УДК 517.929.4
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.108

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2023, том 26, № 1, 150-175

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ПРОТИВОВИРУСНОГО ИММУННОГО ОТВЕТА

М. А. Скворцова

Рассматривается модель противовирусного иммунного ответа, предложенная в работах Г.И. Марчука. Модель описывается системой дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями. Изучается асимптотическая устойчивость стационарного решения системы, соответствующего полностью здоровому организму. Получены оценки множества притяжения данного стационарного решения и установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности. Результаты получены с использованием функционала Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова и фразы: модель противовирусного иммунного ответа, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, множество притяжения, функционал Ляпунова – Красовского

§1. Введение и постановка задачи

Настоящая работа посвящена исследованию одной из моделей иммунологии, предложенной в работах Г.И. Марчука [10]. В монографии [10] описан ряд математических моделей, активные исследования которых проводились Г.И. Марчуком и его учениками, а также другими отечественными и зарубежными авторами. Простейшая модель заболевания, предложенная Г.И. Марчуком в [9], а также некоторые ее модификации, изучались в работах [1, 2, 10, 22, 24, 27, 28, 31, 32, 35, 36]. Модели противобактериального иммунного ответа, основанные на моделях Г.И. Марчука, рассматривались в работах [2, 10, 14, 15]. Модели противовирусного иммунного ответа, предложенные в работах Г.И. Марчука, а также некоторые обобщения этих моделей, изучались в работах [2, 8, 10, 13, 23, 28].

В настоящей работе мы рассмотрим модель противовирусного иммунного ответа (см. [10], § 3.2, с. 115–126), которая описывается системой дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями:

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = \nu x_9(t) + nb_{95}x_5(t)x_9(t) - \gamma_{18}x_1(t)x_8(t)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008)

© М. А. Скворцова; 2023

$$-\gamma_{12}Mx_1(t) - \gamma_{19}C^*(1 - x_9(t) - x_{10}(t))x_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = \gamma_{21}Mx_1(t) - \alpha_2 x_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}x_3(t) = b_{32}\left[\rho_{32}\xi(x_{10}(t))x_2(t-\tau_3)x_3(t-\tau_3) - x_2(t)x_3(t)\right]$$
$$-b_3x_2(t)x_3(t)x_5(t) + \alpha_3(X_3^* - x_3(t)),$$

$$\frac{d}{dt}x_4(t) = b_{42}\left[\rho_{42}\xi(x_{10}(t))x_2(t-\tau_4)x_4(t-\tau_4) - x_2(t)x_4(t)\right]$$
$$-b_4x_2(t)x_4(t)x_6(t) + \alpha_4(X_4^* - x_4(t)),$$

$$\frac{d}{dt}x_5(t) = b_5\Big[\rho_5\xi(x_{10}(t))x_2(t-\tau_5)x_3(t-\tau_5)x_5(t-\tau_5) - x_2(t)x_3(t)x_5(t)\Big]$$
$$-b_{59}x_5(t)x_9(t) + \alpha_5(X_5^* - x_5(t)),$$

$$\frac{d}{dt}x_6(t) = b_6\Big[\rho_6\xi(x_{10}(t))x_2(t-\tau_6)x_4(t-\tau_6)x_6(t-\tau_6) - x_2(t)x_4(t)x_6(t)\Big]$$
$$+\alpha_6(X_6^* - x_6(t)),$$

$$\frac{d}{dt}x_7(t) = b_7\rho_7\xi(x_{10}(t))x_2(t-\tau_7)x_4(t-\tau_7)x_6(t-\tau_7) + \alpha_7(X_7^* - x_7(t)),$$

$$\frac{d}{dt}x_8(t) = \rho_8x_7(t) - \gamma_{81}x_1(t)x_8(t) - \alpha_8x_8(t),$$

$$\frac{d}{dt}x_9(t) = \sigma C^*x_1(t)(1 - x_9(t) - x_{10}(t)) - b_{95}x_5(t)x_9(t) - b_{10}x_9(t),$$

$$\frac{d}{dt}x_{10}(t) = b_{95}x_5(t)x_9(t) + b_{10}x_9(t) - \alpha_{10}x_{10}(t). \tag{1.1}$$

Здесь $x_1(t)$ — количество свободно циркулирующих в организме вирусов, $x_2(t)$ — количество стимулированных макрофагов, $x_3(t)$ — количество T-лимфоцитов-помощников клеточного иммунитета, $x_4(t)$ — количество T-лимфоцитов-помощников гуморального иммунитета, $x_5(t)$ — количество T-клеток-эффекторов, $x_6(t)$ — количество B-лимфоцитов, $x_7(t)$ — количество плазматических клеток, $x_8(t)$ — количество антител, $x_9(t)$ — количество зараженных вирусами клеток органа-мишени, $x_{10}(t)$ — нефункционирующая часть пораженного вирусами органа-мишени (для непораженного органа $x_{10} = 0$, для полностью пораженного $x_{10} = 1$). Предполагается, что $\xi(x_{10})$ — невозрастающая неотрицательная функция, определенная на $[0, 1]$ и удовлетворяющая условию Липшица на этом отрезке, которая учитывает нарушение нормальной работы иммунной системы вследствие значительного поражения органа; $0 \le \xi(x_{10}) \le 1$, $\xi(0) = 1$, $\xi(1) = 0$. Параметры запаздывания $\tau_k > 0$, $k = 3, \ldots, 7$, учитывают время, необходимое для образования новых клеток иммунной системы. Через $X_k^* > 0$,

$k = 3, \ldots, 7$, обозначены постоянные уровни соответствующих клеток в полностью здоровом организме. Все коэффициенты системы предполагаются постоянными и положительными. Более подробное описание модели содержится в [10].

Для системы (1.1) зададим начальные условия:

$$x_j(t) = \varphi_j(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \tau = \max_{k=3,\ldots,7} \tau_k, \quad j = 1, \ldots, 10, \tag{1.2}$$

где $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, 10$, — заданные непрерывные функции, при этом

$$\varphi_j(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad j = 1, \ldots, 10, \quad \max_{t \in [-\tau, 0]} \varphi_{10}(t) < 1. \tag{1.3}$$

Хорошо известно (см., например, [10], с. 124), что решение начальной задачи (1.1)–(1.3) существует, единственно, имеет неотрицательные компоненты, при этом существует точка $t' > 0$ такая, что $x_{10}(t) < 1$ при $t \in (0, t')$. Определим точку t' следующим образом. Положим $t' = \infty$, если $x_{10}(t) < 1$ при $t > 0$, и $t' < \infty$, если $x_{10}(t) < 1$ при $t \in (0, t')$, а $x_{10}(t') = 1$. В последнем случае будем считать, что решение задачи (1.1)–(1.3) определено только при $t \in (0, t')$. С биологической точки зрения это означает, что за промежуток времени $t \in (0, t')$ вирусы полностью поразили орган. Ниже будут приведены условия на параметры системы и на начальные данные, при которых будет выполнено $x_{10}(t) < 1$ при всех $t > 0$.

Как отмечено в [10], система (1.1) обладает стационарным решением, которое соответствует полностью здоровому организму:

$$X^* = (X_1^*, \ldots, X_{10}^*)^{\mathrm{T}} = \left(0, 0, X_3^*, X_4^*, X_5^*, X_6^*, X_7^*, \frac{\rho_8}{\alpha_8} X_7^*, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}. \tag{1.4}$$

Достаточным условием асимптотической устойчивости данного стационарного решения является выполнение неравенства (см. [10], с. 124)

$$\left(\gamma_{12} M + \gamma_{18} \frac{\rho_8}{\alpha_8} X_7^* + \gamma_{19} C^*\right)(b_{95} X_5^* + b_{10}) > \sigma C^* (\nu + n b_{95} X_5^*). \tag{1.5}$$

Цель настоящей работы — при выполнении условия (1.5) указать оценки множества притяжения стационарного решения (1.4) и получить оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности к данному стационарному решению.

Отметим, что активные исследования в этом направлении проводятся с использованием функционалов типа Ляпунова – Красовского (см., например, [3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 21, 25, 26, 29, 30, 33, 37] для общих классов уравнений с запаздыванием и [15, 16, 17, 18, 19, 34, 35] для конкретных биологических моделей). В настоящей работе при изучении системы (1.1) мы также будем использовать этот подход.

