УДК 517.929
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.107

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2023, том 26, № 1, 130-149

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. Л. Сабатулина, В. В. Малыгина

Для систем линейных автономных дифференциальных уравнений с последействием развивается метод исследования устойчивости, состоящий в построении вспомогательной системы, асимптотические свойства которой близки к аналогичным свойствам исходной системы. Наряду с новыми признаками устойчивости найдены точные оценки скорости стремления решений к нулю. Эффективность полученных результатов иллюстрируется рядом примеров.

Ключевые слова и фразы: системы функционально-дифференциальных уравнений, экспоненциальная устойчивость, фундаментальная матрица, оценка скорости решения, монотонные операторы.

Введение

Цель настоящей работы — получение новых эффективных признаков устойчивости для систем линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). Исследование базируется на идее построения т. н. «системы сравнения», которая, с одной стороны, имеет более простую структуру, а с другой стороны — те же асимптотические свойства, что и исходная система.

Эта схема успешно применялась в работе [8] к исследованию устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в работе [10] она была перенесена на системы дифференциальных уравнений с сосредоточенным, а в работе [11] — на системы с сосредоточенным и распределенным запаздыванием. Отметим, что во всех перечисленных работах в качестве системы сравнения выбиралась система ОДУ с диагональной матрицей, что существенно упрощало исследование.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSNM-2023-0005.

© Т. Л. Сабатулина, В. В. Малыгина; 2023

С другой стороны, давно было замечено [9, 13], что ФДУ с малым последействием по свойствам близки к обыкновенным: их фундаментальное решение положительно на полуоси, а если такое уравнение устойчиво, то фундаментальное решение монотонно убывает к нулю по экспоненциальному закону (хотя не является экспонентой и не выражается через элементарные функции). Эти свойства позволяют, выбирая системы ФДУ с положительной фундаментальной матрицей в качестве системы сравнения, расширить область применения метода. В работе [15] для систем дифференциально-разностных уравнений установлен критерий экспоненциальной устойчивости, причем система сравнения также была дифференциально-разностной.

В данной работе мы покажем, что класс вспомогательных ФДУ может быть существенно расширен: наряду с сосредоточенным, можно рассматривать также распределенное запаздывание. Кроме того, мы приведем ряд эффективных критериев, которые обеспечивают положительность фундаментальной матрицы системы сравнения.

Еще одна задача, которая решается в рамках нашей работы — эффективная оценка скорости стремления решения к нулю. Для автономных ФДУ запаздывающего типа, как известно, стремление к нулю всегда происходит по экспоненциальному закону, что означает существование таких положительных постоянных N и α, что $|x(t)| \leq Ne^{-\alpha t}$. Однако без указания оценок N и α или алгоритма их эффективного вычисления задача об экспоненциальной устойчивости не может считаться до конца решенной. В работах [11, 12], где в качестве системы сравнения выбирались ОДУ, такой алгоритм удалось реализовать за счет применения техники M-матриц. В нашей работе мы используем близкие к теории M-матриц методы монотонных операторов, но предваряем этот этап получением точных оценок N и α для фундаментального решения системы сравнения.

§1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ — множества вещественных и неотрицательных вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{R}^n$ — пространство вещественных n-мерных векторов, $\mathbb{R}^{n\times n}$ – алгебра $n \times n$-матриц с нулем Θ и единицей I. Норму в пространстве $\mathbb{R}^n$ и согласованную с ней норму $\mathbb{R}^{n\times n}$ обозначим $|\cdot|$.

Неравенства $A \geq B$ понимаем как сответствующие неравенства для всех элементов матриц A и B. Через $\operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}$ будем обозначать диагональную матрицу, на главной диагонали которой стоят числа $a_1, \ldots, a_n$.

Рассмотрим линейную автономную систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + \int_0^\tau dQ(s)x(t-s) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$, $Q\colon [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ — матрица-функция ограниченной вариации, $Q(0) = \Theta$, интегралы понимаются в смысле Римана — Стилтьеса, вектор-функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ локально суммируема. Начальную функцию, не нарушая общности [1, с. 9–10], считаем частью внешнего возмущения f.

Запись системы функционально-дифференциальных уравнений в виде (1) с использованием интеграла Стилтьеса включает в себя уравнения с разными видами последействия. В частности, если Q — кусочно-постоянная на $[0,\tau]$ функция, то (1) задает наиболее часто встречающиеся *дифференциально-разностные уравнения*:

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{K} A_k x(t-\tau_k) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где A_k — постоянные $n\times n$-матрицы, τ_k — неотрицательные вещественные числа.

Следуя [1, с. 9–10], назовём *решением* системы (1) локально абсолютно непрерывную вектор-функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. В указанных выше предположениях система (1) с заданным начальным условием $x(0) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима и ее решение представимо в виде [1, с. 84].

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)f(s)\,ds. \tag{3}$$

Матрица-функция $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, называется *фундаментальной матрицей* системы (1). Она однозначно определяется как решение матричного уравнения

$$\dot{X}(t) + \int_0^\tau dQ(s)X(t-s) = \Theta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

дополненного начальными условиями $X(0) = I$, $X(\xi) = \Theta$ при $\xi < 0$.

