УДК 517.9 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.106 2023, том 26, № 1, 120-129

ТОЧНО ТРАНЗИТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $sl_3(\mathbb{R})$

М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Найдена система дифференциальных уравнений, описывающая локальные точно транзитивные представления алгебры $sl_3(\mathbb{R})$ в пространстве локальных векторных полей с аналитическими коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^8$, определенных в некоторой окрестности начала координат.

Ключевые слова и фразы: алгебра $sl_3(\mathbb{R})$, локальные точно транзитивные представления.

§1. Введение и постановка задачи

Представления алгебр Ли векторными полями естественно возникают в вопросах группового анализа дифференциальных уравнений [1], при этом, как правило, рассматриваются только локальные действия соответствующих групп Ли. Ограничения типа точной транзитивности[1], кратной транзитивности и их обобщения естественно появляются, например, при исследовании групповых симметрий физических структур [2, 3, 4, 5, 6].

Пусть L некоторая конечномерная алгебра Ли, $\dim L = n$ и $\mathrm{Vect}_0\,\mathbb{R}^m$ — алгебра локальных векторных полей с аналитическими коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^m$, определенных в некоторой окрестности начала координат. Представлением алгебры Ли L в алгебру Ли $\mathrm{Vect}_0\,\mathbb{R}^m$ является любой гомоморфизм $\rho : L \to \mathrm{Vect}_0\,\mathbb{R}^m$ алгебр Ли. Будем говорить, что алгебра Ли L имеет локальное точно транзитивное представление $\rho : L \to \mathrm{Vect}_0\,\mathbb{R}^m$, если $m = n$ и определитель составленный из коэффициентов базисных операторов алгебры $\rho(L)$ невырожден. Данное определение равносильно тому, что соответствующая локальная группа Ли действует точно транзитивно на некоторой окрестности начала координат пространства $\mathbb{R}^m$ [7, 8].

Данная работа является естественным продолжением исследований, проведенных в работе [10]. В работе [10] была исследована задача нахождения локальных точно транзитивные представления двух наименьших простых алгебр Ли $sl_2(\mathbb{R})$ и $so_3(\mathbb{R})$. И было доказано, что такие представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\mathrm{Vect}_0\,\mathbb{R}^3$ соответствуют решениям одного дифференциального уравнения

$$(fg)(\ln(fg))_{yz} = 2$$

[1]Вместо “точной транзитивности” часто используется термин “просто транзитивность”.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009)

на две функции функции f, g переменных y, z. Если ввести обозначение $h = fg$, то это в точности — уравнения Лиувилля [11, 1, 9, 13, 14, 15]

$$h_{yz} = ke^h,$$

где $h = h(y, z)$, k — вещественное число. Как хорошо известно, ([1], глава III, §9, стр. 123) решения уравнения Лиувилля определяется двумя функциями одного аргумента

$$h = -\frac{(\alpha(y) + \beta(z))^2}{\alpha'(y)\beta'(z)},$$

для некоторых функций $\alpha(y)$, $\beta(z)$ таких, что $\alpha'(y)\beta'(z) \neq 0$. Таким образом, локальные точно транзитивные представлений алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ определяются двумя функциями одного аргумента.

Для алгебры $so_3(\mathbb{R})$ в работе [10] также было найдено определяющее дифференциальное уравнение

$$f(f(\ln g)_y)_y + g(g(\ln f)_z)_z = g^2(\ln f)_z^2 + f^2(\ln g)_y^2 + 1.$$

на две функции функции f, g переменных y, z. Но остался, пока нерешенный вопрос: Можно ли соотношение данное уравнение переписать как уравнение на одну функцию $h = H(f, g)$? Возможно надо использовать функции комплексного переменного.

Естественно, в результате исследований, проведенных в работе [10] возникла **гипотеза**, что локальные точно транзитивные представления простых алгебр Ли векторными полями (в частности, алгебры $sl_n(\mathbb{R})$) определяются дифференциальными уравнениями специального вида, для которых актуальна проблема интегрирования.

В работе рассматривается задача нахождения всех локальных точно транзитивных представлений алгебры Ли $sl_3(\mathbb{R})$. Результат сформулирован в теореме, которая содержит описание всех таких представлений с точностью до решения системы дифференциальных уравнений. Общее решение этой системы не удалось найти, но показано (пример) что она имеет нетривиальные решения.

