УДК 517.55
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.201

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2023, том 26, № 2, 3–29

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГОЛОМОРФНОЙ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИИ ПО ПРИБЛИЖЁННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ НА ЧАСТИ ОСТОВА

Р. Р. Акопян

Исследуется несколько взаимосвязанных экстремальных задач для голоморфных функций в поликруге $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Получено точное неравенство $|f(z)| \le \mathscr{C} \, \|f\|^{\alpha_1}_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)} \, \|f\|^{\alpha_0}_{L^{p_0}_{\phi_0}(G_0)}$, $0 < p_0, p_1 \le \infty$, между значением голоморфной функции в $\mathbb{D}^m$ и нормами ее предельных значений на двух измеримых подмножествах G_1 и $G_0 = \mathbb{S}^m \setminus G_1$ остова $\mathbb{S}^m$ поликруга $\mathbb{D}^m$, являющееся аналогом теоремы братьев Неванлинна о двух константах. Изучены условия, при которых неравенство даёт значение модуля непрерывности функционала голоморфного продолжения функции в заданную точку поликруга с части остова G_1. В этих случаях получено решение задачи оптимального восстановления функции по приближённо заданным значениям на части остова G_1 и связанной задачи наилучшего приближения функционала продолжения функции в поликруг с G_1.

Ключевые слова и фразы: оптимальное восстановление функционала, наилучшее приближение неограниченного функционала ограниченными, голоморфные функции, поликруг, теорема братьев Неванлинна о двух константах.

§1. Введение и обозначения

Введем обозначения и напомним некоторые известные понятия и факты (см., например, [17, 20]), которые будут использоваться в статье.

1.1. Обозначения. В дальнейшем $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ — точка m-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$; $\mathbb{D}^m = \left\{ z \in \mathbb{C}^m : |z_j| < 1, \ j = \overline{1,m} \right\}$ — поликруг (полицилиндр); $\mathbb{S}^m = (\partial \mathbb{D})^m = \left\{ z \in \mathbb{C}^m : |z_j| = 1, \ j = \overline{1,m} \right\}$ — остов (граница Шилова) поликруга $\mathbb{D}^m$; $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$ — тор в m-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^m$. Ясно, что имеет место биекция: $t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{T}^m$ тогда и только тогда, когда $e^{it} = (e^{it_1}, e^{it_2}, \dots, e^{it_m}) \in \mathbb{S}^m$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-21-00526, https://rscf.ru/project/22-21-00526/

Пусть $\Theta = \{E_0, E_1\}$ — разбиение $\mathbb{T}^m$ на два измеримых по Лебегу подмножества E_0 и E_1. Соответственно, $\theta = \{G_0, G_1\}$ — разбиение $\mathbb{S}^m$ на измеримые подмножества $G_k = \{z \in \mathbb{S}^m : z = e^{it}, t \in E_k\}$. Для мер этих множеств справедливо равенство $\mu E_k = \mu G_k$.

1.2. Интеграл Пуассона и m-гармоническая мера. Обозначим через $\mathcal{P}$ ядро Пуассона круга, задаваемое соотношением

$$\mathcal{P}(z_j, \zeta_j) := \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z_j|^2}{1-2|z_j|\cos(t_j-\tau_j)+|z_j|^2},$$

$$z_j = |z_j|e^{i\tau_j} \in \mathbb{D}, \quad \zeta_j = e^{it_j} \in \mathbb{S}, \quad \tau_j, t_j \in \mathbb{T}.$$

Ядро Пуассона поликруга $\mathbb{D}^m$ определяется равенством

$$P(z,\zeta) := \prod_{j=1}^{m} \mathcal{P}(z_j, \zeta_j) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2}.$$

Интегралом Пуассона функции $\varphi \in L^1(\mathbb{T}^m)$ называют функцию $P[\varphi]$, определяемую на $\mathbb{D}^m$ равенством

$$P[\varphi](z) := \int_{\mathbb{T}^m} P(z, e^{it})\varphi(t)dt, \quad z \in \mathbb{D}^m.$$

В более общем случае, *интегралом Пуассона* (комплекснозначной борелевской на $\mathbb{T}^m$) *меры* ν называют функцию $P[d\nu]$, определяемую на $\mathbb{D}^m$ равенством

$$P[d\nu](z) := \int_{\mathbb{T}^m} P(z, e^{it})d\nu(t), \quad z \in \mathbb{D}^m.$$

Интеграл Пуассона $P[d\nu]$ является m-гармонической в $\mathbb{D}^m$ функцией, но не обязательно плюригармонической (вещественной частью голоморфной функции).

Пусть E – измеримое (по Лебегу) подмножество $\mathbb{T}^m$, и G – соответствующее подмножество остова $\mathbb{S}^m$. Рассмотрим интеграл Пуассона характеристической функции χ_E множества E :

$$w(z) = w(z, G, \mathbb{D}^m) := P[\chi_E](z) = \int_E P(z, e^{it})dt, \quad z \in \mathbb{D}^m. \tag{1}$$

В случае $m = 1$ значение функции $w(x, G, \mathbb{D})$ в точке $x \in \mathbb{D}$ есть гармоническая мера подмножества G окружности относительно области (круга) $\mathbb{D}$ и точки x; в этом случае будем использовать обозначение $\mathfrak{w}(x) = w(x, G, \mathbb{D})$. Для произвольного $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, функция (1) является m-гармонической по z в поликруге $\mathbb{D}^m$, а при фиксированной z по подмножествам G – вероятностной мерой на остове $\mathbb{S}^m$.

1.3. Классы голоморфных функций. *Классом Неванлинны* $N = N(\mathbb{D}^m)$ называют класс голоморфных в $\mathbb{D}^m$ функций f, для которых конечна величина

$$\sup\left\{\int_{\mathbb{T}^m} \ln^+ |f(re^{it})|\, dt \,:\, 0 < r < 1\right\}.$$

Эквивалентным является условие существования в $\mathbb{D}^m$ m-гармонической мажоранты функции $\ln|f|$. Для функции $f \in N(\mathbb{D}^m)$ обозначим через $u[f]$ наименьшую m-гармоническую мажоранту функции $\ln|f|$ в $\mathbb{D}^m$.

Классом Смирнова $N_* = N_*(\mathbb{D}^m)$ (*универсальным классом Харди*) называют класс функций f из $N(\mathbb{D}^m)$, для которых функции $\ln^+|f(re^{it})|$, $0 < r < 1$, составляют равномерно интегрируемое семейство на $\mathbb{T}^m$.

Далее приведены некоторые свойства функции класса Неванлинны и эквивалентные определения класса Смирнова.

Предложение A. [17, 3.3.5] *Пусть* $f \in N(\mathbb{D}^m)$ *и* $f \not\equiv 0$. *Тогда почти всюду на* $\mathbb{T}^m$ *существуют (радиальные) предельные граничные значения*

$$f(e^{it}) = \lim_{r\to 1-0} f(re^{it}),$$

причем $\ln|f| \in L^1(\mathbb{S}^m)$.

Существует вещественная сингулярная мера σ_f *на* $\mathbb{T}^m$, *такая, что*

$$u[f] = P[\ln|f| - d\sigma_f].$$

Следующие условия эквивалентны:
$(A1)$ $f \in N_*(\mathbb{D}^m)$;
$(A2)$ $u[f](z) \le P[\ln|f|](z)$, $z \in \mathbb{D}^m$, *т.е.* $\sigma_f \ge 0$;
$(A3)$ $\ln|f(z)| \le P[\ln|f|](z)$, $z \in \mathbb{D}^m$.