§2. Основной результат

Вначале сведем задачу об устойчивости стационарного решения (1.4) к исследованию устойчивости нулевого решения. Сделаем замену переменных

$$x(t) = X^* + y(t),$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_{10}(t))^{\mathrm{T}}$, $y(t) = (y_1(t), \dots, y_{10}(t))^{\mathrm{T}}$. Тогда система (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = \nu y_9(t) + nb_{95}\Big(X_5^* + y_5(t)\Big)y_9(t) - \gamma_{18}y_1(t)\Big(\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^* + y_8(t)\Big)$$

$$-\gamma_{12}My_1(t) - \gamma_{19}C^*(1 - y_9(t) - y_{10}(t))y_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_2(t) = \gamma_{21}My_1(t) - \alpha_2 y_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_3(t) = b_{32}\Big[\rho_{32}\xi(y_{10}(t))y_2(t-\tau_3)\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_3)\Big) - y_2(t)\Big(X_3^* + y_3(t)\Big)\Big]$$

$$-b_3y_2(t)\Big(X_3^* + y_3(t)\Big)\Big(X_5^* + y_5(t)\Big) - \alpha_3y_3(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_4(t) = b_{42}\Big[\rho_{42}\xi(y_{10}(t))y_2(t-\tau_4)\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_4)\Big) - y_2(t)\Big(X_4^* + y_4(t)\Big)\Big]$$

$$-b_4y_2(t)\Big(X_4^* + y_4(t)\Big)\Big(X_6^* + y_6(t)\Big) - \alpha_4y_4(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_5(t) = b_5\Big[\rho_5\xi(y_{10}(t))y_2(t-\tau_5)\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_5)\Big)\Big(X_5^* + y_5(t-\tau_5)\Big)$$

$$-y_2(t)\Big(X_3^* + y_3(t)\Big)\Big(X_5^* + y_5(t)\Big)\Big] - b_{59}\Big(X_5^* + y_5(t)\Big)y_9(t) - \alpha_5y_5(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_6(t) = b_6\Big[\rho_6\xi(y_{10}(t))y_2(t-\tau_6)\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_6)\Big)\Big(X_6^* + y_6(t-\tau_6)\Big)$$

$$-y_2(t)\Big(X_4^* + y_4(t)\Big)\Big(X_6^* + y_6(t)\Big)\Big] - \alpha_6y_6(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_7(t) = b_7\rho_7\xi(y_{10}(t))y_2(t-\tau_7)\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_7)\Big)\Big(X_6^* + y_6(t-\tau_7)\Big) - \alpha_7y_7(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_8(t) = \rho_8y_7(t) - \gamma_{81}y_1(t)\Big(\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^* + y_8(t)\Big) - \alpha_8y_8(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_9(t) = \sigma C^*y_1(t)(1 - y_9(t) - y_{10}(t)) - b_{95}\Big(X_5^* + y_5(t)\Big)y_9(t) - b_{10}y_9(t),$$

$$\frac{d}{dt}y_{10}(t) = b_{95}\Big(X_5^* + y_5(t)\Big)y_9(t) + b_{10}y_9(t) - \alpha_{10}y_{10}(t). \qquad (2.1)$$

Начальные условия будут иметь вид

$$y_j(t) = \psi_j(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad j = 1, \ldots, 10, \tag{2.2}$$

где $\psi_j(t)$, $j = 1, \ldots, 10$, — заданные непрерывные функции, при этом

$$\psi_j(t) \geq -X_j^*, \quad t \in [-\tau, 0], \quad j = 1, \ldots, 10, \quad \max_{t \in [-\tau, 0]} \psi_{10}(t) < 1. \tag{2.3}$$

Замечание 1. Вектор-функции $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{10}(t))^{\mathrm{T}}$ и $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_{10}(t))^{\mathrm{T}}$ связаны соотношением $\psi(t) = \varphi(t) - X^*$.

Теперь перейдем к построению функционала Ляпунова – Красовского. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1)–(2.3), определенное при $t \in (0, t')$. Рассмотрим функционал

$$V(t, y) = \sum_{j=1}^{10} h_j y_j^2(t) + \sum_{k=3}^{7} \int\limits_{t-\tau_k}^{t} h_k \beta_k e^{-æ_k(t-s)} y_2^2(s) ds. \tag{2.4}$$

Величины $h_j > 0$, $j = 1, \ldots, 10$, $\beta_k > 0$, $æ_k > 0$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, определим по следующему правилу. Пусть $æ_k > 0$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, — произвольные. Определим величины ε и δ:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{99} - \sqrt{(a_{11} - a_{99})^2 + 4a_{19}a_{91}}\right) > 0, \tag{2.5}$$

$$0 < \delta < \min\left\{\varepsilon, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_{10}\right\}, \tag{2.6}$$

где

$$a_{11} = \left(\gamma_{12} M + \gamma_{18} \frac{\rho_8}{\alpha_8} X_7^* + \gamma_{19} C^*\right), \quad a_{99} = (b_{95} X_5^* + b_{10}), \tag{2.7}$$

$$a_{19} = (\nu + n b_{95} X_5^*), \quad a_{91} = \sigma C^*. \tag{2.8}$$

Замечание 2. Неравенство $\varepsilon > 0$ вытекает из условия (1.5) асимптотической устойчивости стационарного решения (1.4), которое эквивалентно неравенству $a_{11}a_{99} > a_{19}a_{91}$.

Зададим величины $\beta_k > 0$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\beta_3 = \frac{2}{\varepsilon_3} b_{32} \rho_{32} X_3^* e^{æ_3 \tau_3/2}, \tag{2.9}$$

$$\beta_4 = \frac{2}{\varepsilon_4} b_{42} \rho_{42} X_4^* e^{æ_4 \tau_4/2}, \tag{2.10}$$

$$\beta_5 = \frac{4}{\varepsilon_5} b_5 \rho_5 X_3^* X_5^* e^{æ_5 \tau_5/2}, \tag{2.11}$$

$$\beta_6 = \frac{4}{\varepsilon_6} b_6 \rho_6 X_4^* X_6^* e^{æ_6 \tau_6/2}, \tag{2.12}$$

$$\beta_7 = \frac{4}{\varepsilon_7} b_7 \rho_7 X_4^* X_6^* e^{æ_7 \tau_7/2}, \tag{2.13}$$

где

$$\varepsilon_3 = \frac{2(\alpha_3 - \delta)}{\left(2b_{32}\rho_{32}e^{æ_3\tau_3/2} + (b_{32} + b_3 X_5^*)\right) X_3^*}, \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{2(\alpha_4 - \delta)}{\left(2b_{42}\rho_{42}e^{æ_4\tau_4/2} + (b_{42} + b_4 X_6^*)\right) X_4^*}, \tag{2.15}$$

$$\varepsilon_5 = \frac{(\alpha_5 - \delta)}{\left(4b_5\rho_5 e^{æ_5\tau_5/2} + b_5\right) X_3^* X_5^*}, \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_6 = \frac{2(\alpha_6 - \delta)}{\left(4b_6\rho_6 e^{æ_6\tau_6/2} + b_6\right) X_4^* X_6^*}, \tag{2.17}$$

$$\varepsilon_7 = \frac{(\alpha_7 - \delta)}{4b_7\rho_7 e^{æ_7\tau_7/2} X_4^* X_6^*}. \tag{2.18}$$

Определим величины $h_j > 0$, $j = 1, \ldots, 10$:

$$h_1 = \frac{1}{2(\varepsilon - \delta)} \max\left\{ \frac{a_{91}}{a_{19}} \left[\frac{b_{59}^2}{\left(4b_5\rho_5 e^{æ_5\tau_5/2} + b_5\right)^2 (X_3^*)^2} + 1 \right], \right.$$

$$\left. \left[\frac{5(\gamma_{21}M)^2}{(\alpha_2 - \delta)^2} + \left(\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8} X_7^*\right)^2 \frac{(\alpha_7 - \delta)^2}{(4b_7\rho_7\rho_8 X_4^* X_6^*)^2 e^{æ_7\tau_7}} \right] \right\}, \tag{2.19}$$

$$h_2 = \frac{5}{(\alpha_2 - \delta)}, \tag{2.20}$$

$$h_3 = \frac{2(\alpha_3 - \delta)}{\left(2b_{32}\rho_{32}e^{æ_3\tau_3/2} + (b_{32} + b_3 X_5^*)\right)^2 (X_3^*)^2}, \tag{2.21}$$

$$h_4 = \frac{2(\alpha_4 - \delta)}{\left(2b_{42}\rho_{42}e^{æ_4\tau_4/2} + (b_{42} + b_4 X_6^*)\right)^2 (X_4^*)^2}, \tag{2.22}$$

$$h_5 = \frac{(\alpha_5 - \delta)}{\left(4b_5\rho_5 e^{æ_5\tau_5/2} + b_5\right)^2 (X_3^* X_5^*)^2}, \tag{2.23}$$

$$h_6 = \frac{2(\alpha_6 - \delta)}{\left(4b_6\rho_6 e^{æ_6\tau_6/2} + b_6\right)^2 (X_4^* X_6^*)^2}, \tag{2.24}$$

$$h_7 = \frac{(\alpha_7 - \delta)}{(4b_7\rho_7 X_4^* X_6^*)^2 e^{æ_7\tau_7}}, \tag{2.25}$$

$$h_8 = \frac{(\alpha_7 - \delta)^2(\alpha_8 - \delta)}{(4b_7\rho_7\rho_8 X_4^* X_6^*)^2 e^{æ_7\tau_7}}, \tag{2.26}$$

$$h_9 = h_1 \frac{a_{19}}{a_{91}}, \tag{2.27}$$

$$h_{10} = \frac{2(\alpha_{10} - \delta)}{(b_{95}X_5^* + b_{10})^2}. \tag{2.28}$$