Функции, рассматриваемые в работе, предполагаются аналитическими в окрестности начала координат. Все вычисления производятся в предположении общего положения, то есть ранг всех рассматриваемых уравнений в окрестности начала координат остается постоянным (таким образом исключаются возможные особые решения). Ввиду точной транзитивности действия считаем, что при заменах переменных начало координат не меняется.

§2. Локальные точно транзитивные представления алгебры $sl_3(\mathbb{R})$

Алгебра $sl_3(\mathbb{R})$, как векторное пространство, порождается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и имеет следующую таблицу коммутаторов

	A	B	E_{12}	E_{13}	E_{21}	E_{23}	E_{31}	E_{32}
A	0	0	0	$3E_{13}$	0	$3E_{23}$	$-3E_{31}$	$-3E_{32}$
B	0	0	$-E_{12}$	E_{13}	E_{21}	$2E_{23}$	$-E_{31}$	$-2E_{32}$
E_{12}	0	E_{12}	0	0	$A-2B$	E_{13}	$-E_{32}$	0
E_{13}	$-3E_{13}$	$-E_{13}$	0	0	$-E_{23}$	0	$A-B$	E_{12}
E_{21}	0	$-E_{21}$	$2B-A$	E_{23}	0	0	0	$-E_{31}$
E_{23}	$-3E_{23}$	$-2E_{23}$	$-E_{13}$	0	0	0	E_{21}	B
E_{31}	$3E_{31}$	E_{31}	E_{32}	$B-A$	0	$-E_{21}$	0	0
E_{32}	$3E_{32}$	$2E_{32}$	0	$-E_{12}$	E_{31}	$-B$	0	0

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Любое локальное точно транзитивное представление алгебры Ли $sl_3(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\mathrm{Vect}_0\,\mathbb{R}^8(x^1,\ldots,x^8)$ эквивалентно одному из следующих*

$$a = \partial_1, \quad b = \partial_2, \quad e_{12} = e^{-x^2}\partial_3, \quad e_{13} = e^{3x^1+x^2}\partial_4,$$

$$e_{23} = e^{3x^1+2x^2}\left(x^3\partial_4 + \partial_5\right),$$

$$e_{21} = e^{x^2}\Big(x^3\partial_1 + (-2x^3 + f_2)\partial_2 + ({x^3}^2 - x^3 f_2 + f_3)\partial_3 + (x^4 f_2 + x^5 f_3 + f_4)\partial_4 + (-x^4 + 2f_2x^5)\partial_5 + \partial_6\Big),$$

$$e_{32} = e^{-3x^1-2x^2}\Big(g_1\partial_1 + (x^5+g_2)\partial_2 + (-x^3(x^5+g_2)+x^4+g_3)\partial_3$$
$$+ (x^4(3g_1+x^5+g_2)+x^5g_3+g_4)\partial_4 + (x^{5^2}+x^5(3g_1+2g_2)+g_5)\partial_5$$
$$+ g_6\partial_6 + g_7\partial_7 + g_8\partial_8\Big),$$

$$e_{31} = e^{-3x^1-x^2}\Big((x^4-x^3g_1+h_1)\partial_1 + (-x^4-x^3(x^5+g_2)+x^5f_2+h_2)\partial_2$$
$$+ (x^{3^2}(x^5+g_2)-x^3(g_3+x^5f_2+h_2)+x^5f_3+h_3)\partial_3$$
$$+ \big(x^{4^2}+x^4(-3x^3g_1+3h_1-x^3(x^5+g_2)+x^5f_2+h_2)-x^3(x^5g_3+g_4)$$
$$+ x^{5^2}f_3x^5(f_4+h_3)+h_4\big)\partial_4$$
$$+ \big(-x^3(x^{5^2}+x^5(3g_1+2g_2)+g_5)+2f_2x^{5^2}+x^5(3h_1+2h_2)+h_5\big)\partial_5$$
$$+ (x^5+h_6-x^3g_6)\partial_6 + (h_7-x^3g_7)\partial_7 + (h_8-x^3g_8)\partial_8\Big),$$

