overrightarrow{s}'_{q_0-1}\rangle) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge\{(\pi(\langle \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle) \neq \langle \overrightarrow{s}'_0; \overrightarrow{s}'_1; \ldots; \overrightarrow{s}'_{q_0-1}\rangle) \mid \pi \in \mathfrak{G}_{\tau}\},$$

а в определение $\Gamma^*_{\nu_2}$ — последовательность

$$B_k(\tau; \tilde{r}; \overrightarrow{s}) \leftrightharpoons \{\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \mid \tau(\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\}$$

для всех $k \in \omega$ и $\langle \tau; \tilde{r}; \overrightarrow{s}\rangle \in \delta\nu_2$, что возможно, ввиду монотонности отношения истинности по второй координате в четвёрках (см. определение функции типа $(\mathbf{0})$; все атрибуты определены при задании функции τ типа $(\mathbf{0})$). Если функция τ приобретает метку 1 или 2, то ничего не делаем. Функции, полученные из τ, имеющей метку 2, в дальнейшем будем игнорировать, поскольку подходящее множество будет задаваться пределом последовательности функций, началом которой будет служить функция с мѐньшим номером (см. определение 12). Для функции, приобретающей метку вида 1, будем ожидать продолжений, полученных из неё, на которых будет нарушаться второе условие, касающееся множеств семейства $\mathcal{R}_1$.

(**1**) Пусть задана функция τ_1 типа (**0**) или (**3**) с наибольшим номером, полученная из единственной функции τ типа (**0**). Будем строить функцию $\tau_{\overrightarrow{\varepsilon}}$ (которая и будет принимать тип (**1**), где $\overrightarrow{\varepsilon} = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q_0-1} \rangle \in \{0, 1\}^{q_0}$, а q_0 определяется для функции τ типа (**0**)) следующим образом. Пусть $k_i \leftrightharpoons \min\{m \mid \tau_1(\langle\!\langle i+2, m \rangle\!\rangle)\uparrow\}$, где $i \in \omega$ $(i < q_0)$; тогда $\delta\tau_{\overrightarrow{\varepsilon}} = \delta\tau_1 \cup \{\langle\!\langle i+2, k_i \rangle\!\rangle \mid i \in \omega,\, i < q_0\}$ и $\tau_{\overrightarrow{\varepsilon}}(\langle\!\langle i+2, k_i \rangle\!\rangle) \leftrightharpoons \varepsilon_i$ для всех $i \in \omega$ $(i < q_0)$.

Шаг для функций $\tau_{\overrightarrow{\varepsilon}}$ ($\overrightarrow{\varepsilon} \in \{0, 1\}^{q_0}$) типа (**1**), полученной из функции τ_1 типа (**0**) или (**3**). Пусть τ_1 получена из единственной функции τ типа (**0**). Возможны следующие случаи.

- Функция τ приобретает метку 2 или метку 1, но не существует функции τ_0 типа (**3**), $\tau \trianglelefteq' \tau_0 \trianglelefteq' \tau_1$, что на шаге для функции τ_0 меняется $\delta\nu_2$; тогда ничего не делаем.

- Выполняется случай, когда $q_0 = 0$; тогда также ничего не делаем.

- Не выполняются все предыдущие случаи для функций τ, τ_1, а функция τ_0 типа (**0**) или (**3**), $\tau \trianglelefteq' \tau_0 \trianglelefteq' \tau_1$, такова, что на шаге для функции τ_0 меняется $\delta\nu_2$. Возьмём $\overrightarrow{\varepsilon} = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q_0-1} \rangle \in \{0, 1\}^{q_0}$. Тогда в N_0 помещаем формулу

$$\phi_2^{\tau_0,\tau_1,\tau_{\overrightarrow{\varepsilon}}}(\langle \tau_0; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle, \langle \tau_0; \tilde{r}'; \overrightarrow{s}'_0; \overrightarrow{s}'_1; \ldots; \overrightarrow{s}'_{q_0-1}\rangle) \leftrightharpoons$$

$$\bigwedge\{\mathrm{R}_k^{\tau_1(k)}(\tilde{r}) \mid k \in \omega,\, k \in \delta\tau_1\} \wedge \bigwedge\{\mathrm{R}^{\varepsilon_i}(\tilde{r}, \langle\!\langle i+2, k_i \rangle\!\rangle) \mid i \in \omega,\, i < q_0\} \wedge$$

$$\wedge \bigwedge\{\mathrm{R}_k^{\tau_1(k)}(\tilde{r}') \mid k \in \omega,\, k \in \delta\tau_1\} \wedge \bigvee\{\neg\mathrm{R}^{\varepsilon_i}(\tilde{r}', \langle\!\langle i+2, k_i \rangle\!\rangle) \mid i \in \omega,\, i < q_0\}$$

(так как рассматривается вычислимая дизъюнкция, а различия между остальными параметрами записаны в формулах ранее, то здесь они не указываются).

Перейдём к заданию элементов в $\Gamma^*_{\nu_2}$ согласно нарушениям, описанным выше. Сначала зафиксируем строго возрастающую последовательность длины 2^{q_0} (в соответствии с количеством всех бинарных последовательностей длины q_0) натуральных чисел, превышающих ранги всех элементов, участвующих в построении множеств, использованных к данному шагу (включая и элементы, участвующие в построении ν_3). Положим $n_{\overrightarrow{\varepsilon}}$ как натуральное число этой последовательности, соответствующее кортежу $\overrightarrow{\varepsilon} \in \{0, 1\}^{q_0}$. Далее, положим в $\Gamma^*_{\nu_2}$ конъюнкцию следующих выражений для $\langle \tau_0; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle \in \delta\nu_2$ $(\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_i) = m_i,\, i \in \omega,\, i < q_0)$:

- $\mathrm{R}_m^{\tau_1(m)}(\tilde{r})$ для всех $m \in \omega$ $(m \in \delta\tau_1)$;
- $\mathrm{R}^{\varepsilon_i}(\tilde{r}, \langle\!\langle i+2, k_i \rangle\!\rangle)$ для всех $i \in \omega$ $(i < q_0)$;
- $\mathrm{R}_k^{\tau_1(\langle\!\langle i+2,k \rangle\!\rangle)}(s)$ для всех $i \in \omega$ $(i < q_0)$ и $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$, как только $k \in \omega$ и $\langle\!\langle i+2, k \rangle\!\rangle \in \delta\tau_1$;
- $\neg\mathrm{R}^{\varepsilon_i}(s, k_i)$ для некоторых $i \in \omega$ $(i < q_0)$ и $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$;

• $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерацию ν_2 в точке $\langle\tau_0;\tilde{r};\overrightarrow{s}_0;\overrightarrow{s}_1;\ldots;\overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle$ определим следующим образом (здесь $\overrightarrow{s}=\overrightarrow{s}_0\hat{\ }\overrightarrow{s}_1\hat{\ }\ldots\hat{\ }\overrightarrow{s}_{q_0-1}$):

$$\nu_2(\langle\tau_0;\tilde{r};\overrightarrow{s}_0;\overrightarrow{s}_1;\ldots;\overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle)\leftrightharpoons\nu_1(\langle\!\langle k',n'\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s})\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle),$$

где числа k' и n' фиксированы и выбраны так, чтобы выполнялись соотношения $t_{k'}(\overrightarrow{s})=\{n_{\overrightarrow{\varepsilon}},\{\pi(\overrightarrow{s})\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\}$ и $\max\{\log_2(r_{k'}),l_0\}\leqslant n'+1$.