Функционал $V(t, y)$ полностью определен. Также введем обозначения:

$$\omega = \frac{1}{2}\min\left\{2\delta, æ_3, æ_4, æ_5, æ_6, æ_7\right\}, \tag{2.29}$$

$$q = 2\left(\frac{nb_{95}\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_5 h_9}} + \frac{\gamma_{18}}{\sqrt{h_8}} + \frac{\gamma_{19}C^*}{\sqrt{h_9}} + \frac{\gamma_{19}C^*}{\sqrt{h_{10}}} + \frac{b_3 X_3^*\sqrt{h_3}}{\sqrt{h_2 h_5}}\right.$$

$$\left. + \frac{b_4 X_4^*\sqrt{h_4}}{\sqrt{h_2 h_6}} + \frac{b_5 X_5^*\sqrt{h_5}}{\sqrt{h_2 h_3}} + \frac{b_6 X_6^*\sqrt{h_6}}{\sqrt{h_2 h_4}} + \frac{b_{95}}{\sqrt{h_5}} + \frac{b_{95}\sqrt{h_{10}}}{\sqrt{h_5 h_9}}\right). \tag{2.30}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнено условие* (1.5). *Тогда для компонент решения начальной задачи* (2.1)–(2.3) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям*

$$\psi_j(t) \geq -X_j^*, \quad t \in [-\tau, 0], \quad j = 1, \ldots, 10, \quad \sqrt{V(0,\psi)} < \frac{2\omega}{q}, \tag{2.31}$$

$$\max_{t\in[-\tau,0]} \psi_k(t) \leq X_k^*, \quad \frac{1}{\sqrt{h_k}} \frac{\sqrt{V(0,\psi)}}{\left(1 - \frac{q}{2\omega}\sqrt{V(0,\psi)}\right)} \leq X_k^*, \quad k = 3, 4, 5, 6, \tag{2.32}$$

$$\max_{t\in[-\tau,0]} \psi_{10}(t) < 1, \quad \frac{1}{\sqrt{h_{10}}} \frac{\sqrt{V(0,\psi)}}{\left(1 - \frac{q}{2\omega}\sqrt{V(0,\psi)}\right)} < 1, \tag{2.33}$$

имеют место оценки:

$$y_j(t) \geq -X_j^*, \quad j = 1, \ldots, 10, \quad y_{10}(t) < 1, \quad t > 0, \tag{2.34}$$

$$|y_j(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{h_j}} \frac{\sqrt{V(0,\psi)}}{\left(1 - \frac{q}{2\omega}\sqrt{V(0,\psi)}\right)} e^{-\omega t}, \quad j = 1, \ldots, 10, \quad t > 0. \tag{2.35}$$

Замечание 3. Неравенства (2.31)–(2.33) показывают, при каком начальном количестве вирусов, начальном количестве клеток иммунной системы, а также начальном количестве зараженных клеток органа-мишени, происходит полное выздоровление организма. Оценки (2.35) характеризуют скорость выздоровления организма, при этом величина $e^{-\omega t}$ отвечает за скорость выздоровления. Неравенство $y_{10}(t) < 1$ указывает на то, что ни в какой момент времени не происходит полного поражения органа.

Замечание 4. Близкие вопросы, касающиеся получения оценок множеств притяжения стационарных решений и оценок решений, характеризующих скорость стабилизации на бесконечности, для некоторых других моделей иммунологии рассматривались в [15], [35].

§3. Доказательство теоремы

3.1. Вычисление производной от функционала Ляпунова – Красовского. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1)–(2.3), определенное при $t \in (0, t')$. Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского (2.4):

$$V(t,y) = \sum_{j=1}^{10} h_j y_j^2(t) + \sum_{k=3}^{7} \int\limits_{t-\tau_k}^{t} h_k \beta_k e^{-æ_k(t-s)} y_2^2(s) ds.$$

Продифференцируем его вдоль решений системы (2.1):

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \sum_{j=1}^{10} 2h_j y_j(t) \frac{d}{dt} y_j(t) + \sum_{k=3}^{7} h_k \beta_k y_2^2(t) - \sum_{k=3}^{7} h_k \beta_k e^{-æ_k \tau_k} y_2^2(t-\tau_k)$$

$$- \sum_{k=3}^{7} æ_k \int\limits_{t-\tau_k}^{t} h_k \beta_k e^{-æ_k(t-s)} y_2^2(s) ds.$$

Учтем тот факт, что справедливы неравенства

$$y_j(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, 9, 10, \quad y_{10}(t) < 1, \quad \xi(y_{10}(t)) \leq 1, \quad t \in (0, t').$$

Тогда из системы (2.1) получим следующие тождества и оценки. Тождество для первого слагаемого:

$$2h_1 y_1(t) \frac{d}{dt} y_1(t) = -2h_1 \Big(\gamma_{12} M + \gamma_{18} \frac{\rho_8}{\alpha_8} X_7^* + \gamma_{19} C^* \Big) y_1^2(t)$$

$$+2h_1(\nu + nb_{95}X_5^*)y_1(t)y_9(t) + 2h_1nb_{95}y_1(t)y_5(t)y_9(t)$$
$$+2h_1\Big(- \gamma_{18}y_8(t) + \gamma_{19}C^*y_9(t) + \gamma_{19}C^*y_{10}(t)\Big)y_1^2(t).$$

Тождество для второго слагаемого:

$$2h_2y_2(t)\frac{d}{dt}y_2(t) = -2h_2\alpha_2y_2^2(t) + 2h_2\gamma_{21}My_1(t)y_2(t).$$

Оценка для третьего слагаемого:

$$2h_3y_3(t)\frac{d}{dt}y_3(t) \le 2h_3b_{32}\rho_{32}y_2(t-\tau_3)\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_3)\Big)y_3(t) - 2h_3\alpha_3y_3^2(t)$$
$$-2h_3\left(b_{32} + b_3X_5^*\right)X_3^*y_2(t)y_3(t) - 2h_3b_3X_3^*y_2(t)y_3(t)y_5(t).$$

Оценка для четвертого слагаемого:

$$2h_4y_4(t)\frac{d}{dt}y_4(t) \le 2h_4b_{42}\rho_{42}y_2(t-\tau_4)\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_4)\Big)y_4(t) - 2h_4\alpha_4y_4^2(t)$$
$$-2h_4\left(b_{42} + b_4X_6^*\right)X_4^*y_2(t)y_4(t) - 2h_4b_4X_4^*y_2(t)y_4(t)y_6(t).$$

Оценка для пятого слагаемого:

$$2h_5y_5(t)\frac{d}{dt}y_5(t) \le 2h_5b_5\rho_5y_2(t-\tau_5)\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_5)\Big)\Big(X_5^* + y_5(t-\tau_5)\Big)y_5(t)$$
$$-2h_5\alpha_5y_5^2(t) - 2h_5b_5X_3^*X_5^*y_2(t)y_5(t) - 2h_5b_{59}X_5^*y_5(t)y_9(t) - 2h_5b_5X_5^*y_2(t)y_3(t)y_5(t).$$

Оценка для шестого слагаемого:

$$2h_6y_6(t)\frac{d}{dt}y_6(t) \le 2h_6b_6\rho_6y_2(t-\tau_6)\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_6)\Big)\Big(X_6^* + y_6(t-\tau_6)\Big)y_6(t)$$
$$-2h_6\alpha_6y_6^2(t) - 2h_6b_6X_4^*X_6^*y_2(t)y_6(t) - 2h_6b_6X_6^*y_2(t)y_4(t)y_6(t).$$

Оценка для седьмого слагаемого:

$$2h_7y_7(t)\frac{d}{dt}y_7(t) \le 2h_7b_7\rho_7y_2(t-\tau_7)\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_7)\Big)\Big(X_6^* + y_6(t-\tau_7)\Big)y_7(t)$$
$$-2h_7\alpha_7y_7^2(t).$$

Оценка для восьмого слагаемого:

$$2h_8y_8(t)\frac{d}{dt}y_8(t) \le 2h_8\rho_8y_7(t)y_8(t) - 2h_8\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*y_1(t)y_8(t) - 2h_8\alpha_8y_8^2(t).$$

Оценка для девятого слагаемого:

$$2h_9y_9(t)\frac{d}{dt}y_9(t) \le 2h_9\sigma C^*y_1(t)y_9(t) - 2h_9\left(b_{95}X_5^* + b_{10}\right)y_9^2(t) - 2h_9b_{95}y_5(t)y_9^2(t).$$

Тождество для десятого слагаемого:

$$2h_{10}y_{10}(t)\frac{d}{dt}y_{10}(t) = 2h_{10}(b_{95}X_5^* + b_{10})y_9(t)y_{10}(t) + 2h_{10}b_{95}y_5(t)y_9(t)y_{10}(t)$$
$$-2h_{10}\alpha_{10}y_{10}^2(t).$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le U_{01} + U_{02} + U_{03} + U_\tau - \sum_{k=3}^{7} æ_k \int\limits_{t-\tau_k}^{t} h_k\beta_k e^{-æ_k(t-s)}y_2^2(s)ds, \quad (3.1)$$