где функции f_2, f_3, f_4, $h_1,\dots,h_8$, $g_1,\dots,g_8$ переменных x^6, x^7, x^8 связаны системой дифференциальных уравнений

$$\partial_6 g_1 = 2f_2g_1 - h_1 + g_3, \quad \partial_6 g_6 = 2f_2g_6 - h_6 + g_2,$$
$$\partial_6 g_7 = 2f_2g_7 - h_7, \quad \partial_6 g_8 = 2f_2g_8 - h_8,$$
$$\partial_6 h_1 = f_2h_1 + f_3g_1 + h_3 - f_4,$$
$$\partial_6 h_5 = 3f_2h_5 + f_3 - h_4,$$
$$\partial_6 h_6 = f_2h_6 + f_3g_6 + h_2, \quad \partial_6 h_7 = f_2h_7 + f_3g_7,$$
$$\partial_6 g_5 = 4f_2g_5 - g_4 - h_5,$$
$$\partial_6 g_2 - \partial_6 g_3 = f_2g_2 - h_2 - 2g_3 + h_3 + f_4,$$
$$Lf_2 = \partial_6 h_2 - 2f_2h_2 - f_3g_2 + 2h_3 - f_4,$$
$$Mf_2 = \partial_6 g_2 - 3f_2g_2 + h_2 + 2g_3,$$
$$Lf_3 = \partial_6 h_3 - (g_3 + 2h_2)f_3,$$
$$Mg = \partial_6 g_3 - f_2g_3 - 2f_3g_2 + h_3 + f_4,$$
$$Mf_4 = \partial_6 g_4 - 3f_2g_4 + 3g_1f_4 - f_3g_5 + h_4,$$
$$Lg_1 - Mh_1 = (2h_2 - g_3)g_1 + g_4 - h_1g_2,$$

$$Lg_6 - Mh_6 = (2h_2 + 3h_1 - g_3)g_6 - (g_2 + 3g_1)h_6 + g_5,$$

$$Lg_7 - Mh_7 = (2h_2 + 3h_1 - g_3)g_7 - (g_2 + 3g_1)h_7,$$

$$Lg_8 = (2h_2 + 3h_1 - g_3)g_8 - (g_2 + 3g_1)h_8,$$

$$Lg_2 = \partial_6 g_2 + h_2 + 2g_3 - (2h_2 - 3h_1 + g_3)g_2 - 3h_2 g_1 + g_5 f_2 - h_5 - g_4,$$

$$Lg_3 - Mh_3 = (3h_1 + h_2 - g_3)g_3 - 3g_1 h_3 + g_5 f_2 - h_4,$$

$$Mg_5 = \partial_6 g_4 - (3g_4 + g_5)f_2 + 3h_2 g_1 + h_4,$$

$$Lg_4 - Mh_4 = (3h_2 + 6h_1 - g_3)g_4 + (h_3 + f_4)g_5 - (6g_1 + 2g_2)h_4 - h_5 g_3,$$

$$Lg_5 - Mh_5 = (4h_2 + 6h_1 - g_3)g_5 - 3h_5(2g_1 + g_2),$$

конечным уравнением

$$f_3 g_8 + h_8 f_2 = 0,$$

и неравенством

$$g_7 \partial_6 g_8 - g_8 \partial_6 g_7 \neq 0.$$

Где $\partial_k = \partial_{x^k}$, $k = 1, \ldots, 8$,

$$L = h_6\partial_6 + h_7\partial_7 + h_8\partial_8, \quad M = g_6\partial_6 + g_7\partial_7 + g_8\partial_8.$$

(Для упрощения обозначений частная производная по переменной x^i *обозначается как* ∂_i*.)*

Доказательство данной теоремы состоит в последовательном выпрямлении векторных полей и, ввиду его громоздкости, наметим только некоторые вычисления. Отметим, что задача приведения векторных полей к “каноническмому” виду состоит фактически в поиске подходящей системы координат, или, что то же самое, подходящего "выпрямляющего"диффеоморфизма. Для проведения аналитических преобразований и проверки использовалась система символьных вычислений MAPLE.

Хорошо известно, что любое векторное поле в подходящей системе координат можно выпрямить [1]. Поэтому можно считать, что оператору A соответствует векторное поле

$$A \mapsto a = \partial_1.$$

Пусть

$$B \mapsto b = b^i \partial_i,$$

где коэффициенты b^i — функции переменных $x^1, \ldots, x^8$. (По повторяющемуся верхнему и нижнему индексу идет суммирование.) Так как коммутатор $[A, B] = 0$, то $\partial_1 b^i = 0$, то есть коэффициенты b^i, $i = 1, \ldots, 8$ не зависят от переменной x^1. Оператор

$$\sum_{i=2}^{8} b^i \partial_i$$

не может быть нулевым в силу транзитивности представления. Так как его коэффициенты не зависят от переменной x^1, то его можно выпрямить в пространстве $\mathbb{R}^7(x^2, \ldots, x^8)$. Итак, можно считать, что

$$b = b^1 \partial_1 + \partial_2,$$

где коэффициент b^1 зависит от переменных $x^2, \ldots, x^8$. Если перейти к переменным

$$\widetilde{x}^1 = x^1 - \int b^1 dx^2, \widetilde{x}^2 = x^2, \ldots \widetilde{x}^8 = x^8,$$

то операторы a, b примут вид

$$a = \partial_1, \quad b = \partial_2.$$

(После переобозначения переменных $\widetilde{x}^i \mapsto x^i$.)