Перейдём теперь к рассмотрению $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации ν_3. Снова возьмём $\overrightarrow{\varepsilon}\in\{0,1\}^{q_0}$ и воспользуемся тем, что имеется лишь конечное число последовательностей функций $\langle\tau_{ij}\mid i<q_0,j<m_i\rangle$, что $\delta\tau_{ij}=\{k\in\omega\mid\tau_{\overrightarrow{\varepsilon}}(\langle\!\langle i+2,k\rangle\!\rangle)\downarrow\}$ для всех $i,j\in\omega$ $(i<q_0,\ j<m_i)$. Пусть набор $\overrightarrow{s}^0=\overrightarrow{s}^0_0\hat{\ }\overrightarrow{s}^0_1\hat{\ }\ldots\hat{\ }\overrightarrow{s}^0_{q_0-1}\in\mathrm{S}^{l_0}_{\neq}$ $(i\in\omega,\ \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}^0_i)=m_i,\ i<q_0)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

• $\mathrm{R}_k^{\tau_{\overrightarrow{\varepsilon}}(\langle\!\langle i+2,k\rangle\!\rangle)}(s)$ для всех $i\in\omega$ $(i<q_0)$ и $s\in\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0_i)$, как только $k\in\omega$ и $\langle\!\langle i+2,k\rangle\!\rangle\in\delta\tau_{\overrightarrow{\varepsilon}}$;

• $\neg\mathrm{R}_k^{\tau_1(\langle\!\langle i+2,k\rangle\!\rangle)}(s)$ для некоторых $i,k\in\omega$ $(i<q_0,\ \langle\!\langle i+2,k\rangle\!\rangle\in\delta\tau_1)$ и $s\in\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0_i)$.

Тогда помещаем $\langle\langle\!\langle k^0,\overrightarrow{\varepsilon}\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle$ в $\delta\nu_3$ и кладём $\nu_3(\langle\langle\!\langle k^0,\overrightarrow{\varepsilon}\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle)\leftrightharpoons\nu_1(\langle\langle k',n'\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle)$, где $k',n'\in\omega$ определены выше при задании ν_2, а k^0 — номер этого шага.

(2) Пусть заданы функция τ_1 типа **(1)** и число $m'\in\omega$ такие, что $m'=\min\{k\mid\tau_1(\langle\!\langle 1,k\rangle\!\rangle)\uparrow\}$. Определим конечную функцию $\tau_2\trianglerighteq\tau_1$ типа **(2)** следующим образом:

• $\tau_2(\langle\!\langle 0,k'\rangle\!\rangle)=0$, где k' — наименьшее число $k\in\omega$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\tau_1(\langle\!\langle 0,k\rangle\!\rangle)\uparrow$;
(2) если $k=\langle\!\langle m'',k'',\varphi''\rangle\!\rangle$, то выполняется хотя бы одно из следующих свойств:
  (a) $\max\{l_0,\log_2(r_{k''}),n_{k''}\}<m''+1$, где l_0 определено выше (количество всех параметров, составляющих кортежи вида II);
  (b) если $n_{k''}=0$, то φ'' не совпадает ни с $(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$, ни с $\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$;
  (c) если $n_{k''}>0$, то φ'' не совпадает ни с $\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$, ни с элементарной конъюнкцией СДНФ $\psi(\overrightarrow{u}'',\overrightarrow{v}'')$ сигнатуры $\sigma_1^{(m'')}$ от наборов $\overrightarrow{u}''$ и $\overrightarrow{v}''$ основных и дополнительных переменных длин $n_{k''}$ и l_0 соответственно;

• $\tau_2(\langle\!\langle 1,m'\rangle\!\rangle)=0$;

• $\tau_2(\langle\!\langle i,k_i\rangle\!\rangle)=0$, где $i,k_i\in\omega$ таковы, что $q_0+2\leqslant i\leqslant q_0+2+m'$ и $k_i=\min\{k\in\omega\mid\tau_1(i,k)\uparrow\}$;

• к этому моменту τ_2 определена полностью.

Другими словами, в $\delta\tau_2$ добавляются натуральные числа, не участвующие в построении множества вида $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$.

Шаг для функции τ_2 типа (**2**), полученной из функции τ_1 типа (**1**). Пусть τ_1 получена из единственной функции τ типа (**0**). Возможны следующие случаи.

- Функция τ приобретает метку 2 или метку 1, но не существует функции τ_0 типа (**3**), $\tau \trianglelefteq' \tau_0 \trianglelefteq' \tau_1$, что на шаге для функции τ_0 меняется $\delta\nu_2$; тогда ничего не делаем.

- Не выполняется предыдущий случай для функций τ, τ_1, и τ_0 — функция типа (**0**) или (**3**), удовлетворяющая условию $\tau_0 \trianglelefteq' \tau_1$, на шаге для которой меняется $\delta\nu_2$. Тогда в определение N_0 помещаем формулу

$$\phi_3^{\tau_0,\tau_1,\tau_2}(\langle \tau_0; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle, \langle \tau_0; \tilde{r}'; \overrightarrow{s}'_0; \overrightarrow{s}'_1; \ldots; \overrightarrow{s}'_{q_0-1}\rangle) \leftrightharpoons$$

$$\big(\bigwedge\{\mathrm{R}_m^{\tau_2(m)}(\tilde{r}) \mid m \in \delta\tau_2\} \wedge \bigwedge\{\mathrm{R}_m^{\tau_1(m)}(\tilde{r}') \mid m \in \delta\tau_1\} \wedge \bigvee\{\mathrm{R}_m(\tilde{r}') \mid m \in \delta\tau_2 \backslash \delta\tau_1\}\big) \vee$$

$$\vee \big(\bigwedge\{\mathrm{R}_m^{\tau_2(m)}(\tilde{r}') \mid m \in \delta\tau_2\} \wedge \bigwedge\{\mathrm{R}_m^{\tau_1(m)}(\tilde{r}) \mid m \in \delta\tau_1\} \wedge \bigvee\{\mathrm{R}_m(\tilde{r}) \mid m \in \delta\tau_2 \backslash \delta\tau_1\}\big)$$

(так как рассматривается вычислимая дизъюнкция, а различия между остальными параметрами записаны в формулах ранее, то здесь они не указываются).

Перейдём к заданию элементов в $\Gamma^*_{\nu_2}$ согласно нарушениям, описанным выше. Сначала зафиксируем натуральное число n_λ, превышающее ранги всех элементов, участвующих в построении множеств, использованных к данному шагу (включая и элементы, участвующие в построении ν_3). Далее, положим в $\Gamma^*_{\nu_2}$ конъюнкцию следующих выражений для $\langle \tau_0; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle \in \delta\nu_2$ ($\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_i) = m_i$, $i \in \omega$, $i < q_0$):
• $\mathrm{R}_m^{\tau_1(m)}(\tilde{r})$ для всех $m \in \omega$ ($m \in \delta\tau_1$);
• $\mathrm{R}_m(\tilde{r})$ для некоторого $m \in \omega$ ($m \in \delta\tau_2 \setminus \delta\tau_1$);
• $\mathrm{R}_k^{\tau_1(\langle\langle i+2,k\rangle\rangle)}(s)$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ и $i, k \in \omega$ ($i < q_0$, $\langle\langle i+2, k\rangle\rangle \in \delta\tau_1$);
• $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерацию ν_2 в точке $\langle \tau_0; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle \in \delta\nu_2$ определим следующим образом (в случае $q_0 > 0$; здесь $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}_0 {}^\frown \overrightarrow{s}_1 {}^\frown \ldots {}^\frown \overrightarrow{s}_{q_0-1}$):

$$\nu_2(\langle \tau_0; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle) \leftrightharpoons \nu_1(\langle\langle\langle k', n'\rangle\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{G}_\tau\}\rangle),$$

где числа $k', n' \in \omega$ фиксированы и выбраны так, чтобы выполнялись равенства $t_{k'}(\overrightarrow{s}) = \{n_\lambda, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{G}_\tau\}\}$ и $\max\{\log_2(r_{k'}), l_0\} \leqslant n' + 1$;
• в случае, когда $q_0 = 0$, положим $\nu_2(\langle \tau_0; \tilde{r}\rangle) \leftrightharpoons \nu_1(\langle\langle\langle 0, n_\lambda\rangle\rangle, \varnothing\rangle)$.