Классом Харди $H^p = H^p(\mathbb{D}^m)$, $0 < p < \infty$, называют класс голоморфных в $\mathbb{D}^m$ функций f, для которых конечна величина

$$\sup\left\{\int_{\mathbb{T}^m} |f(re^{it})|^p\, dt \,:\, 0 < r < 1\right\}.$$

Эквивалентным является условие существования в $\mathbb{D}^m$ m-гармонической мажоранты функции $|f|^p$. *Класс Харди* $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D}^m)$, в случае $p = \infty$, есть класс голоморфных и ограниченных в $\mathbb{D}^m$ функций.

Предложение B. [17, 3.4.2-3.4.3] *Справедливы утверждения:*
$(B1)$ $f \in H^p$, $0 < p \le \infty$, *тогда и только тогда, когда* $f \in N_* \cap L^p(\mathbb{S}^m)$;
$(B2)$ *если* $f \in H^p$, $1 \le p \le \infty$, *то справедливо равенство* $f = P[f]$.

Из определения классов ясно, что имеет место цепочка вложений

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset N_* \subset N, \quad 0 < p \le q \le \infty.$$

§2. Постановки задач и основные результаты

Пусть функция ϕ неотрицательна на остове $\mathbb{S}^m$ и $\ln\phi \in L^1(\mathbb{S}^m)$. Обозначим через ϕ_k сужения функции ϕ на множество G_k, $k = 0, 1$. Такие функции в дальнейшем называем *весовыми функциями.*

Обозначим через $\mathscr{H} = \mathscr{H}^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m;\theta;\phi)$, $0 < p_0, p_1 \le \infty$, класс функций из $N_*(\mathbb{D}^m)$ таких, что $|f|^{p_k}\phi_k \in L^1(G_k)$, если $p_k < \infty$, т.е. конечны L^{p_k}-средние с весом ϕ_k :

$$\|f\|_{L^{p_k}_{\phi_k}(G_k)} := \left(\int_{E_k} |f(e^{it})|^{p_k}\phi_k(e^{it})\,dt\right)^{1/p_k} < +\infty;$$

если показатель p_k равен бесконечности, то конечна величина

$$\|f\|_{L^\infty(G_k)} := \operatorname{ess\,sup}\{|f(\zeta)| \,:\, \zeta \in G_k\}.$$

Выделим в классе $\mathscr{H} = \mathscr{H}^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m;\theta;\phi)$ подкласс $Q = Q^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m;\theta;\phi)$ функций f с предельными значениями на G_0, удовлетворяющими неравенству $\|f\|_{L^{p_0}_{\phi_0}(G_0)} \le 1$.

Через Υ_z обозначим функционал на $\mathscr{H}$, сопоставляющий предельным значениям на G_1 функции f ее значение $f(z)$ в точке $z \in \mathbb{D}^m$ (функционал голоморфного продолжения функции в точку z с части остова G_1), т.е. действующий по правилу $\Upsilon_z f = f(z)$. Далее будет показано, что функционал Υ_z является однозначным. В статье изучаются несколько взаимосвязанных экстремальных задач на классе Q для функционала Υ_z.

Множеством единственности для функций, голоморфных в области комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ограниченной спрямляемой кривой Жордана, является подмножество положительной меры границы области. Эта теорема известна как теорема единственности И. И. Привалова (1919), см., например, [11, гл.X, §2]. Первый результат о методе восстановления голоморфной функции по её (точным) значениям на части границы получил Т. Карлеман (1926) для некоторого специального вида областей. Г. М. Голузин и В. И. Крылов (1933) обобщили идею Т. Карлемана для голоморфных функций в односвязной области. Различным подходам построения формул Карлемана — Голузина — Крылова на классах Харди $H^p, 1 \le p \le \infty$, (включая случай функций многих переменных и в том числе для поликруга), их обобщениям, применениям в различных задачах комплексного анализа, теории функций, теории управления, теоретической и математической физике, обработке сигналов посвящено множество работ см., например, монографию [1], обзор [20, 2.8, 2.9] и приведённую там библиографию. Дополнительно отметим здесь лишь статью [25], содержащую способ восстановления функции из $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < 1$, по граничным значениям на дуге окружности.

В случае, когда значения функции на части границы заданы приближённо, задача восстановления голоморфной функции в области (голоморфного продолжения с части границы области) является неустойчивой (некорректно поставленной). Эта задача исследована и предложены методы её регуляризации М. М. Лаврентьевым [12], [13, Гл.II, §1, п.4-5] (см. также [1, Гл.I, §2]), для решения были предложены регуляризирующие операторы, которые имеют в качестве ядра функции, названные функциями Карлемана, и являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши. В частности, в качестве примера такого регуляризующего оператора (метода восстановления) М. М. Лаврентьев рассмотрел и конструкцию, основанную на формуле Карлемана — Голузина — Крылова.

Целью статьи является исследование наилучшего (оптимального) метода восстановления значения голоморфной в $\mathbb{D}^m$ функции в точке z (или, что то же самое, функционала Υ_z) по заданным с известной погрешностью δ по норме $L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$ значениям на части остова G_1 и дополнительной (априорной) информации принадлежности функции классу (корректности) Q.

2.1. Оптимальное восстановление по приближённо заданным значениям на части остова. Пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $f_\delta \in L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$ такая, что справедливо неравенство $\|f - f_\delta\|_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)} \le \delta$. Мы хотим найти наилучший (оптимальный) способ восстановить по f_δ значение функции $f(z)$, $z \in \mathbb{D}^m$, для всех таких пар функций f и f_δ. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$ будем рассматривать множество $\mathcal{F}$ всех возможных, множество $\mathcal{L}$ линейных, или множество $\mathcal{B}$ линейных ограниченных функционалов на $L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$. Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T,\delta) := \sup\Big\{|f(z) - Tf_\delta| : f \in Q, f_\delta \in L^{p_1}_{\phi_1}(G_1), \|f - f_\delta\|_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)} \le \delta\Big\} \quad (2)$$

является погрешностью восстановления методом T значения в точке z функций класса Q по их значениям на G_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$. Тогда

$$\mathcal{E}(\delta;\mathcal{R}) = \mathcal{E}(\delta;\Upsilon_z, Q, \mathcal{R}) := \inf\{\mathcal{U}(T,\delta) \,:\, T \in \mathcal{R}\} \quad (3)$$

есть *величина оптимального восстановления* значения в точке z (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала Υ_z) функций класса Q по их δ-приближённым значениям на G_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta;\mathcal{R})$ и определении *оптимального метода восстановления* – функционала, на котором в (3) достигается нижняя грань.

В случае $m = 1$ и $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ задача (3) полностью решена в [2] (для односвязной области ограниченной спрямляемой кривой Жордана; случай многосвязной области рассматривался в [3]).

Пусть $m > 1$. Введём обозначения

$$\alpha_1 = \alpha_1(z) := w(z, G_1, \mathbb{D}^m), \quad \alpha_0 = \alpha_0(z) := w(z, G_0, \mathbb{D}^m) = 1 - \alpha_1(z);$$

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}^{p_0,p_1}(z;\theta) := \mathcal{C}_0\mathcal{C}_1,$$

$$\mathcal{C}_k = \exp\left\{\int_{E_k} P(z,e^{it}) \ln\left(\frac{P(z,e^{it})}{\alpha_k(z)\,\phi_k(e^{it})}\right)^{1/p_k} dt\right\}.$$

В случае $p_k = \infty$ здесь и далее считаем, что $1/p_k = 0$.