Пусть

$$E_{12} \mapsto e_{12} = e^i_{12} \partial_i,$$

где коэффициенты e^i_{12} — функции переменных $x^1, \ldots, x^8$. Так как $[A, E_{12}] = 0$ и $[B, E_{12}] = -E_{12}$ то $\partial_1 e^i_{12} = 0$ и $\partial_2 e^i_{12} = -e^i_{12}$. Следовательно,

$$e^i_{12} = e^{-x^2} \widetilde{e}^i_{12}, \quad i = 1, \ldots, 8,$$

где коэффициенты $\widetilde{e}^i_{12}$ зависят от переменных $x^3, \ldots, x^8$. Оператор

$$\sum_{i=3}^{8} \widetilde{e}^i_{12} \partial_i$$

не может быть нулевым в силу транзитивности представления. Так как его коэффициенты не зависят от переменных x^1, x^2, то его можно выпрямить в пространстве $\mathbb{R}^6(x^3, \ldots, x^8)$. Итак, можно считать, что

$$e_{12} = e^{-x^2}(\varepsilon^1_{12} \partial_1 + \varepsilon^2_{12} \partial_2 + \partial_3),$$

где коэффициенты ε^1_{12}, ε^2_{12} зависят от переменных $x^3, \ldots, x^8$.

Инварианты оператора $\varepsilon_{12}^1\partial_1+\varepsilon_{12}^2\partial_2+\partial_3$ являются решениями системы

$$\frac{dx^1}{\varepsilon_{12}^1}=\frac{dx^2}{\varepsilon_{12}^2}=\frac{dx^3}{1}=\frac{dx^4}{0}=\ldots=\frac{dx^8}{0}.$$

Если перейти к переменным

$$\widetilde{x}^1=x^1-\int\varepsilon_{12}^1dx^3,\widetilde{x}^2=x^2-\int\varepsilon_{12}^2dx^3,\widetilde{x}^3=x^3,\ldots,\widetilde{x}^8=x^8,$$

то операторы a, b, e_{12} примут вид

$$a=\partial_1,\quad b=\partial_2,\quad e_{12}=e^{-x^2}\partial_3.$$

(После переобозначения переменных $\widetilde{x}^i\mapsto x^i$.)

Далее, аналогично, используя таблицу коммутаторов и процедуру выпрямления векторного поля (поиск канонических переменных — инвариантов) последовательно упрощаем векторные поля, соответствующие операторам E_{13}, E_{23}, E_{21}, E_{32}, E_{31}. Как отмечалось выше, для проведения аналитических преобразований и проверки использовалась система символьных вычислений MAPLE.

По видимому, найти общее решение этой системы не представляется возможным, но как показывает следующий пример, система допускает нетривиальные решения.

Пример. Пусть

$$f_2=f_3=f_4=g_1=\ldots=g_6=h_1=\ldots=h_6=h_8=0,$$

$$g_7=-x^6,\quad g_8=h_7=1.$$

Тогда следующие операторы

$$a=\partial_1,\quad b=\partial_2,\quad e_{12}=e^{-x^2}\partial_3,\quad e_{13}=e^{3x^1+x^2}\partial_4,$$

$$e_{23}=e^{3x^1+2x^2}\left(x^3\partial_4+\partial_5\right),\quad e_{21}=e^{x^2}\left(x^3\partial_1-2x^3\partial_2+{x^3}^2\partial_3-x^4\partial_5+\partial_6\right),$$

$$e_{32}=e^{-3x^1-2x^2}\left(x^5\partial_2+(x^4-x^3x^5)\partial_3+x^4x^5\partial_4+{x^5}^2\partial_5-x^6\partial_7+\partial_8\right),$$

$$e_{31}=e^{-3x^1-x^2}\Big(x^4\partial_1-(x^4+x^3x^5)\partial_2+{x^3}^2x^5\partial_3+$$

$$+({x^4}^2-x^3x^4x^5)\partial_4-x^3{x^5}^2\partial_5+x^5\partial_6+(x^3x^6+1)\partial_7-x^3\partial_8\Big),$$

дают локальное точно транзитивное представление алгебры Ли $sl_3(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\mathrm{Vect}_0\,\mathbb{R}^8(x^1,\ldots,x^8)$.