Перейдём теперь к рассмотрению $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерации ν_3 (разумеется, при условии, когда $q_0 > 0$). Снова воспользуемся тем, что имеется лишь конечное число последовательностей функций $\langle \tau_{ij} \mid i < q_0, j < m_i\rangle$, что $\delta\tau_{ij} = \{k \in \omega \mid \tau_2(\langle\langle i{+}2, k\rangle\rangle)\downarrow\}$ для всех $i, j \in \omega$ ($i < q_0$, $j < m_i$). Пусть набор $\overrightarrow{s}^0 = \overrightarrow{s}^0_0 {}^\frown \overrightarrow{s}^0_1 {}^\frown \ldots {}^\frown \overrightarrow{s}^0_{q_0-1} \in \mathrm{S}^{l_0}_{\neq}$ ($i \in \omega$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}^0_i) = m_i$, $i < q_0$) удовлетворяет следующему условию:
• $\neg\mathrm{R}_k^{\tau_2(\langle\langle i+2,k\rangle\rangle)}(s)$ для некоторых $i, k \in \omega$ ($i < q_0$, $\langle\langle i{+}2, k\rangle\rangle \in \delta\tau_2$) и $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0_i)$.

Тогда помещаем $\langle\langle\!\langle k^0,\lambda\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle$ в $\delta\nu_3$ и кладём $\nu_3(\langle\langle\!\langle k^0,\lambda\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle)\leftrightharpoons\nu_1(\langle\langle\!\langle k',n'\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle)$, где $k',n'\in\omega$ определены выше при задании ν_2, а k^0 — номер этого шага.

(**3**) Пусть заданы функция τ_2 типа (**2**) и число $m'\in\omega$ такие, что m' — наименьшее число m, удовлетворяющее следующим условиям (здесь и в дальнейшем через $\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ будем обозначать элементарную конъюнкцию, отличную от $\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$, от наборов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ основных и дополнительных переменных длин n_k и l_0 соответственно, где l_0 определено в конструкции для функции типа (**0**); кортеж $\overrightarrow{x}^{m'}\in(\mathrm{S}_{m'})^{l_0}_{\neq}$ определяется там же):
• $\tau_2(\langle\!\langle 0,m,k,\varphi_0\rangle\!\rangle)\uparrow$ для некоторых числа $k\in\omega$, удовлетворяющего неравенству $\max\{\log_2(r_k),n_k,l_0\}\leqslant m+1$, и элементарной конъюнкции СДНФ φ_0 сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ (см. нижеприведённые условия):

(1) если $n_k=0$, то $\varphi_0\in\{(\mathbf{0}\approx\mathbf{0}),\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})\}$;
(2) если $n_k>0$, то φ_0 есть формула $\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$ или имеет вид $\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$.

Пусть также τ — единственная функция типа (**0**), для которой выполняется условие $\tau\trianglelefteq'\tau_2$; кроме того, имеем $h_0(\tau)=\langle\!\langle n,\mathfrak{G}_\tau\rangle\!\rangle$. Определим набор конечных функций τ', удовлетворяющих условию $\tau_2\trianglelefteq\tau'$ (которые и будут принимать тип (**3**)) следующим образом:
• (этим условием полностью задаётся область задания τ') $\delta\tau'\supseteq\delta\tau_2$; кроме того, число $\langle\!\langle 0,m',k,\varphi\rangle\!\rangle$ попадает в $\delta\tau'$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\max\{\log_2(r_k),n_k,l_0\}\leqslant m'+1$;
(2) если $n_k=0$, то $\varphi\in\{(\mathbf{0}\approx\mathbf{0}),\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})\}$;
(3) если $n_k>0$, то φ есть $\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})$ или имеет вид $\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m')}$;

• пусть $n_k=0$ и $\max\{\log_2(r_k),l_0\}\leqslant m'+1$; тогда выполняются следующие свойства:

(1) $\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})\rangle\!\rangle)\neq\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})\rangle\!\rangle)$;
(2) если, к тому же, $\max\{\log_2(r_k),l_0\}\leqslant m'$, то имеет место равенство $\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,\varphi\rangle\!\rangle)=\tau'(\langle\!\langle 0,m'-1,k,\varphi\rangle\!\rangle)$ для любой $\varphi\in\{\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0}),(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})\}$;

• пусть $n_k>0$ и $\max\{\log_2(r_k),l_0,n_k\}\leqslant m'+1$; тогда выполняются следующие свойства:

(1) если $\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})\rangle\!\rangle)=1$, то $\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,\varphi\rangle\!\rangle)=0$ для любой формулы φ, имеющей вид $\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m')}$;
(2) если $\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,\neg(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})\rangle\!\rangle)=0$, то $\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,\varphi\rangle\!\rangle)=1$ для некоторой формулы φ, имеющей вид $\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m')}$;
(3) если $\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,\varphi\rangle\!\rangle)=1$ для формулы φ, имеющей вид $\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m')}$, то выполняется условие $\mathfrak{M}_{m'}\models\exists\overrightarrow{u}\,\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{x}^{m'})$;

(4) если $\tau'(\langle\!\langle 0, m'-1, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1$ для формулы φ, имеющей вид $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m'-1)}$, то $\tau'(\langle\!\langle 0, m', k, \varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}\rangle\!\rangle) = 1$, где $\varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}$ совпадает, с точностью до перестановки конъюнктов, с $(\varphi \wedge \bigwedge\limits_{i=0}^{n_k-1} \mathrm{R}_{m'}^{\varepsilon_i}(u_i))$ и удовлетворяет условию $\mathfrak{M}_{m'} \models \exists \overrightarrow{u}\, \varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^{m'})$ (здесь $\overrightarrow{\varepsilon} = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_k-1}\rangle \in \{0,1\}^{n_k}$);

(5) пусть формула φ, имеющая вид $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m'-1)}$, такова, что $\tau'(\langle\!\langle 0, m', k, \varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}\rangle\!\rangle) = 1$, где $\varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}$ определена выше, для каждого $\overrightarrow{\varepsilon} \in \{0,1\}^{n_k}$, удовлетворяющего соотношению $\mathfrak{M}_{m'} \models \exists \overrightarrow{u}\, \varphi_{\overrightarrow{\varepsilon}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^{m'})$; тогда $\tau'(\langle\!\langle 0, m'-1, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1$;

• пусть $\pi \in \mathfrak{G}_\tau$; тогда для любого $k \in \omega$ выполняется соотношение

$$\{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_{m'})^{n_k}, \mathfrak{M}_{m'} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}^{m'}), \tau'(\langle\!\langle 0, m', k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\} =$$
$$= \{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_{m'})^{n_k}, \mathfrak{M}_{m'} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \pi(\overrightarrow{x}^{m'})), \tau'(\langle\!\langle 0, m', k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\}.$$

Шаг для функций τ' типа (**3**), полученных из функции τ_2 типа (**2**). Отметим, что все функции типа (**3**), полученные непосредственно из функции τ_2 типа (**2**), имеют одну и ту же область задания. Пусть τ — единственная функция типа (**0**), из которой получена функция τ_2. Разберём несколько случаев.

- Функция τ приобрела метку вида 2; тогда ничего не делаем.