Из (3) следует, что поведение любого решения полностью определяется свойствами фундаментальной матрицы.

Определение 1. Систему (1) назовём *экспоненциально устойчивой*, если существуют $N, \alpha > 0$ такие, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство:

$$|X(t)| \le Ne^{-\alpha t}. \tag{5}$$

Следующую матрицу-функцию

$$G(\gamma) = -\gamma I + \int_0^\tau e^{\gamma s}\, dQ(s), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

будем называть *характеристической функцией* системы (1).

Замечание 1. Лаплас-образ функции X имеет вид:

$$\left(pI + \int_0^\tau e^{-ps} dQ(s)\right)^{-1}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Это выражение совпадает с $(G(\gamma))^{-1}$, если $p = -\gamma$, где γ - вещественное число.

Теорема 1 ([16]). *Пусть $\gamma \in [0, \alpha)$ и справедливо неравенство* (5). *Тогда имеет место равенство*

$$\int_0^\infty X(t)e^{\gamma t}\, dt = G^{-1}(\gamma).$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in [0, \alpha)$. Перепишем (4) в виде

$$(X(t)e^{\gamma t})' - \gamma X(t)e^{\gamma t} = -\int_0^\tau e^{\gamma s}\, dQ(s) X(t-s) e^{\gamma(t-s)}. \tag{6}$$

Проинтегрируем обе стороны равенства (6) от 0 до t и сменим порядок интегрирования (это возможно по теореме Фубини [5, с. 317]):

$$\begin{aligned} X(t)e^{\gamma t} - X(0) - \gamma \int_0^t X(s)e^{\gamma s}\, ds \\ &= -\int_0^t \left(\int_0^\tau e^{\gamma\xi}\, dQ(\xi) X(s-\xi) e^{\gamma(s-\xi)}\right) ds \\ &= -\int_0^\tau e^{\gamma\xi}\, dQ(\xi) \left(\int_\xi^t X(s-\xi) e^{\gamma(s-\xi)}\, ds\right) \\ &= -\int_0^\tau e^{\gamma\xi}\, dQ(\xi) \left(\int_0^{t-\xi} X(s) e^{\gamma s}\, ds\right). \end{aligned}$$

Перейдём к пределу при $t \to \infty$. С учетом оценки (5), сходимости интеграла $\int_0^\infty X(t)e^{\gamma t}\,dt$ и теоремы Лебега [5, с. 302–303] получаем:

$$I + \gamma \int_0^\infty X(s)e^{\gamma s}\,ds = \int_0^\tau e^{\gamma\xi}\,dQ(\xi) \int_0^\infty X(s)e^{\gamma s}\,ds,$$
$$I = G(\gamma) \int_0^\infty X(s)e^{\gamma s}\,ds.$$

Из последнего равенства следуют оба утверждения теоремы. □

Следствие 1. *Если система* (1) *экспоненциально устойчива, то матрица* $\int_0^\tau dQ(s)$ *обратима, причем*

$$\int_0^\infty X(t)\,dt = \left(\int_0^\tau dQ(s)\right)^{-1}.$$

Следствие 2 ([15, 3])**.** *Если система* (2) *экспоненциально устойчива, то матрица* $\sum_{m=1}^M A_m$ *обратима, причем*

$$\int_0^\infty X(t)\,dt = \left(\sum_{m=1}^M A_m\right)^{-1}.$$

Определение 2 ([15])**.** Назовем матрицу A *положительно обратимой*, если она имеет обратную и $A^{-1} \geq \Theta$.

Следствие 3. *Если для фундаментальной матрицы системы* (1) *справедлива двусторонняя оценка*

$$\Theta \leq X(t) \leq Ne^{-\alpha t},$$

то матрица $\int_0^\tau dQ(s)$ *положительно обратима.*

§2. Система сравнения

Выделим в матрице Q часть элементов главной диагонали и перепишем систему (1) в виде

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^\omega dR(s)x(t-s) = \int_0^\sigma dP(s)x(t-s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (7)$$

Здесь $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $a_k \in \mathbb{R}$; $R(s) = \operatorname{diag}\{r_1(s), r_2(s), ..., r_n(s)\}$, $r_k(s)$ – монотонные функции; все элементы матрицы-функции P неубывающие; $\omega, \sigma \in \mathbb{R}_+$.

Систему, которая определяется левой частью (7)

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^\omega dR(s)x(t-s) = \Theta, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

далее будем называть *системой сравнения.*

Так как матрицы A и $R(s)$ диагональные, то систему сравнения можно рассматривать как совокупность независимых скалярных уравнений

$$\dot{x}(t) + a_k x(t) + \int_0^\omega x_k(t-s)\, dr_k(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad k = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Для фундаментальных решений скалярных уравнений вида (8) в работах [6, 7] были получены точные двусторонние оценки. Приведем здесь эти результаты.

§3. Оценки для скалярных уравнений

Рассмотрим скалярное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \int_0^\omega x(t-s)\, dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, r — функция ограниченной вариации, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса. Через $x_0 = x_0(t)$ будем обозначать фундаментальное решение уравнения (9).