где

$$U_{01} = -2h_1\Big(\gamma_{12}M + \gamma_{18}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^* + \gamma_{19}C^*\Big)y_1^2(t) - \left(2h_2\alpha_2 - \sum_{k=3}^{7}h_k\beta_k\right)y_2^2(t)$$
$$-2h_3\alpha_3y_3^2(t) - 2h_4\alpha_4y_4^2(t) - 2h_5\alpha_5y_5^2(t) - 2h_6\alpha_6y_6^2(t) - 2h_7\alpha_7y_7^2(t)$$
$$-2h_8\alpha_8y_8^2(t) - 2h_9\left(b_{95}X_5^* + b_{10}\right)y_9^2(t) - 2h_{10}\alpha_{10}y_{10}^2(t), \quad (3.2)$$

$$U_{02} = 2h_1(\nu + nb_{95}X_5^*)y_1(t)y_9(t) + 2h_2\gamma_{21}My_1(t)y_2(t)$$
$$-2h_3\left(b_{32} + b_3X_5^*\right)X_3^*y_2(t)y_3(t) - 2h_4\left(b_{42} + b_4X_6^*\right)X_4^*y_2(t)y_4(t)$$
$$-2h_5b_5X_3^*X_5^*y_2(t)y_5(t) - 2h_5b_{59}X_5^*y_5(t)y_9(t) - 2h_6b_6X_4^*X_6^*y_2(t)y_6(t)$$
$$+2h_8\rho_8y_7(t)y_8(t) - 2h_8\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*y_1(t)y_8(t) + 2h_9\sigma C^*y_1(t)y_9(t)$$
$$+2h_{10}(b_{95}X_5^* + b_{10})y_9(t)y_{10}(t), \quad (3.3)$$

$$U_{03} = 2h_1nb_{95}y_1(t)y_5(t)y_9(t) + 2h_1\Big(-\gamma_{18}y_8(t) + \gamma_{19}C^*y_9(t) + \gamma_{19}C^*y_{10}(t)\Big)y_1^2(t)$$
$$-2h_3b_3X_3^*y_2(t)y_3(t)y_5(t) - 2h_4b_4X_4^*y_2(t)y_4(t)y_6(t) - 2h_5b_5X_5^*y_2(t)y_3(t)y_5(t)$$
$$-2h_6b_6X_6^*y_2(t)y_4(t)y_6(t) - 2h_9b_{95}y_5(t)y_9^2(t) + 2h_{10}b_{95}y_5(t)y_9(t)y_{10}(t), \quad (3.4)$$

$$U_\tau = 2h_3b_{32}\rho_{32}y_2(t-\tau_3)\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_3)\Big)y_3(t)$$

$$+2h_4b_{42}\rho_{42}y_2(t-\tau_4)\Big(X_4^*+y_4(t-\tau_4)\Big)y_4(t)$$
$$+2h_5b_5\rho_5y_2(t-\tau_5)\Big(X_3^*+y_3(t-\tau_5)\Big)\Big(X_5^*+y_5(t-\tau_5)\Big)y_5(t)$$
$$+2h_6b_6\rho_6y_2(t-\tau_6)\Big(X_4^*+y_4(t-\tau_6)\Big)\Big(X_6^*+y_6(t-\tau_6)\Big)y_6(t)$$
$$+2h_7b_7\rho_7y_2(t-\tau_7)\Big(X_4^*+y_4(t-\tau_7)\Big)\Big(X_6^*+y_6(t-\tau_7)\Big)y_7(t)$$
$$-\sum_{k=3}^{7}h_k\beta_ke^{-æ_k\tau_k}y_2^2(t-\tau_k). \tag{3.5}$$

3.2. Оценка для U_{03}. Рассмотрим функцию U_{03}, определенную в (3.4). Имеем

$$U_{03}\le 2h_1nb_{95}\frac{V^{3/2}(t,y)}{\sqrt{h_1h_5h_9}}+$$
$$+2\left(\gamma_{18}\frac{V^{1/2}(t,y)}{\sqrt{h_8}}+\gamma_{19}C^*\frac{V^{1/2}(t,y)}{\sqrt{h_9}}+\gamma_{19}C^*\frac{V^{1/2}(t,y)}{\sqrt{h_{10}}}\right)V(t,y)$$
$$+2h_3b_3X_3^*\frac{V^{3/2}(t,y)}{\sqrt{h_2h_3h_5}}+2h_4b_4X_4^*\frac{V^{3/2}(t,y)}{\sqrt{h_2h_4h_6}}+2h_5b_5X_5^*\frac{V^{3/2}(t,y)}{\sqrt{h_2h_3h_5}}$$
$$+2h_6b_6X_6^*\frac{V^{3/2}(t,y)}{\sqrt{h_2h_4h_6}}+2b_{95}\frac{V^{3/2}(t,y)}{\sqrt{h_5}}+2h_{10}b_{95}\frac{V^{3/2}(t,y)}{\sqrt{h_5h_9h_{10}}}.$$

Следовательно,

$$U_{03}\le qV^{3/2}(t,y), \tag{3.6}$$

где q определено в (2.30).

3.3. Оценка для U_τ. Рассмотрим функцию U_τ, определенную в (3.5). Имеем

$$U_\tau=2h_3b_{32}\rho_{32}y_2(t-\tau_3)\Big(X_3^*+y_3(t-\tau_3)\Big)y_3(t)-h_3\beta_3e^{-æ_3\tau_3}y_2^2(t-\tau_3)$$
$$+2h_4b_{42}\rho_{42}y_2(t-\tau_4)\Big(X_4^*+y_4(t-\tau_4)\Big)y_4(t)-h_4\beta_4e^{-æ_4\tau_4}y_2^2(t-\tau_4)$$
$$+2h_5b_5\rho_5y_2(t-\tau_5)\Big(X_3^*+y_3(t-\tau_5)\Big)\Big(X_5^*+y_5(t-\tau_5)\Big)y_5(t)-h_5\beta_5e^{-æ_5\tau_5}y_2^2(t-\tau_5)$$
$$+2h_6b_6\rho_6y_2(t-\tau_6)\Big(X_4^*+y_4(t-\tau_6)\Big)\Big(X_6^*+y_6(t-\tau_6)\Big)y_6(t)-h_6\beta_6e^{-æ_6\tau_6}y_2^2(t-\tau_6)$$
$$+2h_7b_7\rho_7y_2(t-\tau_7)\Big(X_4^*+y_4(t-\tau_7)\Big)\Big(X_6^*+y_6(t-\tau_7)\Big)y_7(t)-h_7\beta_7e^{-æ_7\tau_7}y_2^2(t-\tau_7).$$

Следовательно,

$$U_\tau \le W_\tau,$$

где

$$W_\tau = h_3\frac{e^{æ_3\tau_3}}{\beta_3}(b_{32}\rho_{32})^2\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_3)\Big)^2 y_3^2(t)$$
$$+h_4\frac{e^{æ_4\tau_4}}{\beta_4}(b_{42}\rho_{42})^2\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_4)\Big)^2 y_4^2(t)$$
$$+h_5\frac{e^{æ_5\tau_5}}{\beta_5}(b_5\rho_5)^2\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_5)\Big)^2\Big(X_5^* + y_5(t-\tau_5)\Big)^2 y_5^2(t)$$
$$+h_6\frac{e^{æ_6\tau_6}}{\beta_6}(b_6\rho_6)^2\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_6)\Big)^2\Big(X_6^* + y_6(t-\tau_6)\Big)^2 y_6^2(t)$$
$$+h_7\frac{e^{æ_7\tau_7}}{\beta_7}(b_7\rho_7)^2\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_7)\Big)^2\Big(X_6^* + y_6(t-\tau_7)\Big)^2 y_7^2(t).$$