- Функция τ приобрела метку вида 1, но ни для какой функции τ_0 типа (**3**), $\tau \trianglelefteq' \tau_0 \trianglelefteq' \tau_2$, область задания ν_2 не менялась. Тогда проверяем, имеет ли место соотношение

$$\{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in \mathrm{S}^{n_k}, \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s}), \tau'(\langle\!\langle 0, m', k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\} \in \mathcal{R}_1$$

(данное условие эффективно проверяется на $\mathbb{HF}_{m'}(\mathfrak{M}_{m'})$ и не зависит от выбора Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$).

Если да, то ничего не делаем. В противном случае помещаем в $\delta\nu_2$ кортеж $\langle \tau'; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle \in \omega \times \mathrm{S}_{\neq}^{l_0+1}$, удовлетворяющий формуле $\phi_0^{\tau'}(\langle \tau'; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle)$, в определение N_0 помещаем формулу

$$\phi_1^{\tau'}(\langle \tau'; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle, \langle \tau'; \tilde{r}'; \overrightarrow{s}'_0; \overrightarrow{s}'_1; \ldots; \overrightarrow{s}'_{q_0-1}\rangle),$$

а в определение $\Gamma^*_{\nu_2}$ — последовательность (здесь $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}_0\,\hat{}\,\overrightarrow{s}_1\,\hat{}\ldots\hat{}\,\overrightarrow{s}_{q_0-1}$)

$$B_k(\tau'; \tilde{r}; \overrightarrow{s}) \leftrightharpoons \{\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \mid \tau'(\langle\!\langle 0, m', k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1\}$$

для всех $k \in \omega$, что возможно, ввиду монотонности; все атрибуты определены при задании функции τ типа (**0**).

- Функция τ не удовлетворяет всем предыдущим условиям. Возьмём функцию τ_0 типа (**0**) или (**3**), $\tau \trianglelefteq' \tau_0 \trianglelefteq' \tau_2$, для которой на соответствующем шаге меняется $\delta\nu_2$. В определение N_0 помещаем формулу

$$\phi_4^{\tau_0,\tau_2,\tau'}(\langle \tau_0; \tilde{r}; \overrightarrow{s}_0; \overrightarrow{s}_1; \ldots; \overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle, \langle \tau_0; \tilde{r}'; \overrightarrow{s}'_0; \overrightarrow{s}'_1; \ldots; \overrightarrow{s}'_{q_0-1}\rangle) \leftrightharpoons$$

$$\big(\bigwedge\{\mathrm{R}_m^{\tau'(m)}(\tilde r)\,|\,m\in\delta\tau'\}\wedge\bigwedge\{\mathrm{R}_m^{\tau_2(m)}(\tilde r')\,|\,m\in\delta\tau_2\}\wedge$$
$$\wedge\bigvee\{\neg\mathrm{R}_m^{\tau'(m)}(\tilde r')\,|\,m\in\delta\tau'\setminus\delta\tau_2\}\big)\vee\big(\bigwedge\{\mathrm{R}_m^{\tau'(m)}(\tilde r')\,|\,m\in\delta\tau'\}\wedge$$
$$\wedge\bigwedge\{\mathrm{R}_m^{\tau_2(m)}(\tilde r)\mid m\in\delta\tau_2\}\wedge\bigvee\{\neg\mathrm{R}_m^{\tau'(m)}(\tilde r)\mid m\in\delta\tau'\setminus\delta\tau_2\}\big)$$

(как и выше, так как рассматривается вычислимая дизъюнкция, а различия между остальными параметрами записаны в формулах ранее, то здесь они не указываются).

Если кортеж $\langle\tau_0;\tilde r;\overrightarrow{s}_0;\overrightarrow{s}_1;\ldots;\overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle$ удовлетворяет условиям

- $\mathrm{R}_m^{\tau'(m)}(\tilde r)$ для всех $m\in\delta\tau'$;
- $\mathrm{R}_m^{\tau'(\langle i+2,m\rangle)}(s)$ для всех $s\in\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$, $i,m\in\omega$ ($i<q_0$, $\langle\!\langle i+2,m\rangle\!\rangle\in\delta\tau'$);

то во множество $B_k(\tau_0;\tilde r;\overrightarrow{s})$ последовательности, определяющей $\Gamma^*_{\nu_2}$, поместим все элементы из $\{\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{s})\mid\tau'(\langle\!\langle 0,m',k,\varphi\rangle\!\rangle)=1\}$, для всех $k\in\omega$, где $\overrightarrow{s}=\overrightarrow{s}_0{}^\frown\overrightarrow{s}_1{}^\frown\ldots{}^\frown\overrightarrow{s}_{q_0-1}$.

Перейдём теперь к заданию $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерации ν_2 в остальных точках, соответствующих данному шагу. Пусть F — множество всех конечных функций типа (**3**), непосредственно полученных из τ_2; зафиксируем также натуральное число n_λ, превышающее ранги всех элементов, участвующих в построении множеств, использованных к данному шагу (включая и элементы, участвующие в построении ν_3). Далее, положим в $\Gamma^*_{\nu_2}$ конъюнкцию следующих выражений для $\langle\tau_0;\tilde r;\overrightarrow{s}_0;\overrightarrow{s}_1;\ldots;\overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle\in\delta\nu_2$:

- $\mathrm{R}_m^{\tau_2(m)}(\tilde r)$ для всех $m\in\omega$ ($m\in\delta\tau_2$);
- для любой конечной функции $\tau'\in F$ найдётся $m\in\omega$ ($m\in\delta\tau'\setminus\delta\tau_2$), для которого имеет место соотношение $\neg\mathrm{R}_m^{\tau'(m)}(\tilde r)$;
- $\mathrm{R}_k^{\tau_2(\langle i+2,k\rangle)}(s)$ для всех $s\in\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ и $i,k\in\omega$ ($i<q_0$, $\langle\!\langle i+2,k\rangle\!\rangle\in\delta\tau_2$);
- $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерацию ν_2 в точке $\langle\tau_0;\tilde r;\overrightarrow{s}_0;\overrightarrow{s}_1;\ldots;\overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle\in\delta\nu_2$ определим следующим образом (в случае $q_0>0$):

$$\nu_2(\langle\tau_0;\tilde r;\overrightarrow{s}_0;\overrightarrow{s}_1;\ldots;\overrightarrow{s}_{q_0-1}\rangle)\leftrightharpoons\nu_1(\langle\langle\!\langle k',n'\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s})\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle),$$

где числа $k',n'\in\omega$ фиксированы и выбраны так, чтобы выполнялись соотношения $t_{k'}(\overrightarrow{s})=\{n_\lambda,\{\pi(\overrightarrow{s})\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\}$ и $\max\{\log_2(r_{k'}),l_0\}\leqslant n'+1$ (как и выше, имеем $\overrightarrow{s}=\overrightarrow{s}_0{}^\frown\overrightarrow{s}_1{}^\frown\ldots{}^\frown\overrightarrow{s}_{q_0-1}$);

- в случае, когда $q_0=0$, положим $\nu_2(\langle\tau_0;\tilde r\rangle)\leftrightharpoons\nu_1(\langle\langle\!\langle 0,n_\lambda\rangle\!\rangle,\varnothing\rangle)$.

Перейдём теперь к рассмотрению $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерации ν_3 (разумеется, при условии, когда $q_0>0$). Снова воспользуемся тем, что имеется лишь конечное число последовательностей функций $\langle\tau_{ij}\mid i<q_0,j<m_i\rangle$, что $\delta\tau_{ij}=\{k\in\omega\mid\tau_2(\langle\!\langle i+2,k\rangle\!\rangle)\downarrow\}$ для всех $i,j\in\omega$ ($i<q_0$, $j<m_i$). Пусть набор $\overrightarrow{s}^0=\overrightarrow{s}^0_0{}^\frown\overrightarrow{s}^0_1{}^\frown\ldots{}^\frown\overrightarrow{s}^0_{q_0-1}$ удовлетворяет следующему условию:

- $\neg\mathrm{R}_k^{\tau_2(\langle i+2,k\rangle)}(s)$ для некоторых $i,k\in\omega$ ($i<q_0$, $\langle\!\langle i+2,k\rangle\!\rangle\in\delta\tau_2$) и $s\in\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0_i)$.