Характеристическая функция уравнения (9) имеет вид

$$g(\gamma) = -\gamma + a + \int_0^\omega e^{\gamma s}\, dr(s), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Хорошо известен следующий критерий положительности фундаментального решения.

Теорема 2 ([2]). *Фундаментальное решение уравнения* (9) *положительно при всех* $t \geq 0$, *если и только если функция* g *имеет на вещественной оси хотя бы один корень.*

В случаях, когда функция r является монотонной (невозрастающей или неубывающей), для фундаментального решения уравнения (9) получены двусторонние экспоненциальные оценки.

Теорема 3 ([6, 7]). *Пусть функция r неубывающая. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

- *Фундаментальное решение уравнения* (9) *имеет при некоторых $\alpha, N > 0$ двустороннюю оценку*

$$0 < x_0(t) \le Ne^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

- *Существует $\zeta > 0$, такое что $g(\zeta) = 0$, $g'(\zeta) < 0$.*

- *Справедливы неравенства $g(0) > 0$, $g'(0) < 0$ и $\int_0^\omega e^{(\zeta^*+a)s} dr(s) \le \zeta^*$, где ζ^* — единственный корень уравнения*

$$\int_0^\omega \zeta s e^{(\zeta+a)s} dr(s) = \int_0^\omega e^{(\zeta+a)s} dr(s).$$

Если удается найти корень уравнения $g(\zeta) = 0$, то оценку (10) можно сделать эффективной.

Теорема 4 ([6, 7]). *Если в уравнении* (9) *функция r неубывающая, а для характеристической функции при некотором вещественном $\zeta > 0$ выполнены условия $g(\zeta) = 0$, $g'(\zeta) < 0$, то фундаментальное решение уравнения* (9) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\zeta t} \le x_0(t) \le -\frac{1}{g'(\zeta)} e^{-\zeta t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{11}$$

и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} x_0(t) e^{\zeta t} = -\frac{1}{g'(\zeta)}$.

Замечание 2. *Показатель экспоненты и постоянные 1 и $-\frac{1}{g'(-\zeta)}$ в оценке* (11) *точные.*

Теорема 5 ([6, 7]). *Пусть функция r невозрастающая. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

- *Фундаментальное решение уравнения* (9) *имеет оценку* (10).

- *Функция g имеет вещественный корень.*
- $a + r(\omega) > 0$.

Теорему 5 также можно усилить, если найден корень функции g.

Теорема 6 ([6, 7])**.** *Если в уравнении* (9) *функция r невозрастающая и при некотором вещественном $\zeta > 0$ справедливо равенство $g(\zeta) = 0$, то фундаментальное решение уравнения* (9) *имеет двустороннюю оценку*

$$me^{-\zeta t} \le x_0(t) \le e^{-\zeta t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{12}$$

и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} x_0(t)e^{\zeta t} = -\frac{1}{g'(\zeta)}$.

Замечание 3. Показатель экспоненты и постоянные $m = \min\limits_{t\in[0,\omega]} x_0(t)e^{\zeta t}$ и 1 в оценке (12) точные.

Вернемся к системе сравнения (8). Запишем ее фундаментальную матрицу

$$X_0(t) = \operatorname{diag}\{x_{01}(t), x_{02}(t), \ldots, x_{0n}(t)\},$$

где x_{0k} – фундаментальные решения уравнений (8), и характеристическую функцию:

$$G_0(\gamma) = \operatorname{diag}\{g_1(\gamma), g_2(\gamma), \ldots, g_n(\gamma)\},$$

где g_k – соответственно, характеристические функции уравнений (8).

Считаем, что при $k = \overline{1,m}$ функции r_k неубывающие и для функций g_k выполнены условия теоремы 4, а при $k = \overline{m+1,n}$ функции r_k невозрастающие и для функций g_k выполнены условия теоремы 6. Через ζ_k обозначим наименьшие положительные корни функций g_k.

Из теорем 4 и 6 получаем оценки для элементов фундаментальной матрицы $X_0(t)$:

$$\text{если} \quad k = \overline{1,m}, \quad \text{то} \quad e^{-\zeta_k t} \le x_{0k}(t) \le -\frac{1}{g_k'(\zeta_k)}e^{-\zeta_k t}; \tag{13}$$

$$\text{если} \quad k = \overline{m+1,n}, \quad \text{то} \quad m_k e^{-\zeta_k t} \le x_{0k}(t) \le e^{-\zeta_k t}. \tag{14}$$

Таким образом, для фундаментальной матрицы системы сравнения справедлива оценка

$$\Theta \le X_0(t) \le Ne^{-\zeta_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{15}$$

где $\zeta_0 = \min\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$, $N = \operatorname{diag}\{-\frac{1}{g_1'(\zeta_1)}, \ldots, -\frac{1}{g_m'(\zeta_m)}, 1, \ldots, 1\}$.

§4. Основные результаты

Используя (8) в качестве системы сравнения, получим двустороннюю оценку фундаментальной матрицы системы (7).

Из равенства (4) следует, что фундаментальная матрица системы (7) однозначно определяется как решение матричного уравнения

$$\dot{X}(t) + AX(t) + \int_0^{\omega} dR(s)X(t-s) = \int_0^{\sigma} dP(s)X(t-s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (16)$$

дополненного начальными условиями $X(0) = I$, $X(\xi) = \Theta$ при $\xi < 0$.