Для положительного параметра δ и произвольной фиксированной точки $z \in \mathbb{D}^m$ определим на остове $\mathbb{S}^m$ неотрицательную функцию формулой

$$\psi_\delta(\zeta) := \delta^k \left(\frac{P(z,\zeta)}{\alpha_k(z)\phi_k(\zeta)}\right)^{1/p_k}, \quad \zeta \in G_k,\ k = 0, 1. \tag{4}$$

Пусть u_δ есть интеграл Пуассона функции $\ln\psi_\delta$, т.е. $u_\delta(\xi) = P[\ln\psi_\delta](\xi)$, $\xi \in \mathbb{D}^m$. Функция u_δ является m-гармонической в $\mathbb{D}^m$, но не обязательно плюригармонической.

Точные значения величины (3) будут получены в следующих предположениях на параметры задач:

(i_1) *функция* $u_\delta = P[\ln\psi_\delta]$ *является плюригармонической в* $\mathbb{D}^m$;

(i_2) $1 \le p_0, p_1 \le \infty$.

Пусть справедливо условие (i_1), обозначим через s_δ голоморфную в $\mathbb{D}^m$ функцию, определяемую формулой

$$s_\delta(\xi) := \exp\{u_\delta(\xi) + iv_\delta(\xi)\}, \quad \xi \in \mathbb{D}^m, \tag{5}$$

где v_δ – сопряженная u_δ функция (выбор аддитивной константы не важен). На пространстве $L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$ определим линейный функционал T_δ формулой

$$T_\delta f := \int_{E_1} P(z,e^{it})\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, f(e^{it})\, dt, \quad f \in L^{p_1}_{\phi_1}(G_1). \tag{6}$$

Теорема 1. *В предположениях* $(i_1), (i_2)$ *для величины* (3) *имеют место равенства*

$$\mathcal{E}(\delta;\mathcal{F}) = \mathcal{E}(\delta;\mathcal{L}) = \mathcal{E}(\delta;\mathcal{B}) = |s_\delta(z)| = \mathscr{C}\,\delta^{\alpha_1}. \tag{7}$$

При этом в задаче (3) *экстремальными являются функции вида* ϵs_δ, $|\epsilon| = 1$; *оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал* T_δ.

Задача (3) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности – неточной) информации; общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [4], [5], [6], [7], [14], [21]. Результаты, связанные с оптимальным восстановлением на классах аналитических функций см. в [23] и приведённую там библиографию.

Задачу оптимального восстановления (3) будем исследовать вместе и с помощью задач о модуле непрерывности функционала Υ_z и наилучшего приближения функционала Υ_z линейными ограниченными функционалами. Точная постановка этих задач такова.

2.2. Модуль непрерывности функционала Υ_z. Каждую из двух функцию переменной $\delta \geq 0$, определяемых равенствами

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon_z, Q) := \sup \left\{ |f(z)| \,:\, f \in Q,\, \|f\|_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)} \leq \delta \right\}, \tag{8}$$

$$\Omega(\delta) = \Omega(\delta; \Upsilon_z, Q) := \sup \left\{ |f(z) - g(z)| \,:\, f, g \in Q,\, \|f - g\|_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)} \leq \delta \right\}, \tag{9}$$

называют *модулем непрерывности функционала* Υ_z на классе Q. Задача состоит в вычислении модулей непрерывности и нахождении (последовательности) функций, на которых в (8) и (9) достигается верхняя грань.

В случае $1 \leq p_0 \leq \infty$ класс Q является выпуклым и уравновешенным. Функционал Υ_z линейный. Тогда величины (8) и (9) связаны равенством

$$\Omega(\delta) = 2\omega(\delta/2). \tag{10}$$

А в случае $0 < p_0 < 1$ справедливы неравенства

$$2\omega(\delta/2) \leq \Omega(\delta) \leq 2^{1/p_0}\omega(\delta/2^{1/p_0}). \tag{11}$$

2.3. Наилучшее приближение функционала. Пусть $\mathcal{B}(N)$ есть множество линейных ограниченных функционалов на $L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$, норма которых не превосходит числа $N > 0$. Величина

$$U(T) := \sup \{ |f(z_0) - Tf| \,:\, f \in Q \} \tag{12}$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{B}(N)$ от функционала Υ_z на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) := \inf \{ U(T) \,:\, T \in \mathcal{B}(N) \} \tag{13}$$

есть *наилучшее приближение функционала* Υ_z на классе Q множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{B}(N)$. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (13) достигается нижняя грань.

Задача (13) является частным случаем задачи Стечкина [19] приближения неограниченного оператора ограниченными на классе элементов банахова пространства; этой задаче посвящено большое число исследований (см. работы [6], [7], [8] и приведённую в них библиографию).

2.4. Взаимосвязь задач. К настоящему времени хорошо изучена взаимосвязь задачи оптимального восстановления оператора с задачей Стечкина и модулем непрерывности оператора. Эта взаимосвязь будет существенно использоваться и в данной работе. Для рассматриваемого частного случая, т.е. для задач (3), (8) и (13) она выражается следующим образом. Введём обозначения

$$\Delta(N) = \sup\left\{\omega(\delta) - N\delta \,:\, \delta \ge 0\right\}, \quad N > 0; \tag{14}$$

$$l(\delta) = \inf\left\{E(N) + N\delta \,:\, N > 0\right\}, \quad \delta \ge 0.$$

Известно (см. [18], [9], [10], [5], [14]; [7], [23] и приведённую там библ.), что в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом уравновешенном классе с помощью множества $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный ограниченный функционал и сама величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала; таким образом справедливы равенства

$$\mathcal{E}(\delta; \mathcal{F}) = \mathcal{E}(\delta; \mathcal{L}) = \mathcal{E}(\delta; \mathcal{B}) = \omega(\delta). \tag{15}$$

Далее в качестве множества методов восстановления в задаче (3) будем рассматривать множество $\mathcal{F}$ всех возможных функционалов на $L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$.

Кроме того, для задач (3) и (13) взаимосвязь (см. [16], [15], [10]; [6], [7] и приведённую там библиографию) выражается в следующих соотношениях

$$E(N) = \Delta(N); \quad \omega(\delta) = l(\delta). \tag{16}$$

2.5. Аналог теоремы братьев Неванлинна о двух константах и её следствия. Следующая теорема содержит неравенство между значением голоморфной функции в $\mathbb{D}^m$ и нормами ее предельных значений на двух измеримых подмножествах G_1 и $G_0 = \mathbb{S}^m \setminus G_1$ остова $\mathbb{S}^m$ поликруга $\mathbb{D}^m$, являющееся аналогом теоремы братьев Неванлинна о двух константах.

Теорема 2. *Пусть θ – разбиение остова $\mathbb{S}^m$ на измеримые множества G_k, ϕ_k — весовые функции и $0 < p_k \le \infty$, $k = 0, 1$. Тогда для произвольной точки $z \in \mathbb{D}^m$ и функции $f \in \mathscr{H}$ справедливо неравенство*

$$|f(z)| \le \mathscr{C}\, \|f\|^{\alpha_1}_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)}\, \|f\|^{\alpha_0}_{L^{p_0}_{\phi_0}(G_0)}. \tag{17}$$

Из неравенства (17) следует, что произвольное подмножество G_1 остова положительной меры является множеством единственности для функций класса $\mathscr{H}$. Отсюда вытекает однозначность функционала Υ_z. Кроме того, неравенство влечёт условную устойчивость задачи восстановления функции по её приближённо заданным значениям на части остова положительной меры при условии ограниченности весовой L^p-средней на дополнительной части границы. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть θ – разбиение остова $\mathbb{S}^m$ на измеримые подмножества G_k, $\mu G_1 > 0$; ϕ_k — весовые функции и $0 < p_k \le \infty$, $k = 0, 1$. Тогда для произвольной точки $z \in \mathbb{D}^m$ справедливо равенство*

$$\lim_{\delta \to +0} \mathcal{E}(\delta; \Upsilon_z, Q, \mathcal{F}) = 0. \tag{18}$$

При этом предел (18) равномерный по z внутри поликруга $\mathbb{D}^m$.