Тогда помещаем $\langle\langle\!\langle k^0,\lambda\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle$ в $\delta\nu_3$ и кладём $\nu_3(\langle\langle\!\langle k^0,\lambda\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle)\leftrightharpoons\nu_1(\langle\langle\!\langle k',n'\rangle\!\rangle,\{\pi(\overrightarrow{s}^0)\mid\pi\in\mathfrak{G}_\tau\}\rangle)$, где $k',n'\in\omega$ определены выше при задании ν_2, а k^0 — номер этого шага.

Тем самым, в результате конструкции определены вычислимые $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации ν_0, ν_1, ν_2 и ν_3, при этом ν_0, ν_1 и ν_3 являются однозначными.

Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ — Σ-формула, параметр r которой имеет вид I, а набор $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов из S образован из кортежей вида II, причём их $\gamma_{\mathcal{S}}$–коды расположены в порядке возрастания относительно $\sqsubseteq$; кроме того, $\overrightarrow{s}$ минимально возможен для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$. Для каждой функции $\tau \trianglelefteq' A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ из $\mathcal{T}$ положим

$$C(\tau; \overrightarrow{s}) \leftrightharpoons \{t_k(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c} \in \mathrm{S}^{n_k}, \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s}),$$
$$\tau(\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle) = 1 \text{ для некоторого } n \in \omega\}.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ — Σ-формула, как выше. Пусть также функции τ и τ' типа ($\mathbf{0}$) или ($\mathbf{3}$) таковы, что $\tau \trianglelefteq' \tau' \trianglelefteq' A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$. Тогда соотношение $C(\tau'; \overrightarrow{s}) \in \mathcal{R}_1$ влечёт $C(\tau; \overrightarrow{s}) \in \mathcal{R}_1$.*

Доказательство. Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и функции τ, τ' удовлетворяют посылке леммы.

Если $\overrightarrow{s} = \lambda$, то $C(\tau'; \lambda) = \nu_1(\langle\!\langle 0, n'\rangle\!\rangle, \varnothing)$ для подходящего $n' \in \omega$; следовательно, $C(\tau; \lambda) = \nu_1(\langle\!\langle 0, n''\rangle\!\rangle, \varnothing)(\in \mathcal{R}_1)$ для подходящего $n'' \in \omega$.

Поэтому будем считать, что $\overrightarrow{s} \neq \lambda$. Возьмём единственную функцию τ_0 типа ($\mathbf{0}$), $\tau_0 \trianglelefteq' \tau \trianglelefteq' \tau'$; в этом случае, $h_0(\tau_0) = \langle\!\langle n, \mathfrak{G}\rangle\!\rangle$, где $\mathfrak{G}$ — группа перестановок множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, инвариантных на классах R-эквивалентности. Так как $C(\tau'; \overrightarrow{s}) \in \mathcal{R}_1$, имеем $C(\tau'; \overrightarrow{s}) = \nu_1(\langle\langle\!\langle k', n'\rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{G}\}\rangle)$ для подходящих k', $n' \in \omega$; из определения 8 следует, что найдётся кортеж $\overrightarrow{s}' \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, для которого будет выполняться соотношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \not\models \Phi(t_{k'}(\overrightarrow{s}'), \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$. Пусть сначала $k \in \omega$ таково, что $k \neq k'$ и $\max\{\log_2(r_k, n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}))\} \leqslant n+1$; из определения 8 вытекает, что $\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{\neq}^{n_k}\} \subseteq C(\tau_0; \overrightarrow{s})$, поскольку $\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{\neq}^{n_k}\} \subseteq C(\tau'; \overrightarrow{s})$. Так как $C(\tau_0; \overrightarrow{s}) \subseteq C(\tau'; \overrightarrow{s})$, группа $\mathfrak{G}$ состоит из перестановок непустого множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, причём $\overrightarrow{s}$ минимально возможен, а $C(\tau'; \overrightarrow{s}) \cap \{t_{k'}(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{\neq}^{n_{k'}}\}$ состоит из единственного элемента, а именно, $t_{k'}(\overrightarrow{s})$, приходим к тому, что выполняется соотношение $t_{k'}(\overrightarrow{s}) \in C(\tau_0; \overrightarrow{s})$ (в частности, $C(\tau_0; \overrightarrow{s}) \in \mathcal{R}_1$).

Как и для $C(\tau_0; \overrightarrow{s})$, доказывается равенство $C(\tau; \overrightarrow{s}) = \nu_1(\langle\langle\!\langle k', n''\rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{G}\}\rangle)$ для подходящего $n'' \in \omega$ и, в конечном итоге, оно попадает в $\mathcal{R}_1$. □

Из леммы 4 вытекает, что справедливо соотношение $\nu_1' \leqslant \nu_1$ для однозначной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации ν_1' семейства $\mathcal{R}_1 \setminus (\rho\nu_2 \cup \rho\nu_3)$. В самом деле, если $\nu_2(\langle\tau_0; \tilde{r}; \overrightarrow{s}^0\rangle) \in \mathcal{R}_1$ для некоторого $\overrightarrow{s}^0 \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}^0)}$ (скажем, $\nu_1(\langle\langle\!\langle k, n\rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}^0) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle)$ для подходящих $n, k \in \omega$), то из построения вытекает, что имеет место $\big\{\nu_1(\langle\langle\!\langle k, n\rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle) \mid \overrightarrow{s} \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}^0)}\big\} \subseteq$

$\rho\nu_2 \cup \rho\nu_3$; верно и обратное. Далее, поскольку конструкция вычислима, а числа $n' \in \omega$, удовлетворяющие условию $t_k(\overrightarrow{s}^0) = \{n', \{\pi(\overrightarrow{s}^0) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\}$, строго возрастают относительно шагов, на которых они рассматриваются при задании множеств из $\mathcal{R}_1$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерации ν_2, множество чисел вида n' вычислимо. Данное обстоятельство позволяет удалить рассматриваемые множества из $\delta\nu_1$ и прийти к однозначной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерации ν_1' семейства $\mathcal{R}_1 \setminus (\rho\nu_2 \cup \rho\nu_3)$.

Определим теперь $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерацию ν_4 с $\delta\nu_4 = \{\varnothing\}$ так, что $\nu_4(\varnothing) = \varnothing$. Легко видеть, что она однозначна и вычислима. Покажем, что $\nu \leftrightharpoons \nu_0 \oplus \nu_1' \oplus \nu_2 \oplus \nu_3 \oplus \nu_4$ — негативная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-нумерация семейства всех $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-в.п. подмножеств $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$. Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$ — Σ-формула, параметр r которой имеет вид* I, *а набор $\overrightarrow{s}$ попарно различных параметров образован из кортежей вида* II, *причём их $\gamma_\mathcal{S}$–коды расположены в порядке возрастания относительно $\sqsubseteq$; кроме того, $\overrightarrow{s}$ минимально возможен для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$. Пусть также последовательность $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$ удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *предел последовательности $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ совпадает с $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r}$;*
(2) *$C(\tau_n; \overrightarrow{s}) \in \mathcal{R}_1$ для любого $n \in \omega$.*

Тогда $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$ определяет некоторое множество семейства $\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1$.

Доказательство. Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$ и последовательность $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ удовлетворяют посылке леммы.

Если $\overrightarrow{s} = \lambda$, то $C(\tau_n; \lambda) = \nu_1(\langle\!\langle 0, n' \rangle\!\rangle, \varnothing)$ для подходящего $n' \in \omega$ ($n \in \omega$); следовательно, $\Phi(x, r)$ определяет некоторое множество из семейства $\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1$.