Используя формулу (3), перепишем уравнение (16) в эквивалентной интегральной форме:

$$X(t) = X_0(t) + (TX)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (17)$$

где

$$(TY)(t) = \int_0^t X_0(t-s) \int_0^{\sigma} dP(\theta)Y(s-\theta)\, ds.$$

Заметим, что оператор T является интегральным оператором Вольтерры, следовательно, его спектральный радиус равен нулю. Если функция P не убывает на $[0, \sigma]$, то оператор T инвариантен относительно конуса неотрицательных матриц-функций. Эти факты позволяют применить к оператору T следующий известный результат.

Предложение 1 ([4, Теорема 9.3, с. 86]). *Если для матрицы $V \geq \Theta$ справедливо неравенство*

$$V \leq TV + X_0 \quad (TV + X_0 \leq V),$$

то $V \leq X$ $(X \leq V)$, где X — решение уравнения $X = TX + X_0$.

Лемма 1. *Если $X_0(t) \geq 0$, а матрица-функция P не убывает, то фундаментальные матрицы систем* (7) *и* (8) *связаны неравенством $X(t) \geq X_0(t)$.*

Доказательство. Пусть $V = \Theta$, тогда из предложения 1 следует, что $X(t) \geq \Theta$, а из равенства (17) с учетом условий леммы получаем, что $X(t) \geq X_0(t)$. □

Замечание 4. Так как для матрицы $X_0(t)$ неравенства (13) и (14) дают эффективную оценку снизу, то в силу леммы 1 те же самые оценки верны и для матрицы $X(t)$.

Пусть $\gamma \in [0, \zeta_0]$. Обозначим

$$U(\gamma) = \int_0^\sigma e^{\gamma s} dP(s), \quad G(\gamma) = G_0(\gamma) - U(\gamma),$$
$$H(\gamma) = I - G_0^{-1}(\gamma) U(\gamma).$$

Заметим, что

$$H(\gamma) = G_0^{-1}(\gamma) G(\gamma), \quad H^{-1}(\gamma) = G^{-1}(\gamma) G_0(\gamma),$$

следовательно, на $[0, \zeta_0]$ матрицы $H(\gamma)$ и $G(\gamma)$ положительно обратимы одновременно.

Лемма 2. *Если для фундаментальной матрицы системы сравнения выполнены оценки* (15) *и при некотором* $\gamma \in [0, \zeta_0]$ *матрица* $H(\gamma)$ *положительно обратима, то для фундаментальной матрицы системы* (7) *справедлива двусторонняя оценка*

$$\Theta \le X(t) \le H^{-1}(\gamma) N e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим $C = H^{-1}(\gamma) N$, где N — диагональная матрица в оценке (15). Таким образом, $C \ge \Theta$ и

$$C = N + G_0^{-1}(\gamma) U(\gamma) C.$$

Положим $V(t) = Ce^{-\gamma t}$ и убедимся, что выполнено второе из условий в предложении 1. Действительно, используя теорему 1 и оценку (18), получаем

$$\begin{aligned}
(TV)(t) + X_0(t) &= X_0(t) + \int_0^t X_0(t-s) \int_0^\sigma dP(\theta) C e^{-\gamma(s-\theta)}\, ds \\
&\le N e^{-\gamma t} + \int_0^t X_0(t-s) e^{\gamma(t-s)} \int_0^\sigma dP(\theta) e^{\gamma\theta} C e^{-\gamma t}\, ds \\
&= N e^{-\gamma t} + \left(\int_0^t X_0(t-s) e^{\gamma(t-s)}\, ds \right) \left(\int_0^\sigma e^{\gamma\theta} dP(\theta) \right) C e^{-\gamma t} \\
&\le N e^{-\gamma t} + \left(\int_0^\infty X_0(s) e^{\gamma s}\, ds \right) U(\gamma) C e^{-\gamma t} \\
&= \left(N + G_0^{-1}(\gamma) U(\gamma) C \right) e^{-\gamma t} = C e^{-\gamma t} = V(t).
\end{aligned}$$

В силу предложения 1 отсюда следует, что $X(t) \le Ce^{-\gamma t}$. □

Теорема 7. *Пусть для фундаментальной матрицы системы сравнения выполнены оценки* (15). *Если матрица* $H(0)$ *положительно обратима, то система* (7) *экспоненциально устойчива.*

Доказательство. Так как все внедиагональные элементы матрицы $H(0)$ неотрицательны, то она положительно обратима тогда и только тогда, когда все ее угловые миноры положительны [14].