Точные значения величины (13), как и в теореме 1 значения величины (3), получены в предположениях (i_1) и (i_2) на параметры задач.

Теорема 4. *В предположениях $(i_1), (i_2)$ для величины (13) при*

$$N = \frac{\alpha_1}{\delta} |s_\delta(z)| = \alpha_1 \mathscr{C}\, \delta^{-\alpha_0}$$

справедливо равенство

$$E(N) = \alpha_0 |s_\delta(z)| = \mathscr{C}^{1/\alpha_0} \alpha_0 \alpha_1^{\alpha_1/\alpha_0} N^{-\alpha_1/\alpha_0}. \tag{19}$$

При этом в задаче (13) функционалом наилучшего приближения является функционал T_δ.

В случае $m = 1$ и $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ теорема 2 получена в [2], доказательство отлично от приводимого здесь. При $m = 1$ для произвольных p_k доказательство (17) можно извлечь из [3]. Теоремы 1 и 4 (включая вид экстремальной функции s_δ и оптимального метода T_δ) аналогичны одномерному случаю. В отличии от одномерного случая в многомерном, даже в случае поликруга, не всегда можно построить голоморфную, тем более внешнюю, функцию s_δ с модулем значений почти всюду на остове равным функции ψ_δ. Существование такой функции эквивалентно совпадению нижней оценки модуля непрерывности, а значит и величины оптимального восстановления, с верхней, следующей из неравенства (17). Критерием существования функции s_δ является условие (i_1). Условие (i_1) сложно проверяемое. Подробно, в частном случае равных показателей $(p_0 = p_1)$ и специального веса, оно обсуждается в пунктах 3.3 и 3.4. Оценка снизу модуля непрерывности (величины оптимального восстановления) в более общем случае основана на достаточном условии существования плюригармонической функции с заданными значениями на остове — теореме Рудина (предложение C). Схема доказательств теорем 1 и 4 аналогична одномерному случаю, она основана на взаимосвязи задач, обсуждавшейся выше, и специальном интегральном представлении (теорема 5), в обосновании которого используется характеризация Штоля внешней функции (предложение D) и аналоги теорем Полубариновой–Кочиной и Смирнова (предложение B) для поликруга.

Дальнейшее изложение материала в статье следующее. В §3 получены оценки модуля непрерывности: в пункте 3.1 доказана теорема 2 и как следствие выписана оценка сверху; в пункте 3.2 обсуждается оценка модуля непрерывности снизу; пункты 3.3 и 3.4 посвящены исследованию случая равных показателей $(p_0 = p_1)$ и специального веса, условий совпадения оценки сверху и снизу. В §4 доказываются теоремы 1, 3 и 4. Наконец, в последнем параграфе приведены дополнительные замечания.

§3. Доказательство теоремы о двух константах и оценки модуля непрерывности

3.1. Доказательство теоремы о двух константах. Рассмотрим на классе $\mathscr{H} = \mathscr{H}^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m;\theta;\phi)$ следующую экстремальную задачу. Для точки $z \in \mathbb{D}^m$ обозначим через $\mathfrak{M}$ функцию двух неотрицательных переменных, определяемую соотношением

$$\mathfrak{M}(z;\lambda_0,\lambda_1) = \sup\left\{|f(z)| \,:\, f \in \mathscr{H},\, \|f\|_{L^{p_k}_{\phi_k}(G_k)} \le \lambda_k, k = 0,1\right\}. \qquad (20)$$

Задача состоит в вычислении $\mathfrak{M}(z;\lambda_0,\lambda_1)$ при $\lambda_k \ge 0$ и $z \in \mathbb{D}^m$, а также нахождении функции (последовательности функций), на которой в (20) достигается верхняя грань.

Непосредственно из соотношения (20) следует точное неравенство

$$|f(z)| \le \mathfrak{M}\left(z; \|f\|_{L^{p_0}_{\phi_0}(G_0)}, \|f\|_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)}\right), \qquad f \in \mathscr{H},\ z \in \mathbb{D}^m,$$

оценивающее значения функции f из класса $\mathscr{H}$ в поликруге $\mathbb{D}^m$ через ее предельные значения на остове $\mathbb{S}^m$.

Задачи вычисления величин (8) и (20) эквивалентны. Действительно, имеют место равенства

$$\omega(\delta) = \mathfrak{M}(z; 1, \delta),\ \delta > 0; \quad \mathfrak{M}(z; \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \omega(\lambda_1/\lambda_0),\ \lambda_k > 0.$$

Доказательство теоремы 2. Из принадлежности функции f классу N_* следует, что функция $\ln|f(z)|$ имеет m-гармоническую мажоранту $u = P[\ln|f|]$ в поликруге, определяемую равенством

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}^m} P(z, e^{it}) \ln|f(e^{it})|\, dt = \sum_{k=0}^{1} \int_{E_k} P(z, e^{it}) \ln|f(e^{it})|\, dt; \tag{21}$$

для функции (21) имеет место неравенство

$$\ln|f(z)| \le u(z), \quad z \in \mathbb{D}^m. \tag{22}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (21) сверху следующим образом. Если $\mu(G_k) = \mu(E_k)$ равна нулю, то интеграл также равен нулю. Полагаем $\mu(G_k) = \mu(E_k) > 0$ и, следовательно, $\alpha_k(z) > 0$. В случае $0 < p_k < \infty$, используя неравенство Йенсена для выпуклых функций, получим

$$\int_{E_k} P(z, e^{it}) \ln|f(e^{it})|\, dt = \frac{1}{p_k} \int_{E_k} P(z, e^{it}) \ln \frac{|f(e^{it})|^{p_k} P(z, e^{it}) \alpha_k(z) \phi_k(e^{it})}{P(z, e^{it}) \alpha_k(z) \phi_k(e^{it})}\, dt$$

$$= \frac{\alpha_k(z)}{p_k} \int_{E_k} \frac{P(z, e^{it})}{\alpha_k(z)} \ln \frac{|f(e^{it})|^{p_k} \alpha_k(z)\, \phi_k(e^{it})}{P(z, e^{it})}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{p_k} \int_{E_k} P(z, e^{it}) \ln \frac{P(z, e^{it})}{\alpha_k(z)\, \phi_k(e^{it})}\, dt \le$$

$$\le \frac{\alpha_k(z)}{p_k} \ln \int_{E_k} \frac{P(z, e^{it})}{\alpha_k(z)} \frac{|f(e^{it})|^{p_k} \alpha_k(z)\, \phi_k(e^{it})}{P(z, e^{it})}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{p_k} \int_{E_k} P(z, e^{it}) \ln \frac{P(z, e^{it})}{\alpha_k(z)\, \phi_k(e^{it})}\, dt = \ln \|f\|^{\alpha_k}_{L^{p_k}_{\phi_k}(G_k)} + \ln \mathcal{C}_k.$$

Получим аналогичную оценку при $p_k = \infty$

$$\int_{E_k} P(z_0, e^{it}) \ln|f(e^{it})| dt \le$$

$$\le \operatorname{ess\,sup}\{\ln|f(\zeta)| : \zeta \in G_k\} \int_{E_k} P(z, e^{it}) dt = \ln \|f\|^{\alpha_k}_{L^\infty(G_k)};$$

в этом случае $\ln \mathcal{C}_k = 0$. Теперь, подставляя полученные оценки слагаемых в соотношения (21), (22) и потенцируя полученное неравенство, получим (17). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *В случае $p_0 = p_1 = \infty$ для всех $z \in \mathbb{D}^m$ справедливо равенство $\mathscr{C} = 1$. Неравенство (17) примет вид*

$$|f(z)| \leq \|f\|^{\alpha_1}_{L^\infty(G_1)} \, \|f\|^{\alpha_0}_{L^\infty(G_0)}, \quad z \in \mathbb{D}^m.$$

Это утверждение при $m = 1$ известно (см. [22],[11]) как теорема братьев Неванлинна о двух константах.