Поэтому будем считать, что $\overrightarrow{s} \neq \lambda$. Так как функция τ_0 имеет тип $(\mathbf{0})$, выполняется равенство $h_0(\tau_0) = \langle\!\langle n, \mathfrak{G} \rangle\!\rangle$, где $\mathfrak{G}$ — группа перестановок множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, инвариантных на классах R-эквивалентности. Так как выполняется соотношение $C(\tau_0; \overrightarrow{s}) \in \mathcal{R}_1$, имеем

$$C(\tau_0; \overrightarrow{s}) = \nu_1(\langle \langle\!\langle k', n' \rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{G}\} \rangle)$$

для подходящих $k', n' \in \omega$; из определения 8 следует, что существует кортеж $\overrightarrow{s}\,' \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, для которого будет выполняться соотношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \not\models \Phi(t_{k'}(\overrightarrow{s}\,'), \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$. Таким образом, $C(\tau_n; \overrightarrow{s}) = \nu_1(\langle \langle\!\langle k', n'' \rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{G}\} \rangle)$ для подходящего $n'' \in \omega$ и, в конечном итоге, $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$ может определять только множество из $\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1$. □

Перейдём теперь к рассмотрению свойства сюрьективности отображения ν.

Лемма 6. *$\rho\nu$ совпадает с семейством всех $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-в.п. подмножеств множества $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ — $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-в.п. подмножество. Если $A = \varnothing$, то $A \in \rho\nu_4$, поэтому будем считать, что $A \neq \varnothing$. Разберём четыре случая.

- $A \in \mathcal{R}_0$. Тогда $A \in \rho\nu_0$.

- $A \in \rho\nu_1'(\subseteq \mathcal{R}_1)$. Тогда утверждение очевидным образом выполняется.

- $A \in \mathcal{R}_1 \setminus \rho\nu_1'$. Тогда $A = \nu_1(\langle\langle\!\langle k, n\rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle)$ для некоторых $n, k \in \omega$ и набора $\overrightarrow{s} \in \mathrm{S}^{n_k}_{\neq}$, удовлетворяющих равенству

$$t_k(\overrightarrow{s}) = \{n', \{\pi(\overrightarrow{s}) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\}$$

для подходящего $n' \in \omega$. Так как $A \notin \rho\nu_1'$, существует шаг конструкции для функции τ одного из типов (**1**)–(**3**), на котором задаётся множество $\nu_2(\langle\tau_0; \tilde{r};\ \overrightarrow{s}^0\rangle) = \nu_1(\langle\langle\!\langle k, n\rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}^0) \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle)$, причём $\tau_0 \trianglelefteq' \tau$. Если $\overrightarrow{s}^0$ здесь можно выбрать так, что $\overrightarrow{s}^0 = \overrightarrow{s}$, то и доказывать нечего. Если же $A \notin \rho\nu_2$, то из описания данного шага конструкции вытекает, что $A \in \rho\nu_3$, поскольку имеет место включение $\{\nu_1(\langle\langle\!\langle k, n\rangle\!\rangle, \{\pi(\overrightarrow{s}') \mid \pi \in \mathfrak{S}_k\}\rangle) \mid \overrightarrow{s}' \in \mathrm{S}^{n_k}_{\neq}\} \subseteq \rho\nu_2 \cup \rho\nu_3$.

- $A \notin \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1$. Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r)$ определяет множество A, причём параметр r имеет вид I, а набор $\overrightarrow{s} \in \mathrm{S}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}_{\neq}$ составлен из кортежей вида II так, что $\gamma_{\mathcal{S}}$–коды элементов данного набора возрастают относительно $\sqsubseteq$; кроме того, $\overrightarrow{s}$ минимально возможен для A. Согласно определению 8, зададим множество $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r}$, а затем и последовательность $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$, пределом которой является $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r}$, при этом τ_0 является функцией типа (**0**). Сначала будем предполагать, что τ_0 не приобрело метку вида 2: в противном случае найдём перестановку π на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, инвариантную на классах R-эквивалентности, для которой функция $\pi^{\#}(\tau_0)$ приобретает метку 0 или 1 (напомним, что по Σ-множеству A строится множество $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r}$, которое определяет A, единственным образом с точностью до перестановки); затем возьмём последовательность $\{\pi^{\#}(\tau_n)\}_{n\in\omega}$, пределом которой будет $\pi^{\#}(A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r})$. Так как $A \notin \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1$, по лемме 5, существует $n \in \omega$, для которого выполняется соотношение $C(\tau_n; \pi^{-1}(\overrightarrow{s})) \notin \mathcal{R}_1$; а по лемме 4, $C(\tau_m; \pi^{-1}(\overrightarrow{s})) \notin \mathcal{R}_1$ для всех $m \geqslant n$. Пусть $\tilde{r} \in \mathrm{S}$ таков, что $\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}) = \pi^{\#}(A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r})$; возьмём функцию τ', лежащую в последовательности, для которой имеет место $\langle\tau'; \tilde{r}; \overrightarrow{s}\rangle \in \delta\nu_2$. Так как $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r}$ с набором $\overrightarrow{s}$ параметров определяет A, приходим к тому, что имеет место равенство $\nu_2(\langle\tau'; \tilde{r}; \pi^{-1}(\overrightarrow{s})\rangle) = A$. □

Легко видеть, что множества $\rho\nu_4$, $\rho\nu_0$ и $\rho\nu_1$ попарно не пересекаются. Кроме того, непосредственно из конструкции следует, что $\rho\nu_1' \cup \rho\nu_3 \subseteq \rho\nu_1$, и множества $\rho\nu_2$, $\rho\nu_1'$ и $\rho\nu_3$ попарно не пересекаются. И, наконец, имеем $\rho\nu_2 \cap (\rho\nu_0 \cup \rho\nu_4) = \varnothing$. Таким образом, множества $\rho\nu_0$, $\rho\nu_1'$, $\rho\nu_2$, $\rho\nu_3$ и $\rho\nu_4$ попарно не пересекаются.

Так как прямая сумма негативных $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумераций негативна, остаётся доказать только следующее утверждение.

Лемма 7. *ν_2 — негативная $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерация.*

Доказательство. Пусть $\langle\tau';\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle$, $\langle\tau'';\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle$ — элементы $\delta\nu_2$. Докажем сначала, что если $\tau'\neq\tau''$, то выполняется неравенство

$$\nu_2(\langle\tau';\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)\neq\nu_2(\langle\tau'';\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle).$$

В самом деле, если хотя бы одно из множеств принадлежит $\mathcal{R}_1$, утверждение очевидным образом выполняется: если оба множества попадают в $\mathcal{R}_1$, то они формируются на различных шагах, поскольку каждая последовательность функций из $\mathcal{T}$ имеет не более одного шага, на котором кортежи попадают в $\delta\nu_2$, при этом первые координаты у этих кортежей должны совпадать; в случае, когда лишь одно множество попадает в $\mathcal{R}_1$, то и доказывать нечего. Если же оба множества не попадают в $\mathcal{R}_1$, то $\tilde{r}'$ и $\tilde{r}''$ являются пределами соответственно двух различных последовательностей $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$ и $\{\tau'_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$. Из конструкции следует, что пределы данных последовательности могут задавать одно и то же множество только в том случае, когда они совпадают с точностью до перестановки. Следовательно, $\tau'_0=\pi^{\#}(\tau_0)$ для некоторой перестановки π; из построения следует, что одна из функций приобретёт метку 2 и, в частности, один из кортежей не смог бы попасть в $\delta\nu_2$.