Обозначим через $M_k(\gamma)$ $(k = \overline{1,n})$ угловые миноры матрицы $H(\gamma)$. Поскольку $M_k(\gamma)$ составлены из сумм и произведений непрерывных функций, то из того, что $M_k(0) > 0$, следует, что существует ненулевой промежуток $[0, \gamma_k)$, на котором $M_k(\gamma) > 0$. Значит, матрица $H(\gamma)$ положительно обратима на множестве $[0, \gamma^*)$, где $\gamma^* = \min \gamma_k$. Ссылка на лемму 2 завершает доказательство. □

Следствие 4. *Пусть для фундаментальной матрицы системы сравнения выполнены оценки* (15). *Система* (7) *экспоненциально устойчива, если и только если матрица* $G(0) = A + \int_0^\omega dR(s) - \int_0^\sigma dP(s)$ *положительно обратима.*

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 3, а достаточность – из теоремы 7 и факта одновременной положительной обратимости матриц $H(0)$ и $G(0)$. □

Замечание 5. Следствие 4 совпадает с критериями экспоненциальной устойчивости, полученными в работе [15] для случая, когда система (7) имеет вид

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{K} A_k x(t - \omega_k) = \sum_{j=1}^{J} B_j x(t - \sigma_j), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и в работе [11] для случая, когда система (7) имеет вид

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = \sum_{j=1}^{J} B_j x(t - \sigma_j) + \int_{-\sigma}^{0} F(s)x(t + s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Обратимся еще раз к доказательству теоремы 7. Легко заметить, что условия теоремы 7 обеспечивают не просто экспоненциальную устойчивость системы (7), но выполнение оценки (18) на множестве $[0, \gamma^*)$. Манипулируя параметром γ внутри указанного интервала, можно сделать

более сильным показатель экспоненты (но при этом увеличить коэффициент при экспоненте) или оставить показатель более слабым (за счет чего уменьшить коэффициент). Таким образом, оценка (18) дает целое семейство эффективных оценок, если мы умеем определять число γ^*. В доказательстве теоремы 7 мы определили его как наименьший из первых положительных корней уравнений $M_k(\gamma) = 0$. Но в действительности справедлив более сильный факт.

Лемма 3. *Пусть матрица $H(0)$ положительно обратима и γ_0 — первый положительный корень уравнения $\det H(\gamma) = 0$. Тогда $H(\gamma)$ положительно обратима при всех $\gamma \in [0, \gamma_0)$.*

Доказательство. Отметим, что матрица $H(\gamma)$ *квазинеположительна*: все ее внедиагональные элементы неположительны.

Назовём квазинеположительную матрицу *правильной*, если при замене любого ее столбца любым неположительным столбцом получается матрица, определитель которой неположителен, и *неправильной* в противном случае.

Как известно [8, гл. 6], положительная обратимость квазинеположительной матрицы равносильна положительности всех ее главных миноров. Таким образом, все главные миноры $P_k(0)$ матрицы $H(0)$ положительны. В силу непрерывности для некоторого $\delta > 0$ и всех $\gamma \in [0, \delta)$ имеем $P_k(\gamma) > 0$. В этом пункте доказательства покажем, что для $\gamma \in [0, \delta)$ все главные подматрицы (т. е. матрицы, получаемые вычеркиванием строк и столбцов с одинаковыми множествами номеров) матрицы $H(\gamma)$ остаются правильными. Для этого покажем, что из существования неправильной главной подматрицы матрицы $H(\gamma)$ следует существование ее неправильной главной подматрицы меньшего размера. Тем самым цель будет достигнута, поскольку все матрицы размера 1×1 правильные.

Допустим, что существует главная подматрица $H_k = (h_{i,j})_{i,j=1}^k$ матрицы $H(\gamma)$ и неположительный столбец $g = \operatorname{col}(g_1, \ldots, g_k)$, заменяя которым m-й столбец матрицы H_k получаем матрицу M с положительным определителем. Разложим этот определитель по m-му столбцу:

$$\det M = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{m+i} g_i \begin{vmatrix} h_{1,1} & \ldots & h_{1,m-1} & h_{1,m+1} & \ldots & h_{1,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{i-1,1} & \ldots & h_{i-1,m-1} & h_{i-1,m+1} & \ldots & h_{i-1,k} \\ h_{i+1,1} & \ldots & h_{i+1,m-1} & h_{i+1,m+1} & \ldots & h_{i+1,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{k,1} & \ldots & h_{k,m-1} & h_{k,m+1} & \ldots & h_{k,k} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{m+i} g_i \det H_{i,m} = g_m \det H_{m,m} - \sum_{i \in \{1,\ldots,m-1,m+1,\ldots,k\}} g_i \det G_{i,m},$$

где матрицы $G_{i,m}$ получаются из матриц $H_{i,m}$ перестановкой i-го столбца на место $(m-1)$-го (если $i < m$) или $(i-1)$-го на место m-го (если $i > m$), чтобы все элементы $h_{j,j}$ оказались на главной диагонали. В силу того, что $g_i \le 0$, $i = \overline{1,k}$, и $\det H_{m,m} > 0$, получаем, что один из определителей $\det G_{i,m}$, $i \ne m$, положителен, а это означает, что одна из главных подматриц порядка $k-1$ матрицы H_k неправильная.

2. Теперь заметим, что лемма будет доказана, если для угловых миноров матрицы $H(\gamma)$ будет показано следующее: если для некоторых $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и $\gamma_1 > 0$ имеем $M_k(\gamma_1) = 0$ и $M_i(\gamma) > 0$, $i = \overline{1,k}$, $\gamma \in [0, \gamma_1)$, то $M_{k+1}(\gamma_1) \le 0$. Покажем это.