Из определения (20) и неравенства (17) следует утверждение.

Замечание 2. *Для величины (20) справедливо неравенство*

$$\mathfrak{M}(z; \lambda_0, \lambda_1) \leq \mathscr{C} \, \lambda_0^{\alpha_0} \, \lambda_1^{\alpha_1}, \quad \lambda_k > 0. \tag{23}$$

В одномерном случае неравенство (23) является равенством (см. [2]). В случае $m > 1$ это, вообще говоря, не так.

3.2. Оценка снизу величины (20). Оценку снизу величины (20) и модуля непрерывности (8) даёт модуль значения в точке любой функции из класса Q.

В одномерном случае ($m = 1$) для существования функции f из класса $N_*(\mathbb{D})$, для которой предельные значения $|f|$ почти всюду совпадают с функцией ψ на $\mathbb{S}$, необходимым и достаточным является условие $\ln\psi \in L^1(\mathbb{S})$. В случае $m > 1$ это условие необходимое, но не является достаточным. Достаточное условие существования даёт теорема Рудина.

Предложение C. [17, 2.4.2] *Пусть функция l положительная полунепрерывная снизу на $\mathbb{S}^m$ и $l \in L^1(\mathbb{S}^m)$. Тогда существует сингулярная мера σ на $\mathbb{S}^m$, $\sigma \geq 0$, что $P[l - d\sigma]$ является плюригармонической в $\mathbb{D}^m$.*

В условиях предложения C, повторяя рассуждения [17, 3.5.3], рассмотрим $l = \ln\psi$. Существует голоморфная в $\mathbb{D}^m$ функция g такая, что $\operatorname{Re} g = P[\ln\psi - d\sigma]$. Положим $f = \exp g$. Так как мера σ неотрицательная, то $f \in N_*(\mathbb{D}^m)$.

Функцию ϕ будем назвать *почти всюду полунепрерывной сверху* (снизу) на $\mathbb{S}^m$, если существует функция φ полунепрерывная сверху (снизу) на $\mathbb{S}^m$ и почти всюду совпадающая с ϕ.

Предложение 1. *Пусть θ – разбиение остова $\mathbb{S}^m$ на измеримые подмножества G_k с нулевой мерой границы $\mu\partial G_k = 0$; весовые функции ϕ_k — сужения почти всюду полунепрерывной сверху на $\mathbb{S}^m$ функции ϕ и $0 < p_k \leq \infty$, $k = 0, 1$. Тогда для любого $\delta > 0$ и произвольной фиксированной точки $z \in \mathbb{D}^m$ существует сингулярная мера σ_δ на $\mathbb{S}^m$, $\sigma_\delta \geq 0$,* *и существует голоморфная функция* ς_δ *из класса* $N_*(\mathbb{D}^m)$ *такие, что предельные значения модуля* ς_δ *почти всюду на* $\mathbb{S}^m$ *совпадают со значениями функции* ψ_δ *и* $\ln|\varsigma_\delta| = P[\ln\psi_\delta - d\sigma_\delta]$.

При этом для произвольных $z \in \mathbb{D}^m$ *и* $\lambda_k > 0$ *справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}(z;\lambda_0,\lambda_1) \geq \lambda_0|\varsigma_{\lambda_1/\lambda_0}(z)| = \\ = \mathscr{C}^{p_0,p_1}(z;\theta)\,\lambda_0^{\alpha_0(z)}\,\lambda_1^{\alpha_1(z)}\,\exp\{-P[d\sigma_{\lambda_1/\lambda_0}](z)\}.\end{gathered} \tag{24}$$

Доказательство. Из сделанных предположений следует, что функция ψ_δ является почти всюду полунепрерывной снизу на $\mathbb{S}^m$. Тогда по обсуждавшейся выше теореме Рудина (предложение C) существует неотрицательная сингулярная мера σ_δ и функция ς_δ из $N_*(\mathbb{D}^m)$ такие, что предельные значения $|\varsigma_\delta|$ почти всюду на $\mathbb{S}^m$ совпадают со значениями функции ψ_δ и $\ln|\varsigma_\delta| = P[\ln\psi_\delta - d\sigma_\delta]$ на $\mathbb{D}^m$. Первая часть утверждения доказана.

Покажем справедливость неравенства (24). По построению функция ς_δ принадлежит классу Смирнова $N_*(\mathbb{D}^m)$. Для модуля ее предельных значений на $\mathbb{S}^m$ почти всюду справедливо равенство $|\varsigma_\delta(\zeta)| = \psi_\delta(\zeta)$. Следовательно, имеют место равенства для норм:

$$\|\varsigma_\delta\|_{L^{p_k}_{\phi_k}(G_k)} = \|\psi_\delta\|_{L^{p_k}_{\phi_k}(G_k)} = \delta^k, \quad k = 0,1. \tag{25}$$

Тогда функция ς_δ из класса $\mathscr{H}$. Для модуля значения ς_δ в точке z имеем

$$|\varsigma_\delta(z)| = \exp\{u_\delta(z) - P[\sigma_\delta](z)\} = \exp\left\{\int_0^{2\pi} P(z,e^{it})\ln\psi_\delta(e^{it})\,dt - P[d\sigma_\delta](z)\right\}$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=0}^{1}\int_{E_k} P(z,e^{it})\ln\left(\frac{P(z,e^{it})}{\alpha_k(z)\phi_k(e^{it})}\right)^{1/p_k} dt + \alpha_1(z)\ln\delta - P[d\sigma_\delta](z)\right\}.$$

В итоге получаем равенство

$$|\varsigma_\delta(z)| = \mathscr{C}^{p_0,p_1}(z;\theta)\,\delta^{\alpha_1(z)}\,\exp\{-P[\sigma_\delta](z)\}. \tag{26}$$

Теперь из определения величины (20), равенств (25) и (26) при $\delta = \lambda_1/\lambda_0$, следует, что справедливо неравенство (24). Предложение 1 доказано.

Функция $f \in N_*(\mathbb{D}^m)$ называется *внешней функцией*, если справедливо равенство

$$\ln|f(0)| = \int_{\mathbb{T}^m} \ln|f(e^{it})|\,dt.$$

Предложение D. [24] *Для* $f \in N_*(\mathbb{D}^m)$ *эквивалентны условия:*
($D1$) *функция* f *является внешней;*
($D2$) $\ln|f(z)| = u[f](z) = P[\ln|f|](z)$, $z \in \mathbb{D}^m$, *т.е.* $\sigma_f \equiv 0$;
($D3$) $1/f \in N_*(\mathbb{D}^m)$.