Разберём теперь случай, когда $\tau'=\tau''=\tau$; в данной ситуации неравенство $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)\neq\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)$ задаётся множеством формул N_0. Возьмём последовательности $\{\tau'_n\}_{n\in\omega}$ и $\{\tau''_n\}_{n\in\omega}$ функций из $\mathcal{T}$, соответствующие элементам $\tilde{r}'$ и $\tilde{r}''$. Пусть $\overrightarrow{s}'=\overrightarrow{s}'_0{}^\frown\overrightarrow{s}'_1{}^\frown\ldots{}^\frown\overrightarrow{s}'_{q_0-1}$ и $\overrightarrow{s}''=\overrightarrow{s}''_0{}^\frown\overrightarrow{s}''_1{}^\frown\ldots$ $\ldots{}^\frown\overrightarrow{s}''_{q_0-1}$ ($\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}'_i)=\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}'_i)=m_i$, $i\in\omega$, $i<q_0$), при этом все атрибуты заданы в $\tau'_0=\tau''_0$. Пусть далее $\bar{n}\leftrightharpoons\max\{n\mid\tau'_n=\tau''_n\}\in\omega\cup\{\omega\}$,

$$n'\leftrightharpoons\max\{n\mid\tau'_n\trianglelefteq\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}'),\ \tau'_n(\langle\!\langle i+2,\cdot\rangle\!\rangle)\trianglelefteq\gamma_{\mathcal{S}}(s')$$

$$\text{для всех } s'\in\mathrm{sp}(s'_i),\ i\in\omega,\ i<q_0\}\in\omega\cup\{\omega\},$$

$$n''\leftrightharpoons\max\{n\mid\tau''_n\trianglelefteq\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}''),\ \tau''_n(\langle\!\langle i+2,\cdot\rangle\!\rangle)\trianglelefteq\gamma_{\mathcal{S}}(s'')$$

$$\text{для всех } s''\in\mathrm{sp}(s''_i),\ i\in\omega,\ i<q_0\}\in\omega\cup\{\omega\}.$$

Отметим, что $\tau'_0=\tau''_0$ и определено $h_0(\tau'_0)=\langle\!\langle m,\mathfrak{G}\rangle\!\rangle$ для подходящей группы $\mathfrak{G}$ перестановок. Разберём все случаи, согласно тройкам $\langle\bar{n},n',n''\rangle$.

$\boldsymbol{\langle\omega,\omega,\omega\rangle}$ Тогда из конструкции следует, что $\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}'{}^\frown\overrightarrow{s}')=\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}''{}^\frown\overrightarrow{s}'')$; следовательно, существует Σ-формула Φ с минимально возможным набором параметров такая, что $A_{\Phi,\overrightarrow{s}'{}^\frown\tilde{r}'}=A_{\Phi,\overrightarrow{s}''{}^\frown\tilde{r}''}$ и данное множество с наборами $\overrightarrow{s}'$ и $\overrightarrow{s}''$ параметров определяет Σ-множества $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)$ и $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)$ соответственно. Далее, если не выполняется $\pi(\overrightarrow{s}')=\overrightarrow{s}''$ ни для какой перестановки $\pi\in\mathfrak{G}$, то имеем

$$\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)\neq\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle);$$

об этом факте свидетельствует и формула ϕ_0^τ из N_0; в противном случае имеем равенство $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)=\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)$, при этом формула из N_0, которая выполнялась бы на кортеже $\langle\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle,\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle\rangle$, отсутствует.

$\boldsymbol{\langle\omega,\omega,k\rangle}$ $(k\in\omega)$ Нетрудно видеть, что в этом случае выполняются соотношения $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)\notin\mathcal{R}_1$ и $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)\in\mathcal{R}_1$, поэтому имеем $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)\neq\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)$. Если нарушение возникает с кортежом $\overrightarrow{s}''$, то годится формула ϕ_0^τ из N_0; если же нарушение связано с $\tilde{r}''$, возьмём формулу из N_0, рассматриваемую на соответствующем шаге.

$\boldsymbol{\langle\bar{n},k,m\rangle}$ $(\min\{k,m\}>\bar{n})$ Так как кортежам соответствуют различные последовательности, имеем $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)\neq\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)$ (нетрудно разобрать все случаи: оба множества не принадлежат $\mathcal{R}_1$; в точности одно множество из двух попадает в $\mathcal{R}_1$; оба множества лежат в $\mathcal{R}_1$). Такая ситуация возможна на шагах, где разбирается функция типа (**1**) или (**3**). Для нахождения различий следует взять соответствующую формулу из N_0, предложенную на данном шаге.

$\boldsymbol{\langle\omega,k,m\rangle}$ $(k<m<\omega)$ Так как нарушения происходят на различных конечных шагах, заключаем, что $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)\neq\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)$, при этом оба множества попадают в $\mathcal{R}_1$. Если нарушение связано с кортежом $\overrightarrow{s}'$, то годится формула ϕ_0^τ, поскольку $\gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}')\neq\gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}'')$; если же нарушение связано с $\tilde{r}'$, следует взять из N_0 формулу, соответствующую шагу, на котором рассматривается функция τ'_{k+1}.

$\boldsymbol{\langle\omega,k,k\rangle}$ $(k\in\omega)$ Если τ'_{k+1} — функция типа (**2**) или (**3**), то нарушение могло возникнуть только из-за того, что $\tau'_{k+1}\not\trianglelefteq\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}')$ и $\tau'_{k+1}\not\trianglelefteq\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}'')$. Тем самым, равенство $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)=\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)$ равносильно условию $\pi(\overrightarrow{s}')=\overrightarrow{s}''$ для некоторой перестановки $\pi\in\mathfrak{G}$. Поэтому формула ϕ_0^τ действительно отвечает за неравенство. Пусть теперь τ'_{k+1} — функция типа (**1**). Если $\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}')\restriction\delta\tau'_{k+1}\neq\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}'')\restriction\delta\tau'_{k+1}$, то $\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}';\overrightarrow{s}'\rangle)\neq\nu_2(\langle\tau;\tilde{r}'';\overrightarrow{s}''\rangle)$, а данное неравенство задаётся формулой из N_0, указанной на данном шаге. Если же $\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}')\restriction\delta\tau'_{k+1}=\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}'')\restriction\delta\tau'_{k+1}$, то неравенство снова задаётся формулой ϕ_0^τ.

$\boldsymbol{\langle *,*,*\rangle}$ Остальные случаи сводятся к рассмотренным выше или даже с ними совпадают. □

Применяя лемму 1 к полученным здесь результатам, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Существует негативная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$.*

§4. О минимальных представлениях.

Хорошо известно [5], что в классическом случае *под любой негативной нумерацией бесконечного множества располагается однозначная*, а *любая негативная нумерация конечного множества является разрешимой*;

в частности, негативная нумерация, не являющаяся разрешимой, не может быть минимальной. Результат, упомянутый выше, остаётся справедливым для вычислимых $\mathbb{A}$-нумераций семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ в рамках ординальной вычислимости (фактически доказано в [19], предложение 1). Отметим, что согласно теореме 5, данное утверждение не выполняется для наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ над структурой $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$. Более того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть допустимое множество $\mathbb{A}$ и пусть $\mathbb{A}$-нумерация ν таковы, что $[a]_{\eta_\nu}$ не $\mathbb{A}$-вычислимо, но ко-$\mathbb{A}$-вычислимо перечислимо для некоторого $a \in \mathbb{A}$. Тогда существует $\mathbb{A}$-нумерация ν_0 множества $\rho\nu$, удовлетворяющая соотношению $\nu_0 < \nu$.*

Доказательство. Пусть ν и $a \in \mathbb{A}$ удовлетворяют посылке предложения. Определим $\mathbb{A}$-нумерацию ν_0 как $\nu \restriction ((\delta\nu \setminus [a]_{\eta_\nu}) \cup \{a\})$. Нетрудно видеть, что $(\delta\nu \setminus [a]_{\eta_\nu}) \cup \{a\} \in \Sigma(\mathbb{A})$ и $\nu_0 \leqslant \nu$ посредством тождественного вложения на $(\delta\nu \setminus [a]_{\eta_\nu}) \cup \{a\}$ и, к тому же, ν_0 — $\mathbb{A}$-нумерация множества $\rho\nu$.