Обозначим $H(\gamma) = (h_{i,j}(\gamma))_{i,j=1}^n$ и через $\mu_{k,i}$ определители матриц, образованных пересечением первых k строк матрицы $H(\gamma)$ и ее столбцов с первого по $(k+1)$-й, кроме i-го. Заметим, что

$$M_{k+1}(\gamma) = h_{k+1,k+1}(\gamma) M_k(\gamma) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1+i} h_{k+1,i}(\gamma) \mu_{k,i}(\gamma).$$

Если $M_k(\gamma_1) = 0$ и $M_{k+1}(\gamma_1) > 0$, то среди слагаемых в правой части в силу непрерывности есть положительные для некоторых $\gamma < \gamma_1$. Но $(-1) h_{k+1,i} \ge 0$, а числа $(-1)^{k+i} \mu_{k,i}(\gamma)$ равны определителям матриц, полученных заменой столбца в главной подматрице H_k размера $k \times k$ матрицы $H(\gamma)$ неположительным столбцом. Таким образом, матрица H_k неправильная. А это в силу $M_i(\gamma) > 0$, $i = \overline{1,k}$, $\gamma \in [0, \gamma_1)$, как показано в пункте 1, неверно.

Таким образом, сформулированное выше утверждение доказано, а из него следует лемма. □

Из лемм 2 и 3 получаем следующий результат.

Теорема 8. *Пусть для фундаментальной матрицы системы сравнения выполнены оценки* (15), *матрица* $H(0)$ *положительно обратима, а* γ_0 *— первый положительный корень уравнения* $\det H(\gamma) = 0$. *Тогда для фундаментальной матрицы системы* (7) *при всех* $\gamma \in [0, \gamma_0)$ *справедлива двусторонняя оценка* (18).

§5. Примеры

Продемонстрируем работу полученных результатов на нескольких примерах, выбирая в качестве систем сравнения функционально-дифференциальные уравнения с различными видами последействия.

Пример 1. Рассмотрим систему ФДУ, для которой система сравнения содержит сосредоточенное запаздывание, причем функция $r_1(s)$ неубывающая, а $r_2(s) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + 1.5x_1(t-0.2) = \displaystyle\int_0^1 x_2(t-s)\,ds, \\ \dot{x}_2(t) + 1.2x_2(t) = 0.5x_1(t) + 0.3x_1(t-1). \end{cases}$$

Фундаментальная матрица системы сравнения $X_0(t) = \operatorname{diag}\{x_{01}(t), x_{02}(t)\}$. Очевидно, что $x_{02}(t) = e^{-1.2t}$, найдём точные оценки для фундаментального решения $x_{01}(t)$ уравнения

$$\dot{x}_1(t) + 1.5x_1(t-0.2) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{19}$$

Выпишем характеристическую функцию

$$g_1(\gamma) = -\gamma + 1.5e^{0.2\gamma}$$

и ее производную:

$$g_1'(\lambda) = -1 + 0.3e^{\gamma}.$$

Вычислим вещественные корни уравнения $g_1(\gamma) = 0$:

$$\gamma_1 \approx 8.90669, \quad \gamma_2 \approx 2.44701.$$

Искомый показатель $\zeta_1 \approx 2.44701$. Отсюда

$$-\frac{1}{g_1'(\zeta_1)} = \frac{1}{1 + 0.2\zeta_1} \approx 1.95849.$$

Оценку для решения уравнения (19) можно записать в виде

$$e^{-2.4470t} \le x_{01}(t) \le 1.9585\, e^{-2.4471t}, \quad t \ge 0.$$

Вычислим

$$G_0(\gamma) = \operatorname{diag}\{-\gamma + 1.5e^{0.2\gamma}, -\gamma + 1.2\},$$

$$G_0^{-1}(\gamma) = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{-\gamma + 1.5e^{0.2\gamma}}, \frac{1}{-\gamma + 1.2}\right\},$$

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ 0.5 + 0.3e^{\gamma} & 0 \end{pmatrix}, \quad H(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{-\gamma+1.5e^{0.2\gamma}}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ -\frac{0.5+0.3e^{\gamma}}{-\gamma+1.2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det H(\gamma) = 1 - \frac{(0.5+0.3e^{\gamma})\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{(-\gamma+1.2)(-\gamma+1.5e^{0.2\gamma})},$$

$$H^{-1}(\gamma) = \frac{1}{\det H(\gamma)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{-\gamma+1.5e^{0.2\gamma}}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ \frac{0.5+0.3e^{\gamma}}{-\gamma+1.2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C = H^{-1}(\gamma)N = \frac{1}{\det H(\gamma)} \begin{pmatrix} 1.9585 & \frac{1}{-\gamma+1.5e^{0.2\gamma}}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ 1.9585 \cdot \frac{0.5+0.3e^{\gamma}}{-\gamma+1.2} & 1 \end{pmatrix}$$

и $\gamma_0 \approx 0.336883$ — первый положительный нуль уравнения $\det H(\gamma) = 0$. Очевидно, что $H^{-1}(0) \geq \Theta$, теорема 8 применима.