В некоторых случаях оценка сверху (23) является равенством. А именно, имеет место следующее простое утверждение.

Предложение 2. *Пусть функция* $u_\delta = P[\ln\psi_\delta]$ *является плюригармонической в* $\mathbb{D}^m$. *Тогда функция* s_δ, *определяемая формулой* (5) *является голоморфной, и, более того, внешней функцией класса* N_*. *Для всех* $\lambda_1 = \delta\lambda_0$, $\lambda_0 > 0$, *справедливо равенство*

$$\mathfrak{M}(z;\lambda_0,\lambda_1) = \mathscr{C}^{p_0,p_1}(z;\theta)\,\lambda_0^{\alpha_0}\,\lambda_1^{\alpha_1}.$$

Доказательство. Действительно, если функция u_δ является плюригармонической в $\mathbb{D}^m$, то функция s_δ голоморфная в $\mathbb{D}^m$. Так как $\sigma_\delta \equiv 0$, то функция s_δ является внешней класса N_*. Аналогично доказательству предложения 1 получаем оценку снизу

$$\mathfrak{M}(z;\lambda_0,\lambda_1) \geq \lambda_0|s_{\lambda_1/\lambda_0}(z)| = \mathscr{C}^{p_0,p_1}(z;\theta)\,\lambda_0^{\alpha_0(z)}\,\lambda_1^{\alpha_1(z)}.$$

Объединяя ее с оценкой сверху (23), получим утверждение предложения 2.

3.3. Случай равных показателей и специального веса. Пусть Φ – внешняя функция класса $N_*(\mathbb{D}^m)$. Рассмотрим случай, когда показатели равны $p := p_0 = p_1$ и справедливо равенство

$$\phi_k(\zeta) = \phi(\zeta) = |1/\Phi(\zeta)|, \quad \zeta \in G_k,\ k = 0, 1. \tag{27}$$

Ясно, что $\phi_k \geq 0$ и $\ln\phi_k \in L^1(G_k)$, $k = 0, 1$, т.е. являются весовыми функциями.

Логарифмируя равенство (4), имеем представление

$$\ln\psi_\delta(e^{it}) = \ln\alpha_0^{-1/p}\chi_{E_0}(e^{it}) + \ln(\delta\alpha_1^{-1/p})\chi_{E_1}(t) + 1/p\ln P(z,e^{it}) + 1/p\ln|\Phi(e^{it})|.$$

Тогда для функции $u_\delta = P[\ln\psi_\delta]$ получаем равенство

$$u_\delta(\xi) = a + b\,w(\xi) + 1/p\,(\ln|\Pi(z,\xi)| + \ln|\Phi(\xi)|), \tag{28}$$

в котором

$$a = a(z) := -1/p\ln\alpha_0(z), \quad b := b(\delta;z) = \ln\delta + 1/p\ln\alpha_0(z) - 1/p\ln\alpha_1(z),$$

голоморфная по ξ в $\mathbb{D}^m$ функция $\Pi(z,\xi)$ задаётся формулой

$$\Pi(z,\xi) := \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\frac{1-|z_j|^2}{(1-\overline{z_j}\xi_j)^2}, \text{ и } \ln|\Pi(z,\xi)| = \int_{\mathbb{T}^m} P(\xi,e^{it})\ln P(z,e^{it})\,dt,$$

а функция w является m-гармонической мерой: $w(\xi) = w(\xi, G_1, \mathbb{D}^m)$. Функции $\ln|\Pi(z,\cdot)|$ и $\ln|\Phi|$ являются плюригармоническими в $\mathbb{D}^m$, как логарифмы модуля голоморфных функций, не обращающихся в нуль.

Будем использовать обозначение

$$\varpi(z) := \Pi(z,z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-|z_j|^2}.$$

Рассмотрим несколько случаев.

3.3.1. Пусть параметр δ равен $\delta_* = (\alpha_1/\alpha_0)^{1/p}$. Тогда величина b в представлении (28) равна нулю, и функция u_δ является плюригармонической. Отсюда, используя предложение 2, получим следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть θ – разбиение остова $\mathbb{S}^m$ на измеримые подмножества G_k; весовые функции ϕ_k имеют вид* (27) *и* $0 < p \le \infty$. *Тогда для произвольной точки $z \in \mathbb{D}^m$ константа $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{p,p}(z;\theta)$ в неравенстве* (17) *является наилучшей (наименьшей возможной). Неравенство* (17) *обращается в равенство на функциях cs_{δ_*}, $\delta_* = (\alpha_1/\alpha_0)^{1/p}$, $c \in \mathbb{C}$.*

Для произвольного $\lambda > 0$ справедливо равенство

$$\mathfrak{M}(z; \lambda\alpha_0^{1/p}, \lambda\alpha_1^{1/p}) = \mathscr{C}^{p,p}(z;\theta)\, \lambda\alpha_0^{\alpha_0/p}\, \alpha_1^{\alpha_1/p} = \lambda(\varpi(z)|\Phi(z)|)^{1/p}.$$

Верхняя грань (20) *достигается на функциях $c\alpha_0^{1/p}s_{\delta_*} = c(\Pi\Phi)^{1/p}$, $|c| = \lambda$.*

3.3.2. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$ — множество всех измеримых подмножеств E тора $\mathbb{T}^m$ таких, что функция w, определённая равенством (1), является плюригармонической по z в поликруге $\mathbb{D}^m$. Будем предполагать, что разбиение таково, что E_1 – измеримое подмножество $\mathbb{T}^m$, из $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$. Соответственно, в этом и только этом случае при всех $\delta > 0$ функция u_δ является плюригармонической. Так же, используя предложение 2, получим утверждение.

Предложение 4. *Пусть E_1 – измеримое подмножество $\mathbb{T}^m$ из семейства $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$; весовые функции ϕ_k имеют вид* (27)*. Тогда для всех $0 < p \le \infty$, $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ и $z \in \mathbb{D}^m$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{M}(z;\lambda_0,\lambda_1) = \mathscr{C}^{p,p}(z;\theta)\, \lambda_0^{\alpha_0}\, \lambda_1^{\alpha_1} = \left(\alpha_0^{-\alpha_0}\alpha_1^{-\alpha_1}\varpi(z)|\Phi(z)|\right)^{1/p} \lambda_0^{\alpha_0}\lambda_1^{\alpha_1}.$$

Верхняя грань в (20) *достигается и неравенство* (17) *обращается в равенство на функциях $\epsilon\lambda_0 s_\delta$, $\delta = \lambda_1/\lambda_0$, $|\epsilon| = 1$.*

3.3.3. Наконец обсудим достаточно общий случай. Пусть Θ – разбиение $\mathbb{T}^m$ на измеримые подмножества E_k с нулевой мерой границы $\mu\partial E_k = 0$, или, что тоже самое, разбиение θ остова $\mathbb{S}^m$ на подмножества G_k, $\mu\partial G_k = 0$.

Построим пару неотрицательных сингулярных мер ν_k, $k = 0, 1$, зависящих только от разбиения Θ. Рассмотрим функцию h_k из класса $N_*(\mathbb{D}^m)$ (а точнее, из $H^\infty(\mathbb{D}^m)$) почти всюду на $\mathbb{S}^m$, имеющую предельные значения модуля, равные $\exp\chi_{G_k^\circ}$, $G_k^\circ = G_k \setminus \partial G_k$. По теореме Рудина такие функции существуют. При этом в $\mathbb{D}^m$ справедливо равенство $\ln|h_k| = P[\chi_{E_k} - d\nu_k]$, где ν_k — неотрицательные сингулярные меры.