Далее, докажем методом от противного, что $\nu_0 \not\equiv \nu$. Допустим, что ν сводится к ν_0 посредством бинарного Σ-предиката Q_0; тогда выполняется соотношение $[a]_{\eta_\nu} \in \Sigma(\mathbb{A})$, поскольку имеет место соотношение $b \in [a]_{\eta_\nu} \Leftrightarrow Q_0(b, a)$, противоречие. □

Следствие 1. *Пусть ν — негативная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$. Тогда существует последовательность $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумераций $\{\nu_n\}_{n\in\omega}$ данного семейства такая, что $\nu_0 = \nu$ и $\nu_{n+1} < \nu_n$ для всех $n \in \omega$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любой негативной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации ν семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$ существует негативная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерация ν_0 того же семейства, для которой выполняется неравенство $\nu_0 < \nu$.

Пусть атрибуты $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации ν (область задания, отношение эквивалентности и Γ^*_ν) определяются с параметрами из конечного множества $T \subseteq \mathrm{S}$. Выберем арифметическое множество $A_0 \subseteq \omega$ такое, что $A_0 \nleqslant_{CE} \bigoplus\limits_{s\in T} \gamma_{\mathcal{S}}(s)$. Из доказательства теоремы 5 следует, что $\{x \mid \nu(x) = A_0\}$ не является Σ-предикатом на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$. По предложению 1, найдётся негативная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерация ν_0 семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$ такая, что $\nu_0 < \nu$. □

Минимальные негативные $\mathbb{A}$-нумерации приводятся в [20].

§5. Приложение.

Замечание 4. Основная теорема настоящей статьи, а вместе с ней и следствие 1, остаются справедливыми для любого непустого семейства подмножеств натуральных чисел, замкнутого относительно тьюринговой сводимости, операции сочленения и оператора скачка. Отметим, что, например, таковыми семействами будут классы всех гиперарифметических множеств и всех подмножеств натуральных чисел соответственно. $\diamond$

Для несчётного идеала тьюринговых степеней, замкнутого относительно оператора скачка, следует воспользоваться обычной теоремой Лёвенгейма-Сколема, а также тем фактом, что на $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодах операция сочленения, оператор скачка, а также тьюрингова сводимость элементарны в соответствующих наследственно конечных надстройках.

Замечание 5. $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ имеет универсальную Σ-функцию. В самом деле, существование Σ-функции, универсальной для семейства всех числовых частичных арифметических функций, вытекает из равномерности построения универсальной машины Тьюринга с оракулом $A \in \mathcal{S}$; эффективное построение по данной функции универсальной Σ-функции проводится так же, как и в [3] (см. лемму 5.2 и предложение 5.5). Отметим, что если бы арифметические множества задавались только положительно, то универсальной Σ-функции не существовало (см. [14], пример после следствия 4.9). $\diamond$

В связи с этим возникают следующие вопросы.

(1) Можно ли утверждать, что найдётся негативная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерация, но нет позитивной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерации для семейства всех частичных Σ-функций на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$?

(2) Существует ли допустимое множество $\mathbb{A}$, семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ которого обладает негативной вычислимой $\mathbb{A}$-нумерацией, но не обладает позитивными вычислимыми $\mathbb{A}$-нумерациями, однако некоторая негативная вычислимая $\mathbb{A}$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ минимальна?

(3) Существует ли допустимое множество $\mathbb{A}$, семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ которого обладает негативной вычислимой $\mathbb{A}$-нумерацией, но не обладает позитивными вычислимыми $\mathbb{A}$-нумерациями, однако любая негативная вычислимая $\mathbb{A}$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ минимальна?

Список литературы

1. *Friedberg R.M.* Three theorems on recursive enumeration. I: Decomposition. II: Maximal set. III: Enumeration without duplication // *J. Symbolic Logic* 1958. V. 23, № 3. P. 309–316.
2. *Пузаренко В.Г.* О разрешимых вычислимых $\mathbb{A}$-нумерациях // *Алгебра и логика.* 2002. Т. 41, № 5. С. 568–584.
3. *Пузаренко В.Г.* К вычислимости на специальных моделях // *Сиб. мат. журн.* 2005. Т. 46, № 1. С. 185–208.
4. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г., Файзрахманов М.Х.* Позитивные нумерации в допустимых множествах // *Сиб. мат. журн.* 2020. Т. 61, № 3. С. 607–621.
5. *Ершов Ю.Л. Теория нумераций.* М.: Наука, 1977.

6. *Ершов Ю.Л. Определимость и Вычислимость.* Новосибирск: Научная книга (НИИМИОО НГУ), 1996.
7. *Barwise J. Admissible Sets and Structures: An Approach to Definability Theory.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975.
8. *Ershov Yu.L., Puzarenko V.G., Stukachev A.I.* $\mathbb{HF}$-Computability, in *COMPUTABILITY IN CONTEXT: Computation and Logic in the Real World (ed. S. B. Cooper and A. Sorbi).* Singapore: Imperial College Press, 2011. P. 169–242.
9. *Soare R.I. Recursively Enumerable Sets and Degrees: A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets.* Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag, 1987.
10. *Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* М.: Наука, 1980.
11. *Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели.* Новосибирск: Научная книга, 1999.
12. *Пузаренко В.Г.* О вычислимости над моделями разрешимых теорий // *Алгебра и логика.* 2000. Т. 39, № 2. С. 170–197.
13. *Пузаренко В.Г.* Обобщенные нумерации и определимость поля $\mathbb{R}$ в допустимых множествах // *Вестник НГУ: сер. мат., мех., инф.* 2003. Т. 2, № 3. С. 107–117.
14. *Морозов А. С., Пузаренко В.Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // *Алгебра и логика.* 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.
15. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г.* О сводимости на семействах // *Алгебра и логика.* 2009. Т. 48, № 1. С. 31–53.
16. *Owings J.C.* The meta r.e. sets but not the Π^1_1 sets can be enumerated without repetition // *J. Symbolic Logic.* 1970. V. 35, № 2. P. 223–229.
17. *Li W.* Friedberg numbering in fragments of Peano arithmetics and α-recursion theory // *J. Symbolic Logic.* 2013. V. 78, № 4. P. 1135–1163.
18. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В. Г., Файзрахманов М.Х.* Частичные разрешимые представления в гиперарифметике // *Сиб. матем. журн.* 2019. Т. 60, № 3. С. 599–609.
19. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г., Файзрахманов М.Х.* О позитивных и однозначных вычислимых нумерациях в гиперарифметике // *Алгебра и логика.* 2020. Т. 59, № 1. С. 66–83.
20. *Faizrahmanov M.Kh., Puzarenko V.G.* Absolute and relative properties of negatively numbered families // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, № 4. P. 726–734.

Калимуллин Искандер Шагитович
Файзрахманов Марат Хайдарович
Казанский (Приволжский)
федеральный университет,
им. Н.И. Лобачевского, НОМЦ ПФО
ул. Кремлевская, 18,
ул. Пирогова, 1,
Казань, 420008, РОССИЯ.
E-mail: ikalimul@gmail.com
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

Поступила в редакцию
25 мая 2023 г.
Получена после доработки
14 июня 2023 г.
Принята к публикации
16 июня 2023 г.

Пузаренко Вадим Григорьевич
Институт математики
им. С.Л.Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирский гос. univeritet,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: vagrig@math.nsc.ru