Найдём матрицу C для двух разных значений γ:

$$\text{при } \gamma = 0.3 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 21.0752 & 9.70739 \\ 21.1913 & 10.7609 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma = 0.1 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 4.40963 & 1.65557 \\ 3.33349 & 2.25153 \end{pmatrix}.$$

Для любой пары C, γ получаем оценку $\operatorname{diag}\{e^{-2.447t}, e^{-1.2t}\} \leq X(t) \leq Ce^{-\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Пример 2. Рассмотрим систему ФДУ, содержащую и сосредоточенные, и распределенные запаздывания. В системе сравнения обе функции $r_1(s)$ и $r_2(s)$ невозрастающие.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + 2x_1(t) - \displaystyle\int_{t-1}^{t} x_1(s)\,ds - \frac{1}{2}x_1(t-2) = 0.5\int_0^1 x_2(t-s)\,ds, \\ \dot{x}_2(t) + x_2(t) - \dfrac{1}{2\sqrt{e}}x_2(t-1) = 0.3x_1(t). \end{cases}$$

В работе [7] для уравнений сравнения

$$\dot{x}_1(t) + 2x_1(t) - \int_{t-1}^{t} x_1(s)\,ds - \frac{1}{2}x_1(t-2) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\dot{x}_2(t) + x_2(t) - \frac{1}{2\sqrt{e}}x_2(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

найдены точные оценки фундаментальных решений:

$$0.026e^{-0.183t} \le x_{01}(t) \le e^{-0.182t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$e^{-\frac{t+1}{2}} \le x_{02}(t) \le e^{-\frac{t}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Далее получаем:

$$G_0(\gamma) = \operatorname{diag}\left\{-\gamma + 2 - \tfrac{e^\gamma - 1}{\gamma} - \tfrac{1}{2}e^{2\gamma}, -\gamma + 1 - \tfrac{1}{2\sqrt{e}}e^\gamma\right\},$$

$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5\frac{e^\gamma - 1}{\gamma} \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{0.5}{-\gamma+2-\frac{e^\gamma-1}{\gamma}-\frac{1}{2}e^{2\gamma}}\frac{e^\gamma-1}{\gamma} \\ -\frac{0.3}{-\gamma+1-\frac{1}{2\sqrt{e}}e^\gamma} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det H(\gamma) = 1 - \frac{0.15\frac{e^\gamma-1}{\gamma}}{\left(-\gamma+2-\frac{e^\gamma-1}{\gamma}-\frac{1}{2}e^{2\gamma}\right)\left(-\gamma+1-\frac{1}{2\sqrt{e}}e^\gamma\right)},$$

$$H^{-1}(\gamma) = \frac{1}{\det H(\gamma)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{0.5}{-\gamma+2-\frac{e^\gamma-1}{\gamma}-\frac{1}{2}e^{2\gamma}}\frac{e^\gamma-1}{\gamma} \\ \frac{0.3}{-\gamma+1-\frac{1}{2\sqrt{e}}e^\gamma} & 1 \end{pmatrix},$$

$\gamma_0 \approx 0.088147$ — первый положительный нуль уравнения $\det H(\gamma) = 0$. Поскольку

$$H^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{5(2\sqrt{e}-1)}{7\sqrt{e}-5} & \frac{5(2\sqrt{e}-1)}{7\sqrt{e}-5} \\ \frac{5(2\sqrt{e}-1)}{7\sqrt{e}-5} & \frac{3\sqrt{e}}{7\sqrt{e}-5} \end{pmatrix} \ge 0,$$

то теорема 8 применима.

Найдём матрицу $C = H^{-1}(\gamma)N$ для нескольких значений γ:

$$\text{при } \gamma = 0.08 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 10.3846 & 18.5026 \\ 5.26714 & 10.3846 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma = 0.05 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 2.89932 & 3.99609 \\ 1.37804 & 2.89932 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma = 0.02 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 2.01042 & 2.25866 \\ 0.899374 & 2.01042 \end{pmatrix}.$$

Для любой пары C, γ получаем оценку $\operatorname{diag}\{0.026e^{-0.183t}, e^{-\frac{t+1}{2}}\} \le X(t) \le Ce^{-\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Пример 3. Рассмотрим систему ФДУ, в системе сравнения которой функция $r_1(s)$ неубывающая, а $r_2(s)$ невозрастающая.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) - 0.5x_1(t) + 2x_1(t-0.1) + \displaystyle\int_{t-0.2}^{t} x_1(s)\,ds = \\ \qquad\qquad = 0.6x_1(t-0.3) + 0.5\displaystyle\int_0^1 x_2(t-s)\,ds, \\ \dot{x}_2(t) + 1.5x_2(t) - x_2(t-1) = 0.3x_1(t). \end{cases}$$

В работе [7] для уравнений сравнения

$$\dot{x}_1(t) - 0.5x_1(t) + 2x_1(t-0.1) + \int_{t-0.2}^{t} x_1(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$\dot{x}_2(t) + 1.5x_2(t) - x_2(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