Представим W_τ в виде

$$W_\tau = W_{01} + R_\tau,$$

где

$$W_{01} = h_3\frac{e^{æ_3\tau_3}}{\beta_3}(2b_{32}\rho_{32}X_3^*)^2 y_3^2(t) + h_4\frac{e^{æ_4\tau_4}}{\beta_4}(2b_{42}\rho_{42}X_4^*)^2 y_4^2(t)$$
$$+h_5\frac{e^{æ_5\tau_5}}{\beta_5}(4b_5\rho_5X_3^*X_5^*)^2 y_5^2(t) + h_6\frac{e^{æ_6\tau_6}}{\beta_6}(4b_6\rho_6X_4^*X_6^*)^2 y_6^2(t)$$
$$+h_7\frac{e^{æ_7\tau_7}}{\beta_7}(4b_7\rho_7X_4^*X_6^*)^2 y_7^2(t), \tag{3.7}$$

$$R_\tau = h_3\frac{e^{æ_3\tau_3}}{\beta_3}(b_{32}\rho_{32})^2\Big[\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_3)\Big)^2 - \Big(2X_3^*\Big)^2\Big] y_3^2(t)$$
$$+h_4\frac{e^{æ_4\tau_4}}{\beta_4}(b_{42}\rho_{42})^2\Big[\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_4)\Big)^2 - \Big(2X_4^*\Big)^2\Big] y_4^2(t)$$
$$+h_5\frac{e^{æ_5\tau_5}}{\beta_5}(b_5\rho_5)^2\Big[\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_5)\Big)^2\Big(X_5^* + y_5(t-\tau_5)\Big)^2 - \Big(2X_3^*\Big)^2\Big(2X_5^*\Big)^2\Big] y_5^2(t)$$
$$+h_6\frac{e^{æ_6\tau_6}}{\beta_6}(b_6\rho_6)^2\Big[\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_6)\Big)^2\Big(X_6^* + y_6(t-\tau_6)\Big)^2 - \Big(2X_4^*\Big)^2\Big(2X_6^*\Big)^2\Big] y_6^2(t)$$
$$+h_7\frac{e^{æ_7\tau_7}}{\beta_7}(b_7\rho_7)^2\Big[\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_7)\Big)^2\Big(X_6^* + y_6(t-\tau_7)\Big)^2 - \Big(2X_4^*\Big)^2\Big(2X_6^*\Big)^2\Big] y_7^2(t). \tag{3.8}$$

Итак,

$$U_\tau \le W_{01} + R_\tau. \tag{3.9}$$

3.4. Оценка для U_{02}. Рассмотрим функцию U_{02}, определенную в (3.3). Имеем

$$U_{02} = 2h_1(\nu + nb_{95}X_5^*)y_1(t)y_9(t) + 2h_2\gamma_{21}My_1(t)y_2(t)$$
$$-2h_3\left(b_{32} + b_3X_5^*\right)X_3^*y_2(t)y_3(t) - 2h_4\left(b_{42} + b_4X_6^*\right)X_4^*y_2(t)y_4(t)$$
$$-2h_5b_5X_3^*X_5^*y_2(t)y_5(t) - 2h_5b_{59}X_5^*y_5(t)y_9(t) - 2h_6b_6X_4^*X_6^*y_2(t)y_6(t)$$
$$+2h_8\rho_8y_7(t)y_8(t) - 2h_8\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*y_1(t)y_8(t) + 2h_9\sigma C^*y_1(t)y_9(t)$$
$$+2h_{10}(b_{95}X_5^* + b_{10})y_9(t)y_{10}(t).$$

Отсюда следует неравенство

$$U_{02} \le W_{02}, \tag{3.10}$$

где

$$W_{02} = h_1(\nu + nb_{95}X_5^*)\left(\varepsilon_1y_1^2(t) + \frac{y_9^2(t)}{\varepsilon_1}\right) + h_2\gamma_{21}M\left(\varepsilon_2y_2^2(t) + \frac{y_1^2(t)}{\varepsilon_2}\right)$$
$$+h_3\left(b_{32} + b_3X_5^*\right)X_3^*\left(\varepsilon_3y_3^2(t) + \frac{y_2^2(t)}{\varepsilon_3}\right) + h_4\left(b_{42} + b_4X_6^*\right)X_4^*\left(\varepsilon_4y_4^2(t) + \frac{y_2^2(t)}{\varepsilon_4}\right)$$
$$+h_5b_5X_3^*X_5^*\left(\varepsilon_5y_5^2(t) + \frac{y_2^2(t)}{\varepsilon_5}\right) + h_5b_{59}X_5^*\left(\varepsilon_{59}y_5^2(t) + \frac{y_9^2(t)}{\varepsilon_{59}}\right)$$
$$+h_6b_6X_4^*X_6^*\left(\varepsilon_6y_6^2(t) + \frac{y_2^2(t)}{\varepsilon_6}\right) + h_8\rho_8\left(\varepsilon_{87}y_8^2(t) + \frac{y_7^2(t)}{\varepsilon_{87}}\right)$$
$$+h_8\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*\left(\varepsilon_{81}y_8^2(t) + \frac{y_1^2(t)}{\varepsilon_{81}}\right) + h_9\sigma C^*\left(\varepsilon_9y_9^2(t) + \frac{y_1^2(t)}{\varepsilon_9}\right)$$
$$+h_{10}(b_{95}X_5^* + b_{10})\left(\varepsilon_{10}y_{10}^2(t) + \frac{y_9^2(t)}{\varepsilon_{10}}\right), \tag{3.11}$$

где $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0$ определены в (2.14)–(2.17), $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{59}, \varepsilon_{87}, \varepsilon_{81}, \varepsilon_9, \varepsilon_{10} > 0$ будут определены ниже.

3.5. Оценка для $U_{01}+U_{02}+U_\tau$. Оценим $U_{01}+U_{02}+U_\tau$. Из неравенств (3.9) и (3.10) следует оценка

$$U_{01} + U_{02} + U_\tau \le U_{01} + W_{01} + W_{02} + R_\tau, \tag{3.12}$$

где U_{01} определено в (3.2), W_{01} определено в (3.7), W_{02} определено в (3.11), R_τ определено в (3.8). Имеем

$$U_{01} + W_{01} + W_{02} = -\sum_{j=1}^{10} h_jp_jy_j^2(t), \tag{3.13}$$

где

$$p_1 = 2\Big(\gamma_{12}M + \gamma_{18}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^* + \gamma_{19}C^*\Big) - \varepsilon_1(\nu + nb_{95}X_5^*)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_9}\sigma C^*\left(\frac{h_9}{h_1}\right) - \frac{1}{\varepsilon_2}\gamma_{21}M\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{81}}\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*\left(\frac{h_8}{h_1}\right),$$

$$p_2 = 2\alpha_2 - \varepsilon_2\gamma_{21}M - \sum_{k=3}^{7}\beta_k\left(\frac{h_k}{h_2}\right) - \frac{1}{\varepsilon_3}\left(b_{32} + b_3X_5^*\right)X_3^*\left(\frac{h_3}{h_2}\right)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_4}\left(b_{42} + b_4X_6^*\right)X_4^*\left(\frac{h_4}{h_2}\right) - \frac{1}{\varepsilon_5}b_5X_3^*X_5^*\left(\frac{h_5}{h_2}\right) - \frac{1}{\varepsilon_6}b_6X_4^*X_6^*\left(\frac{h_6}{h_2}\right),$$

$$p_3 = 2\alpha_3 - \frac{e^{æ_3\tau_3}}{\beta_3}(2b_{32}\rho_{32}X_3^*)^2 - \varepsilon_3\left(b_{32} + b_3X_5^*\right)X_3^*,$$

$$p_4 = 2\alpha_4 - \frac{e^{æ_4\tau_4}}{\beta_4}(2b_{42}\rho_{42}X_4^*)^2 - \varepsilon_4\left(b_{42} + b_4X_6^*\right)X_4^*,$$

$$p_5 = 2\alpha_5 - \frac{e^{æ_5\tau_5}}{\beta_5}(4b_5\rho_5X_3^*X_5^*)^2 - \varepsilon_5b_5X_3^*X_5^* - \varepsilon_{59}b_{59}X_5^*,$$

$$p_6 = 2\alpha_6 - \frac{e^{æ_6\tau_6}}{\beta_6}(4b_6\rho_6X_4^*X_6^*)^2 - \varepsilon_6b_6X_4^*X_6^*,$$

$$p_7 = 2\alpha_7 - \frac{e^{æ_7\tau_7}}{\beta_7}(4b_7\rho_7X_4^*X_6^*)^2 - \frac{1}{\varepsilon_{87}}\rho_8\left(\frac{h_8}{h_7}\right),$$

$$p_8 = 2\alpha_8 - \varepsilon_{87}\rho_8 - \varepsilon_{81}\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*,$$

$$p_9 = 2\left(b_{95}X_5^* + b_{10}\right) - \varepsilon_9\sigma C^* - \frac{1}{\varepsilon_1}(\nu + nb_{95}X_5^*)\left(\frac{h_1}{h_9}\right)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_{59}}b_{59}X_5^*\left(\frac{h_5}{h_9}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{10}}(b_{95}X_5^* + b_{10})\left(\frac{h_{10}}{h_9}\right),$$

$$p_{10} = 2\alpha_{10} - \varepsilon_{10}(b_{95}X_5^* + b_{10}).$$

Учитывая обозначения (2.7), (2.8) и определение (2.27), будем иметь

$$p_1 = 2a_{11} - a_{19}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_9}\right) - \frac{1}{\varepsilon_2}\gamma_{21}M\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{81}}\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*\left(\frac{h_8}{h_1}\right),$$

$$p_9 = 2a_{99} - a_{91}\left(\varepsilon_9 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{59}}b_{59}X_5^*\left(\frac{h_5}{h_9}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{10}}(b_{95}X_5^* + b_{10})\left(\frac{h_{10}}{h_9}\right).$$

Полагая

$$\varepsilon_9 = \frac{1}{\varepsilon_1},$$

подберем величину ε_1 так, чтобы было выполнено равенство

$$2a_{11} - a_{19}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_9}\right) = 2a_{99} - a_{91}\left(\varepsilon_9 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Тогда

$$\varepsilon_1 = \frac{(a_{11} - a_{99}) + \sqrt{(a_{11} - a_{99})^2 + 4a_{19}a_{91}}}{2a_{19}},$$