Зададим индекс $k(b)$ по правилу: $k(b) = 0$ при $b < 0$ и $k(b) = 1$ при $b \ge 0$. Функцию ς_δ определим формулой

$$\varsigma_\delta(\xi) = \left(\alpha_0^{-1}\Phi(\xi)\Pi(z,\xi)\right)^{1/p} e^{(1-k(b))b}\, h_{k(b)}^{|b|}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{D}^m. \tag{29}$$

Введем обозначения

$$\beta_1^+ := \beta_1^+(z) = \alpha_1(z) + P[d\nu_0](z), \quad \beta_0^+ := \beta_0^+(z) = 1 - \beta_1^+ = \alpha_0(z) - P[d\nu_0](z);$$

$$\beta_1^- := \beta_1^-(z) = \alpha_1(z) - P[d\nu_1](z), \quad \beta_0^- := \beta_0^-(z) = 1 - \beta_1^- = \alpha_0(z) + P[d\nu_1](z).$$

Предложение 5. *Пусть θ – разбиение $\mathbb{S}^m$ на измеримые подмножества G_k с нулевой мерой границы $\mu\partial G_k = 0$, весовые функции ϕ_k имеют вид* (27) *и $0 < p \le \infty$. Тогда для любой точки $z \in \mathbb{D}^m$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{M}_z(\lambda_0, \lambda_1) \ge \lambda_0|\varsigma_{\lambda_1/\lambda_0}(z)| = \Big(\alpha_0^{-\beta_0}\alpha_1^{-\beta_1}\varpi(z)|\Phi(z)|\Big)^{1/p} \lambda_0^{\beta_0}\,\lambda_1^{\beta_1}, \tag{30}$$

в котором $\beta_k = \beta_k^+$ при $\lambda_1 \le \delta_*\lambda_0$ и $\beta_k = \beta_k^-$ при $\lambda_1 > \delta_*\lambda_0$.

Доказательство. По построению для произвольных $\delta > 0$ и точки $z \in \mathbb{D}^m$ функция ς_δ принадлежит классу $N_*(\mathbb{D}^m)$ и почти всюду на $\mathbb{S}^m$ модуль предельных значений ς_δ совпадает с ψ_δ. Следовательно, функция ς_δ принадлежит классу $\mathscr{H}$ и справедливы равенства $\|\lambda_0\varsigma_{\lambda_1/\lambda_0}\|_{L^p_{\phi_k}(E_k)} = \lambda_k$, $k = 0, 1$. Тогда модуль значения в точке z дает оценку снизу величины (20). Вычисляя $\lambda_0|\varsigma_{\lambda_1/\lambda_0}(z)|$ по определению (29), получим соотношения (30).

3.4. Семейство множеств $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$. Напомним, что измеримое множество E – подмножество тора $\mathbb{T}^m$ – принадлежит семейству $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$, если m-гармоническая мера $w(\xi, G, \mathbb{D}^m) = P[\chi_E](\xi)$ является плюригармонической в поликруге $\mathbb{D}^m$.

Критерием принадлежности множества E семейству $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$ является ортогональность его характеристической функции χ_E всем функциям e^{ikt}, в которых целочисленный вектор k имеет координаты разных знаков, т.е.

$$\int_E e^{ikt}\,dt = 0, \quad k \notin \mathbb{Z}_+^m \cup \mathbb{Z}_-^m.$$

Ясно, что пустое множество $\emptyset$ и весь тор $\mathbb{T}^m$ принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$. Кроме того нетрудно понять, что имеют место утверждения:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^m),\ \mu(E_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \cup E_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^m);$$

$$E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^m) \quad \Rightarrow \quad (E_1 \cup E_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^m) \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^m)).$$

Далее приведена конструкция, дающая достаточное условие принадлежности множества семейству $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$.

Пусть g есть *внутренняя функция*, т.е. $g \in H^\infty(\mathbb{D}^m)$ и почти всюду на $\mathbb{T}^m$ для предельных значений справедливо равенство $|g(e^{it})| = 1$. Для функции g и измеримого подмножества γ множества $\mathbb{T}$ определим множество $E(g, \gamma)$ формулой

$$E(g, \gamma) := \{t \in \mathbb{T}^m \,:\, g(e^{it}) = e^{i\tau},\, \tau \in \gamma\}.$$

Предложение 6. *Для произвольной внутренней функции g и γ — измеримого подмножества $\mathbb{T}$ положительной меры — множество $E(g, \gamma)$ принадлежит семейству $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию u, которая является суперпозицией внутренней функции g и функции $\mathfrak{w}$ — гармонической меры γ относительно круга $\mathbb{D}$, т.е. $u(\xi) = \mathfrak{w}(g(\xi))$, $\xi \in \mathbb{D}^m$. Функция u является плюригармонической в $\mathbb{D}^m$, для нее почти всюду на $\mathbb{T}^m$ справедливо равенство $u(t) = \chi_{E(g,\gamma)}(t)$. Следовательно, $E(g, \gamma)$ принадлежит $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$.

§4. Оптимальное восстановление функции, голоморфной в поликруге

4.1. Устойчивость задачи восстановления функций. Доказательство теоремы 3. Оценим сверху величину оптимального восстановления (3). Используя достаточно общую оценку [4, Теорема 3], [5, Теорема 1.1], имеем

$$\mathcal{E}(\delta; \Upsilon_z, Q, \mathcal{F}) \le \frac{\sqrt{3}}{3}\, \Omega(\delta; \Upsilon_z, Q). \tag{31}$$

Здесь множитель $\sqrt{3}/3$ — константа Юнга плоскости $\mathbb{C}$. Соотношения (10), (11), (31) дают цепочку неравенств

$$\mathcal{E}(\delta; \Upsilon_z, Q, \mathcal{F}) \le \frac{\sqrt{3}}{3}\, \Omega(\delta) \le \frac{2^\kappa \sqrt{3}}{3}\, \omega(\delta/2^\kappa) \le \frac{2^\kappa \sqrt{3}}{3}\, \mathscr{C}(\delta/2^\kappa)^{\alpha_1},$$

где $\kappa = \max\{1, 1/p_0\}$. Отсюда следует равенство (18). В полученной оценке величины $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{p_0,p_1}(z;\theta)$ и $\alpha_1(z) = w(z, G_1, \mathbb{D}^m)$ зависят от точки z.

Рассмотрим их как функции переменных z на $\mathbb{D}^m$. Для них справедливы представления

$$\mathscr{C}^{p_0,p_1}(z;\theta) = \exp P[\ln\psi_1](z), \quad \alpha_1(z) = P[\chi_{E_1}](z).$$

Как следствие m-гармоничности интегралов Пуассона, они непрерывны на $\mathbb{D}^m$. Для произвольного компакта $K \subset \mathbb{D}^m$ введем величины $\overline{\mathscr{C}} = \max\{\mathscr{C}^{p_0,p_1}(z;\theta) : z \in K\}$ и $\underline{\alpha}_1 = \min\{\alpha_1(z) : z \in K\}$. Число $\underline{\alpha}_1$ положительное. Теперь для $\delta < 2^\kappa$ имеем равномерную на компакте K оценку

$$\mathcal{E}(\delta;\Upsilon_z, Q, \mathcal{F}) \le \frac{2^\kappa\sqrt{3}}{3}\,\overline{\mathscr{C}}(\delta/2^\kappa)^{\underline{\alpha}_1}.$$

Следовательно, предел (18) равномерный по z внутри поликруга $\mathbb{D}^m$. Теорема 3 доказана.