Замечание. Любая локальная группа Ли в подходящей системе координат задается аналитическим законом умножения. В предположении точной транзитивности действия, можно считать что локальная группа Ли действует на себе. Поэтому в работе рассматриваются только векторные поля с аналитическими коэффициентами.

Список литературы

1. *Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.* Москва: Наука, 1978.

   Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. New York: Academic Press, 1982.

2. *Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур.* Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003.

   Mikhalichenko G.G. Group symmetry of physical structures. Barnaul: Barn. gos. ped. un-t, 2003.

3. *Кулаков Ю.И.Теория физических структур.* Новосибирск: Альфа Виста, 2004.

   Kulakov Yu.I.Teoriya fizicheskikh struktur. Novosibirsk: Alfa Vista, 2004.

4. *Симонов А.А.* Обобщение точно транзитивных групп // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2014. Т. 78, № 6. С. 153–178.

   *Simonov A.A.*On generalized sharply n-transitive groups // *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 2014. T. 78, № 6. C. 153–178.(in Russian).

5. *Кыров В.А.* Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2018. Т. 15,С. 741–758.

   Kyrov V.A. The analytical method for embedding multidimensional pseudoEuclidean geometriesй // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2018. T. 15,C. 741–758.(in Russian).

6. *Нещадим М.В., Симонов А.А.* Об алгебраических системах Кулакова на группах // *Сиб. матем. журн.* 2021. Т. 62, № 6. С. 1357–1368.

   Neshchadim M.V., Simonov A.A. Kulakov algebraic systems on groups // *Sib. Math. J.* 2021. T. 62, № 6. C. 1357–1368.(in Russian).

7. *Горбацевич В.В., Онищик А.Л.* Группы Ли преобразований. Группы Ли и алгебры Ли //*Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* / Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1988, Т. 1., стр. 103–240.

   Gorbatsevich V.V., Onishchik A.L. Lie transformation groups. Lie groups and Lie algebras./V. I. Encyclopaedia Math.Sci. 20„ Berlin: Springer, 1993, pp. 95–235.

8. *Онищик А.Л. Топология транзитивных групп преобразований.* Москва: Физматлит, 1995.

   Onishchik A.L. Topology of transitive transformation groups. Leipzig: Johann Ambrosius Barth Verlag GmbH, 1994.

9. *Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике.* Москва: Наука, 1983.

   Ibragimov N.H. Transformation groups applied to mathematical physics. Dordrecht: Riedel, 1985.

10. *Нещадим М.В.* Уравнение Лиувилля и точно транзитивные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2022. Т. 25, № 4. С. 99–106.

    Neshchadim M.V. The Liouville equation and exactly transitive representations of algebra $sl_2(\mathbb{R})$ // *Sib. Zh. Ind. Mat..* 2022, V. 25, № 4, pp. 99–106.(in Russian).

11. *Lie S.* Diskussion der differentiagleichung $\frac{d^2z}{dxdy} = F(z)$ // *Arch. for Math.* 1881. V. 6, № 1. C. 112–124.

12. *Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* Уравнения типа Лиувилля // *Докл. АН СССР.* 1979. Т. 249, № 1. С. 26–29.

13. *Zhiber A.V., Ibragimov N.H., Shabat A.B.* Equations of Liouville type // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1979. T. 249, № 1. C. 26–29.(in Russian).

14. *Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И.* Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // *УМН.* 1987. Т. 42, № 4. С. 3–53.

    Михайлов Mikhailov A.V., Shabat A.B., Yamilov R.I. The symmetry approach to the classification of non-linear equations. Complete lists of integrable systems // *Russian Math. Surveys.* 1987. T. 42, № 4. C. 3–53.

15. *Жибер А.В., Соколов В.В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // *УМН.* 2001. Т. 56, № 1. С. 63–106.

Zhiber A.V., Sokolov V.V. Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type // *Russian Math. Surveys.* 2001. T. 56, № 1. C. 63–106.

Нещадим Михаил Владимирович
Институт математики
им. С.Л.Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: neshch@math.nsc.ru

Симонов Андрей Артемович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: a.simonov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию
10 марта 2023 г.
Получена после доработки
12 июня 2023 г.
Принята к публикации
16 июня 2023 г.