а следовательно,

$$p_1 = 2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon_2}\gamma_{21}M\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{81}}\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*\left(\frac{h_8}{h_1}\right),$$

$$p_9 = 2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon_{59}}b_{59}X_5^*\left(\frac{h_5}{h_9}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{10}}(b_{95}X_5^* + b_{10})\left(\frac{h_{10}}{h_9}\right),$$

где ε определено в (2.5). Тем самым, формулу (3.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} U_{01} + W_{01} + W_{02} &= -2\delta\sum_{j=1}^{10} h_j y_j^2(t) - \sum_{j=1}^{10} h_j(p_j - 2\delta)y_j^2(t) \\ &= -2\delta\sum_{j=1}^{10} h_j y_j^2(t) - \sum_{j=1}^{10} h_j r_j y_j^2(t), \end{aligned} \tag{3.14}$$

где δ определено в (2.6),

$$r_1 = 2(\varepsilon - \delta) - \frac{1}{\varepsilon_2}\gamma_{21}M\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{81}}\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*\left(\frac{h_8}{h_1}\right),$$

$$r_2 = 2(\alpha_2 - \delta) - \varepsilon_2\gamma_{21}M - \sum_{k=3}^{7}\beta_k\left(\frac{h_k}{h_2}\right) - \frac{1}{\varepsilon_3}\left(b_{32} + b_3X_5^*\right)X_3^*\left(\frac{h_3}{h_2}\right)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_4}\left(b_{42} + b_4X_6^*\right)X_4^*\left(\frac{h_4}{h_2}\right) - \frac{1}{\varepsilon_5}b_5X_3^*X_5^*\left(\frac{h_5}{h_2}\right) - \frac{1}{\varepsilon_6}b_6X_4^*X_6^*\left(\frac{h_6}{h_2}\right),$$

$$r_3 = 2(\alpha_3 - \delta) - \frac{e^{æ_3\tau_3}}{\beta_3}(2b_{32}\rho_{32}X_3^*)^2 - \varepsilon_3\left(b_{32} + b_3X_5^*\right)X_3^*,$$

$$r_4 = 2(\alpha_4 - \delta) - \frac{e^{æ_4\tau_4}}{\beta_4}(2b_{42}\rho_{42}X_4^*)^2 - \varepsilon_4\left(b_{42} + b_4X_6^*\right)X_4^*,$$

$$r_5 = 2(\alpha_5 - \delta) - \frac{e^{æ_5\tau_5}}{\beta_5}(4b_5\rho_5X_3^*X_5^*)^2 - \varepsilon_5b_5X_3^*X_5^* - \varepsilon_{59}b_{59}X_5^*,$$

$$r_6 = 2(\alpha_6 - \delta) - \frac{e^{æ_6\tau_6}}{\beta_6}(4b_6\rho_6X_4^*X_6^*)^2 - \varepsilon_6b_6X_4^*X_6^*,$$

$$r_7 = 2(\alpha_7 - \delta) - \frac{e^{æ_7\tau_7}}{\beta_7}(4b_7\rho_7 X_4^* X_6^*)^2 - \frac{1}{\varepsilon_{87}}\rho_8\left(\frac{h_8}{h_7}\right),$$

$$r_8 = 2(\alpha_8 - \delta) - \varepsilon_{87}\rho_8 - \varepsilon_{81}\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*,$$

$$r_9 = 2(\varepsilon - \delta) - \frac{1}{\varepsilon_{59}}b_{59}X_5^*\left(\frac{h_5}{h_9}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{10}}(b_{95}X_5^* + b_{10})\left(\frac{h_{10}}{h_9}\right),$$

$$r_{10} = 2(\alpha_{10} - \delta) - \varepsilon_{10}(b_{95}X_5^* + b_{10}).$$

Покажем, что

$$r_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 10.$$

В силу определений (2.9)–(2.13) величин β_k, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, будем иметь

$$r_1 = 2(\varepsilon - \delta) - \frac{1}{\varepsilon_2}\gamma_{21}M\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{81}}\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*\left(\frac{h_8}{h_1}\right),$$

$$r_2 = 2(\alpha_2 - \delta) - \varepsilon_2\gamma_{21}M - \frac{1}{\varepsilon_3}\Big(2b_{32}\rho_{32}e^{æ_3\tau_3/2} + (b_{32} + b_3X_5^*)\Big)X_3^*\left(\frac{h_3}{h_2}\right)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon_4}\Big(2b_{42}\rho_{42}e^{æ_4\tau_4/2} + (b_{42} + b_4X_6^*)\Big)X_4^*\left(\frac{h_4}{h_2}\right)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon_5}\Big(4b_5\rho_5e^{æ_5\tau_5/2} + b_5\Big)X_3^*X_5^*\left(\frac{h_5}{h_2}\right)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon_6}\Big(4b_6\rho_6e^{æ_6\tau_6/2} + b_6\Big)X_4^*X_6^*\left(\frac{h_6}{h_2}\right)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon_7}4b_7\rho_7X_4^*X_6^*e^{æ_7\tau_7/2}\left(\frac{h_7}{h_2}\right),$$

$$r_3 = 2(\alpha_3 - \delta) - \varepsilon_3\left(2b_{32}\rho_{32}e^{æ_3\tau_3/2} + (b_{32} + b_3X_5^*)\right)X_3^*,$$

$$r_4 = 2(\alpha_4 - \delta) - \varepsilon_4\left(2b_{42}\rho_{42}e^{æ_4\tau_4/2} + (b_{42} + b_4X_6^*)\right)X_4^*,$$

$$r_5 = 2(\alpha_5 - \delta) - \varepsilon_5\left(4b_5\rho_5e^{æ_5\tau_5/2} + b_5\right)X_3^*X_5^* - \varepsilon_{59}b_{59}X_5^*,$$

$$r_6 = 2(\alpha_6 - \delta) - \varepsilon_6\left(4b_6\rho_6e^{æ_6\tau_6/2} + b_6\right)X_4^*X_6^*,$$

$$r_7 = 2(\alpha_7 - \delta) - 4\varepsilon_7b_7\rho_7X_4^*X_6^*e^{æ_7\tau_7/2} - \frac{1}{\varepsilon_{87}}\rho_8\left(\frac{h_8}{h_7}\right),$$

$$r_8 = 2(\alpha_8 - \delta) - \varepsilon_{87}\rho_8 - \varepsilon_{81}\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*,$$

$$r_9 = 2(\varepsilon - \delta) - \frac{1}{\varepsilon_{59}}b_{59}X_5^*\left(\frac{h_5}{h_9}\right) - \frac{1}{\varepsilon_{10}}(b_{95}X_5^* + b_{10})\left(\frac{h_{10}}{h_9}\right),$$

$$r_{10} = 2(\alpha_{10} - \delta) - \varepsilon_{10}(b_{95}X_5^* + b_{10}).$$

Учитывая определения (2.14)–(2.18) величин ε_k, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, и полагая

$$\varepsilon_2 = \frac{(\alpha_2 - \delta)}{\gamma_{21}M},$$

$$\varepsilon_{59} = \frac{(\alpha_5 - \delta)}{b_{59}X_5^*},$$

$$\varepsilon_{87} = \frac{(\alpha_8 - \delta)}{\rho_8},$$

$$\varepsilon_{81} = \frac{(\alpha_8 - \delta)}{\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*},$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{2(\alpha_{10} - \delta)}{(b_{95}X_5^* + b_{10})},$$

получим

$$r_3 = 0, \quad r_4 = 0, \quad r_5 = 0, \quad r_6 = 0, \quad r_8 = 0, \quad r_{10} = 0,$$

$$r_1 = 2(\varepsilon - \delta) - \frac{1}{(\alpha_2 - \delta)}(\gamma_{21}M)^2\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{1}{(\alpha_8 - \delta)}\left(\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*\right)^2\left(\frac{h_8}{h_1}\right),$$

$$r_2 = (\alpha_2 - \delta) - \frac{1}{2(\alpha_3 - \delta)}\Big(2b_{32}\rho_{32}e^{æ_3\tau_3/2} + (b_{32} + b_3X_5^*)\Big)^2(X_3^*)^2\left(\frac{h_3}{h_2}\right)$$
$$-\frac{1}{2(\alpha_4 - \delta)}\Big(2b_{42}\rho_{42}e^{æ_4\tau_4/2} + (b_{42} + b_4X_6^*)\Big)^2(X_4^*)^2\left(\frac{h_4}{h_2}\right)$$
$$-\frac{1}{(\alpha_5 - \delta)}\Big(4b_5\rho_5e^{æ_5\tau_5/2} + b_5\Big)^2(X_3^*X_5^*)^2\left(\frac{h_5}{h_2}\right)$$
$$-\frac{1}{2(\alpha_6 - \delta)}\Big(4b_6\rho_6e^{æ_6\tau_6/2} + b_6\Big)^2(X_4^*X_6^*)^2\left(\frac{h_6}{h_2}\right)$$
$$-\frac{1}{(\alpha_7 - \delta)}(4b_7\rho_7X_4^*X_6^*)^2e^{æ_7\tau_7}\left(\frac{h_7}{h_2}\right),$$

$$r_7 = (\alpha_7 - \delta) - \frac{1}{(\alpha_8 - \delta)}\rho_8^2\left(\frac{h_8}{h_7}\right),$$

$$r_9 = 2(\varepsilon - \delta) - \frac{1}{(\alpha_5 - \delta)}(b_{59}X_5^*)^2\left(\frac{h_5}{h_9}\right) - \frac{1}{2(\alpha_{10} - \delta)}(b_{95}X_5^* + b_{10})^2\left(\frac{h_{10}}{h_9}\right).$$