были найдены точные оценки фундаментальных решений:

$$e^{-2.261t} \le x_{01}(t) \le 1.385e^{-2.260t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$0.282e^{-0.236t} \le x_{02}(t) \le e^{-0.235t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Строим вспомогательные матрицы

$$G_0(\gamma) = \operatorname{diag}\left\{-\gamma - 0.5 + 2e^{0.1\gamma} + \tfrac{e^{0.2\gamma}-1}{\gamma}, -\gamma + 1.5 - e^{\gamma}\right\},$$
$$U(\gamma) = \begin{pmatrix} 0.6e^{0.3\gamma} & 0.5\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix},$$
$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{0.6e^{0.3\gamma}}{-\gamma-0.5+2e^{0.1\gamma}+\frac{e^{0.2\gamma}-1}{\gamma}} & -\frac{0.5}{-\gamma-0.5+2e^{0.1\gamma}+\frac{e^{0.2\gamma}-1}{\gamma}}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ -\frac{0.3}{-\gamma+1.5-e^{\gamma}} & 1 \end{pmatrix},$$
$$\det H(\gamma) = 1 - \frac{0.6e^{0.3\gamma}}{-\gamma-0.5+2e^{0.1\gamma}+\frac{e^{0.2\gamma}-1}{\gamma}} - \frac{0.15\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}}{\left(-\gamma-0.5+2e^{0.1\gamma}+\frac{e^{0.2\gamma}-1}{\gamma}\right)(-\gamma+1.5-e^{\gamma})},$$
$$H^{-1}(\gamma) = \frac{1}{\det H(\gamma)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{0.5}{-\gamma-0.5+2e^{0.1\gamma}+\frac{e^{0.2\gamma}-1}{\gamma}}\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \\ \frac{0.3}{-\gamma+1.5-e^{\gamma}} & 1 - \frac{0.6e^{0.3\gamma}}{-\gamma-0.5+2e^{0.1\gamma}+\frac{e^{0.2\gamma}-1}{\gamma}} \end{pmatrix},$$

находим первый положительный корень уравнения $\det H(\gamma) = 0$: $\gamma_0 \approx 0.157756$. Поскольку

$$H^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 17/8 & 5/8 \\ 51/40 & 11/8 \end{pmatrix} \ge 0,$$

то мы в условиях применимости теоремы 8.

Найдём матрицу $C = H^{-1}(\gamma)N$ для нескольких значений γ:

$$\text{при } \gamma = 0.15 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 22.9427 & 5.64408 \\ 36.5785 & 9.99858 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma = 0.1 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 4.79267 & 1.12179 \\ 4.87672 & 2.14147 \end{pmatrix},$$

$$\text{при } \gamma = 0.05 \quad \text{имеем} \quad C = \begin{pmatrix} 3.4532 & 0.769603 \\ 2.59815 & 1.57904 \end{pmatrix}.$$

Для любой пары C, γ получаем оценку $\operatorname{diag}\{e^{-2.261t}, 0.282e^{-0.236t}\} \le X(t) \le Ce^{-\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1991.

2. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными*. Пермь: изд-во Перм. ун-та, 2001.

3. Гусаренко С.А. *Признаки разрешимости задач о накоплении возмущений для функционально-дифференциальных уравнений*. Функционально-дифференциальные уравнения // Межвуз. сб. научн. тр. Пермь, 1987. С. 30–40.

4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах*. Наука, М., 1970.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1981.

6. Малыгина В.В. *Оценка показателя экспоненты для устойчивых решений одного класса дифференциально-разностных уравнений* // Изв. вузов. Матем. 2021. № 12. С. 67-79.

7. Малыгина В.В., Чудинов К.М. *О точных двусторонних оценках устойчивых решений автономных функционально-дифференциальных уравнений* // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, №2. С. 360–378.

8. Мартынюк А.А., Оболенский А.Ю. *Устойчивость решений автономных систем Важевского* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1392–1407.

9. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*. М.: Наука, 1972.

10. Оболенский А.Ю. *Об устойчивости решений автономных систем Важевского с запаздыванием* // Укр. матем. журн. 1983. Т. 35. С. 574–579.

11. Перцев Н.В. *Применение M-матриц для построения экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифференциальных уравнений* // Матем. труды. 2013. Т. 16, № 2. С. 111–141.

12. Перцев Н.В., Пичугин Б.Ю., Пичугина А.Н. *Применение M-матриц для исследования математических моделей живых систем* // Матем. биология и биоинформ. 2018. Т. 13, № 1. С. 208–237.

13. Рябов Ю.А. *Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени* // ДАН СССР. 1963. Т. 151, №1. С. 52–54.

14. Berman A., Plemmons R.J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Philadelphia: SIAM, 1994.

15. Györi I. *Interaction between oscillations and global asymptotic stability in delay differential equations* // Differential Integral Equations. 1990. V. 3, № 1. P. 181–200.

16. Sabatulina T.L. *On sufficient conditions of exponential stability for systems of linear autonomous differential equations with aftereffect* // Functional Differential Equations. 2021. V. 8, № 1-2. P. 73–83.

Сабатулина Татьяна Леонидовна
Малыгина Вера Владимировна
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский просп., 29,
Пермь, 614990, Россия.
E-mail: tlsabatulina@list.ru
E-mail: mavera@list.ru

Поступила в редакцию
26 мая 2023 г
Получена после доработки
14 июня 2023 г.
Принята к публикации
16 июня 2023 г.