Пользуясь определениями (2.20)–(2.28) величин h_j, $j = 2, \dots, 10$, отсюда следует, что

$$r_2 = 0, \quad r_7 = 0,$$

$$r_1 = 2(\varepsilon - \delta) - \frac{1}{h_1}\left[\frac{5(\gamma_{21}M)^2}{(\alpha_2 - \delta)^2} + \left(\gamma_{81}\frac{\rho_8}{\alpha_8}X_7^*\right)^2 \frac{(\alpha_7 - \delta)^2}{(4b_7\rho_7\rho_8 X_4^* X_6^*)^2 e^{æ_7\tau_7}}\right],$$

$$r_9 = 2(\varepsilon - \delta) - \frac{1}{h_1}\frac{a_{91}}{a_{19}}\left[\frac{b_{59}^2}{\left(4b_5\rho_5 e^{æ_5\tau_5/2} + b_5\right)^2 (X_3^*)^2} + 1\right].$$

Наконец, учитывая определение (2.19) величины h_1, получим, что

$$r_1 \geq 0, \quad r_9 \geq 0.$$

Итак, из (3.12) и (3.14) следует оценка

$$U_{01} + U_{02} + U_\tau \leq U_{01} + W_{01} + W_{02} + R_\tau$$

$$= -2\delta \sum_{j=1}^{10} h_j y_j^2(t) - \sum_{j=1}^{10} h_j r_j y_j^2(t) + R_\tau \leq -2\delta \sum_{j=1}^{10} h_j y_j^2(t) + R_\tau, \qquad (3.15)$$

где R_τ определено в (3.8).

3.6. Окончательная оценка. В силу оценок (3.6) и (3.15) из неравенства (3.1) получим

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq U_{01} + U_{02} + U_{03} + U_\tau - \sum_{k=3}^{7} æ_k \int\limits_{t-\tau_k}^{t} h_k\beta_k e^{-æ_k(t-s)} y_2^2(s)ds$$

$$\leq -2\delta \sum_{j=1}^{10} h_j y_j^2(t) + qV^{3/2}(t,y) + R_\tau - \sum_{k=3}^{7} æ_k \int\limits_{t-\tau_k}^{t} h_k\beta_k e^{-æ_k(t-s)} y_2^2(s)ds,$$

где R_τ определено в (3.8):

$$R_\tau = h_3\frac{e^{æ_3\tau_3}}{\beta_3}(b_{32}\rho_{32})^2\Big[\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_3)\Big)^2 - \Big(2X_3^*\Big)^2\Big]y_3^2(t)$$

$$+h_4\frac{e^{æ_4\tau_4}}{\beta_4}(b_{42}\rho_{42})^2\Big[\Big(X_4^* + y_4(t-\tau_4)\Big)^2 - \Big(2X_4^*\Big)^2\Big]y_4^2(t)$$

$$+h_5\frac{e^{æ_5\tau_5}}{\beta_5}(b_5\rho_5)^2\Big[\Big(X_3^* + y_3(t-\tau_5)\Big)^2\Big(X_5^* + y_5(t-\tau_5)\Big)^2 - \Big(2X_3^*\Big)^2\Big(2X_5^*\Big)^2\Big]y_5^2(t)$$

$$+h_6\frac{e^{æ_6\tau_6}}{\beta_6}(b_6\rho_6)^2\Big[\Big(X_4^*+y_4(t-\tau_6)\Big)^2\Big(X_6^*+y_6(t-\tau_6)\Big)^2-\Big(2X_4^*\Big)^2\Big(2X_6^*\Big)^2\Big]y_6^2(t)$$

$$+h_7\frac{e^{æ_7\tau_7}}{\beta_7}(b_7\rho_7)^2\Big[\Big(X_4^*+y_4(t-\tau_7)\Big)^2\Big(X_6^*+y_6(t-\tau_7)\Big)^2-\Big(2X_4^*\Big)^2\Big(2X_6^*\Big)^2\Big]y_7^2(t).$$

В силу обозначения (2.29) величины ω и определения (2.4) функционала $V(t,y)$ отсюда вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -2\omega V(t,y)+qV^{3/2}(t,y)+R_\tau. \tag{3.16}$$

Введем обозначение

$$\tau_{\min}=\min\{\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6,\tau_7\}>0.$$

Вначале предположим, что

$$t\in(0,t')\cap(0,\tau_{\min}].$$

Тогда $t-\tau_k\le 0$, $k=3,4,5,6,7$, а значит,

$$y_j(t-\tau_k)=\psi_j(t-\tau_k),\quad j=3,4,5,6,\quad k=3,4,5,6,7.$$

В силу условий (2.31) и (2.32)

$$-X_j^*\le\psi_j(t-\tau_k)\le X_j^*,\quad j=3,4,5,6,\quad k=3,4,5,6,7,$$

откуда

$$R_\tau\le 0.$$

Следовательно, из неравенства (3.16) имеем оценку

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -2\omega V(t,y)+qV^{3/2}(t,y). \tag{3.17}$$

Поскольку в силу условия (2.31) $\sqrt{V(0,\psi)}<\dfrac{2\omega}{q}$, то, используя неравенство Гронуолла (см., например, [20]), при $t\in(0,t')\cap(0,\tau_{\min}]$ получим оценку

$$V(t,y)\le\frac{V(0,\psi)}{\Big(1-\dfrac{q}{2\omega}\sqrt{V(0,\psi)}\Big)^2}\,e^{-2\omega t}.$$

Отсюда следуют неравенства (2.35):

$$|y_j(t)|\le\frac{1}{\sqrt{h_j}}\frac{\sqrt{V(0,\psi)}}{\Big(1-\dfrac{q}{2\omega}\sqrt{V(0,\psi)}\Big)}\,e^{-\omega t},\quad j=1,\dots,10.$$

В частности, при $j = 10$ из условия (2.33) вытекает оценка

$$|y_{10}(t)| \le \frac{1}{\sqrt{h_{10}}} \frac{\sqrt{V(0,\psi)}}{\left(1 - \dfrac{q}{2\omega}\sqrt{V(0,\psi)}\right)} e^{-\omega t} < e^{-\omega t} < 1, \quad t \in (0,t') \cap (0,\tau_{\min}].$$

В силу определения числа t', если $t' < \infty$, то $y_{10}(t) < 1$ при $t \in (0,t')$ и $y_{10}(t') = 1$. Тем самым, $t' > \tau_{\min}$, и при $t \in (0,\tau_{\min}]$ неравенства (2.34)–(2.35) доказаны.

Пусть теперь

$$t \in (0,t') \cap (\tau_{\min}, 2\tau_{\min}].$$

Тогда $t - \tau_k \le \tau_{\min}$, $k = 3,4,5,6,7$. Если $t - \tau_k \le 0$, то

$$y_j(t-\tau_k) = \psi_j(t-\tau_k), \quad j = 3,4,5,6.$$

Если же $t - \tau_k \in (0,\tau_{\min}]$, то для функций $y_j(t-\tau_k)$ справедливы оценки вида (2.35):

$$|y_j(t-\tau_k)| \le \frac{1}{\sqrt{h_j}} \frac{\sqrt{V(0,\psi)}}{\left(1 - \dfrac{q}{2\omega}\sqrt{V(0,\psi)}\right)} e^{-\omega(t-\tau_k)}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{h_j}} \frac{\sqrt{V(0,\psi)}}{\left(1 - \dfrac{q}{2\omega}\sqrt{V(0,\psi)}\right)}, \quad j = 3,4,5,6.$$

В любом случае, в силу условий (2.31)–(2.32) будем иметь

$$-X_j^* \le y_j(t-\tau_k) \le X_j^*, \quad j = 3,4,5,6, \quad k = 3,4,5,6,7,$$

откуда следует неравенство

$$R_\tau \le 0.$$

Тогда из неравенства (3.16) имеем оценку (3.17). Проводя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, установим справедливость неравенств (2.34)–(2.35) при $t \in (\tau_{\min}, 2\tau_{\min}]$.

Используя метод математической индукции, по аналогичной схеме доказывается справедливость неравенств (2.34)–(2.35) при $t \in (m\tau_{\min}, (m+1)\tau_{\min}]$, $m \in \mathbb{N}$.

Итак, неравенства (2.34)–(2.35) доказаны при всех $t > 0$.

Теорема полностью доказана.

Автор выражает благодарность профессору Г.В. Демиденко за внимание к работе.

Список литературы

1. *Анапольский Л. Ю., Тимофеев С. В.* Оценки областей притяжения устойчивых стационарных решений иммунологической модели Марчука // *Математическое моделирование.* 1995. Т. 7, № 3. С. 66–74.

   Anapolskii L. Yu., Timofeev S. V. Estimations of attractive region of stable equilibrium points for Marchuk's immunological model // *Matematicheskoe Modelirovanie.* 1995. V. 7, N 3. P. 66–74 (in Russian).

2. *Белых Л. Н. Анализ математических моделей в иммунологии.* М.: Наука, 1988.

   Belykh L. N. Analysis of Mathematical Models in Immunology. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).

3. *Демиденко Г. В. О втором методе Ляпунова для уравнений с запаздывающим аргументом* / Препринт № 289. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2014. 20 с.

   Demidenko G. V. On the second Lyapunov method for delay equations / Preprint N 289. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2014. 20 p. (in Russian).

4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика.* 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. Asymptotic properties of solutions to delay differential equations // *Vestnik Novosibirsk Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*. 2005. V. 5, N 3. P. 20–28 (in Russian).

5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // *Сиб. матем. журн.* 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms // *Siberian Math. J.* 2007. V. 48, N 5. P. 824–836.

6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // *Сиб. матем. журн.* 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

Demidenko G. V., Matveeva I. I. On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients // *Siberian Math. J.* 2014. V. 55, N 5. P. 866–881.

7. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // *Сиб. матем. журн.* 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I., Skvortsova M. A. Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms // *Siberian Math. J.* 2019. V. 60, N 5. P. 828–841.

8. *Дьёри И., Перцев Н. В.* Об устойчивости положений равновесия функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, обладающих свойством смешанной монотонности // *Докл. АН СССР.* 1987. Т. 297, № 1. С. 23–25.

   Gyori I., Pertsev N. V. On the stability of equilibrium states of functional-differential equations of retarded type having the mixed monotonicity property // *Soviet Mathematics. Doklady.* 1988. V. 36, N 3. P. 404–407.

9. *Марчук Г. И. Простейшая математическая модель вирусного заболевания* / Препринт. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. 22 с.

   Marchuk G. I. A Basic Mathematical Model of Viral Disease / Preprint. Novosibirsk: Computational Centre of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1975. 22 p. (in Russian).

10. *Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты* / 3-е изд. М.: Наука, 1991.

    Marchuk G. I. Mathematical Models in Immunology. Computational Methods and Experiments / 3d edition. Moscow: Nauka, 1991 (in Russian).

11. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // *Сиб. матем. журн.* 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

    Matveeva I. I. On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems // *Siberian Math. J.* 2017. V. 58, N 2. P. 264–270.

12. *Матвеева И. И.* Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // *Сиб. матем. журн.* 2021. Т. 62, № 3. С. 579–594.

Matveeva I. I. Estimates for solutions to a class of nonautonomous systems of neutral type with unbounded delay // *Siberian Math. J.* 2021. V. 62, N 3. P. 468–481.

13. *Перцев Н. В.* Анализ устойчивости стационарного решения модифицированной модели противовирусного иммунного ответа // *Вестник Омского университета.* 1998. Вып. 3. С. 19–21.

    Pertsev N. V. Stability analysis of a stationary solution to a modified antiviral immune response model // *Vestnik Omskogo Universiteta.* 1998. N 3. P. 19–21 (in Russian).

14. *Романюха А. А., Руднев С. Г.* Вариационный принцип в исследовании противоинфекционного иммунитета на примере пневмонии // *Математическое моделирование.* 2001. Т. 13, № 8. С. 65–84.

    Romanyukha A. A., Rudnev S. G. A variational principle for modeling infection immunity by the example of pneumonia // *Matematicheskoe Modelirovanie.* 2001. V. 13, N 8. P. 65–84 (in Russian).

15. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели противобактериального иммунного ответа // *Сиб. электрон. матем. изв.*. 2018. Т. 15. С. 1198–1215.

    Skvortsova M. A. Asymptotic properties of solutions in a model of antibacterial immune response // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2018. V. 15. P. 1198–1215 (in Russian).

16. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры».* 2020. Т. 188. С. 84–105.

    Skvortsova M. A. Estimates of solutions in the model of interaction of populations with several delays // *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz.* 2020. V. 188. P. 84–105 (in Russian).

17. *Скворцова М. А.* Оценки решений для одной биологической модели // *Матем. тр.* 2022. Т. 25, № 1. С. 152–176.

    Skvortsova M. A. Estimates of solutions for a biological model // *Siberian Adv. Math.* 2022. V. 32, N 4. P. 310–327.

18. *Скворцова М. А., Ыскак Т.* Асимптотическое поведение решений в одной модели «хищник-жертва» с запаздыванием // *Сиб. матем. журн.*. 2021. Т. 62, № 2. С. 402–416.

Skvortsova M. A., Yskak T. Asymptotic behavior of solutions in one predator-prey model with delay // *Siberian Math. J.* 2021. V. 62, N 2. C. 324–336.

19. *Скворцова М. А., Ыскак Т.* Оценки решений дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, описывающих конкуренцию нескольких видов микроорганизмов // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2022. Т. 25, № 4. С. 193–205.

    Skvortsova M. A., Yskak T. Estimates of solutions to differential equations with distributed delay describing the competition of several types of microorganisms // *J. Appl. Ind. Math.* 2022. V. 16, N 4. P. 800–808.

20. *Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.

    Hartman Ph. Ordinary Differential Equations. New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1964.

21. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // *Дифференц. уравнения.* 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.

    Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kozhametov A. T. Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay // *Differ. Equ.* 2005. V. 41, N 8. P. 1196–1200.

22. *Baker C. T. H., Bocharov G. A.* Computational aspects of time-lag models of Marchuk type that arise in immunology // *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2005. V. 20, N 3. P. 247–262.

23. *Baranovsky S. V., Bomba A. Ya., Lyashko S. I.* Generalization of the antiviral immune response model for complex consideration of diffusion perturbations, body temperature response, and logistic antigen population dynamics // *Cybernet. Systems Anal.*. 2022. V. 58, N 4. P. 576–592.

24. *Bershadsky M., Chirkov M., Domoshnitsky A., Rusakov S., Volinsky I.* Distributed control and the Lyapunov characteristic exponents in the model of infectious diseases // *Complexity.* 2019. V. 2019. Article ID 5234854. P. 1–12.

25. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // *J. Anal. Appl.* 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.

26. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* The second Lyapunov method for time-delay systems // *Functional Differential Equations and Applications* / Eds. A. Domoshnitsky, A. Rasin, S. Padhi. Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Singapore: Springer Nature, 2021. V. 379. P. 145–167.

27. *Forys U.* Stability and bifurcations for the chronic state in Marchuk's model of an immune system // *J. Math. Anal. Appl.* 2009. V. 352, N 2. P. 922–942.

28. *Karatueva N. A., Kharchenko R. V.* Problems of control for immunological models // *Nonlinear Anal. Real World Appl.*. 2006. V. 7, N 4. P. 829–840.

29. *Kharitonov V. L. Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices.* New York: Birkhauser/Springer, 2013.

30. *Kharitonov V. L., Hinrichsen D.* Exponential estimates for time delay systems // *Systems Control Lett.* 2004. V. 53, N 5. P. 395–405.

31. *Kuznetsova G. P.* The inverse problem for the Marchuk immunologic "simplest model" // *Дальневост. матем. журн.*. 2003. Т. 4, № 1. С. 134–140.

32. *Martsenyuk V. P.* On stability of immune protection model with regard for damage of target organ: the degenerate Liapunov functionals method // *Cybernet. Systems Anal.* 2004. V. 40, N 1. P. 126–136.

33. *Mondié S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2005. V. 50, N 2. P. 268–273.

34. *Skvortsova M. A.* Asymptotic properties of solutions to a system describing the spread of avian influenza // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2016. V. 13. P. 782–798.

35. *Skvortsova M.* Asymptotic properties of solutions in Marchuk's basic model of disease // *Funct. Differ. Equ.* 2017. V. 24, N 3–4. P. 127–135.

36. *Volinsky I., Domoshnitsky A., Bershadsky M., Shklyar R.* Marchuk's models of infection diseases: new developments // *Functional Differential Equations and Applications* / Eds. A. Domoshnitsky, A. Rasin, S. Padhi. Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Singapore: Springer Nature, 2021. V. 379. P. 131–143.

37. *Yskak T.* Stability of solutions to one class of neutral type systems of linear autonomous equations with distributed delay // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, N 14. P. 3561–3566.

Скворцова Мария Александровна
Институт математики
им. С.Л.Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: sm-18-nsu@yandex.ru

Поступила в редакцию
20 апреля 2023 г.
Получена после доработки
15 мая 2023 г.
Принята к публикации
17 мая 2023 г.