4.2. Специальное интегральное представление. В следующей теореме получено специальное интегральное представление функций класса Q.

Теорема 5. *В предположениях* (i_1) *и* (i_2) *для произвольной функции* $f \in Q$ *справедливо равенство*

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}^m} P(z, e^{it})\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, f(e^{it})\, dt. \tag{32}$$

Предпошлем доказательству теоремы 5 вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. *В предположениях* (i_1) *и* (i_2) *для произвольной функции* f *из класса* Q *функция* f/s_δ *принадлежит классу Харди* $H^1(\mathbb{D}^m)$.

Доказательство. леммы 4.1. Функция s_δ является внешней и, следовательно, по предложению D функция $1/s_\delta$ принадлежит классу $N_*(\mathbb{D}^m)$. Функция f из класса Q и стало быть из класса $N_*(\mathbb{D}^m)$. Тогда из неравенства $\ln^+|f(z)/s_\delta(z)| \le \ln^+|f(z)| + \ln^+|1/s_\delta(z)|$ и определения класса $N_*(\mathbb{D}^m)$ следует, что функция f/s_δ также принадлежит классу $N_*(\mathbb{D}^m)$. Теперь для доказательства принадлежности f/s_δ классу Харди $H^1(\mathbb{D}^m)$ достаточно показать, что предельные значения этой функции суммируемы на $\mathbb{S}^m$. Рассмотрим интегралы на измеримых частях $G_k, k = 0, 1$. Подставляя граничные значения функции s_δ на G_k и используя принадлежность предельных значений f, как функции класса Q, пространству $L^{p_k}_{\phi_k}(G_k)$, получим оценку сверху

$$\int_{E_k}\left|\frac{f(e^{it})}{s_\delta(e^{it})}\right| P(z, e^{it})\, dt = \int_{E_k} \frac{|f(e^{it})|\alpha_k^{1/p_k}\phi_k^{1/p_k}(e^{it})}{\delta^k P^{1/p_k}(z, e^{it})}\, P(z, e^{it})\, dt =$$

$$= \frac{\alpha_k^{1/p_k}}{\delta^k} \int_{G_k} \left\{ |f(e^{it})| \phi_k^{1/p_k}(e^{it}) \right\} P^{1-1/p_k}(z, e^{it})\, dt \le$$

$$\le \frac{\alpha_k^{1/p_k}}{\delta^k} \left(\int_{E_k} |f(e^{it})|^{p_k} \phi_k(e^{it})\, dt \right)^{1/p_k} \left(\int_{E_k} P(z, e^{it})\, dt \right)^{1-1/p_k} = \frac{\alpha_k}{\delta^k} \|f\|_{L^{p_k}_{\phi_k}(G_k)}.$$

Итак, функция f/s_δ принадлежит классу $N_*(\mathbb{D}^m)$ и её предельные значения суммируемы на $\mathbb{S}^m$. Тогда в силу предложения D функция f/s_δ принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{D}^m)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. По лемме 4.1 для произвольной функции $f \in Q$ функция f/s_δ принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{D}^m)$. Тогда в силу предложения D справедливо равенство $f(z)/s_\delta(z) = P[f/s_\delta](z)$. Умножив его на $s_\delta(z)$, получим равенство (32). Теорема доказана.

4.3. Наилучшее приближение и оптимальное восстановление функционала Υ_z. Убедимся, что функционал T_δ является ограниченным, вычислим его норму и уклонения (2) и (12).

Лемма 4.2 *В предположениях* (i_1) *и* (i_2) *имеют место равенства*

$$\|T_\delta\| = \frac{\alpha_1}{\delta} |s_\delta(z)| = \alpha_1 \mathscr{C}\, \delta^{-\alpha_0}, \tag{33}$$

$$U(T_\delta) = \alpha_0 |s_\delta(z)| = \alpha_0 \mathscr{C}\, \delta^{\alpha_1}, \tag{34}$$

$$\mathcal{U}(T_\delta, \delta) = |s_\delta(z)| = \mathscr{C}\, \delta^{\alpha_1}. \tag{35}$$

Доказательство. Для произвольной функции $g \in L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$ имеем оценку

$$|T_\delta g| = \left| \int_{E_1} P(z, e^{it}) \frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, g(e^{it})\, dt \right| \le$$

$$\le \frac{\alpha_1^{1/p_1}}{\delta} |s_\delta(z)| \int_{E_1} \left\{ |g(e^{it})| \phi_1^{1/p_1}(e^{it}) \right\} P^{1-1/p_1}(z, e^{it})\, dt \le$$

$$\le \frac{\alpha_1^{1/p_1}}{\delta}\, |s_\delta(z)| \left(\int_{E_1} |g(e^{it})|^{p_1} \phi_1(e^{it})\, dt \right)^{1/p_1} \left(\int_{E_1} P(z, e^{it})\, dt \right)^{1-1/p_1} =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\delta}\, |s_\delta(z)|\, \|g\|_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)}.$$

С другой стороны, рассмотрев в качестве g предельные значения функции $\delta^{-1} s_\delta$ на G_1, получим

$$T_\delta \left(\delta^{-1} s_\delta \right) = \frac{\alpha_1}{\delta}\, s_\delta(z),$$

что даёт обратное неравенство для нормы функционала и, как следствие, равенство (33).

По теореме 5 для произвольной функции $f \in Q$ справедливо равенство (32). Отсюда имеем представление

$$f(z) - T_\delta f = \int_{E_0} P(z, e^{it}) \, \frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})} \, f(e^{it}) \, dt.$$

Теперь, рассуждая аналогично доказательству равенства (33), нетрудно получить и равенство (34). Верхняя грань (12) достигается на s_δ.

Равенство (35) следует из следующих стандартных рассуждений. Для произвольных функций $f \in Q$ и $g \in L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)$ имеем

$$|f(z) - T_\delta g| \le |f(z) - T_\delta f| + |T_\delta(f - g)| \le U(T_\delta) + \|T_\delta\| \, \|f - g\|_{L^{p_1}_{\phi_1}(G_1)}.$$

Теперь из равенств (33) и (34) для уклонения (2) получаем оценку сверху

$$\mathcal{U}(T_\delta, \delta) \le \alpha_0 |s_\delta(z)| + \frac{\alpha_1}{\delta} |s_\delta(z)| \cdot \delta = |s_\delta(z)|.$$

Для оценки снизу величины $\mathcal{U}(T_\delta, \delta)$ достаточно рассмотреть конкретные функции f и g. Выбрав $f = s_\delta$ и $g \equiv 0$, получим неравенство

$$\mathcal{U}(T_\delta, \delta) \ge |s_\delta(z) - 0| = |s_\delta(z)|.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу неравенства (24) предложения 1, равенства (15) и равенства (35) леммы 4.2 имеет место соотношение

$$|s_\delta(z)| \le \omega(\delta) = \mathcal{E}(\delta; \mathcal{F}) \le \mathcal{U}(T_\delta, \delta) = |s_\delta(z)|.$$

Отсюда следуют утверждения теоремы 1.

Доказательство теоремы 4. Положим $N = \|T_\delta\| = \alpha_1 \delta^{-1} |s_\delta(z)|$. Тогда в силу (33) и (34) для величины наилучшего приближения (13) справедлива оценка сверху

$$E(N) \le U(T_\delta) = \alpha_0 |s_\delta(z)|.$$

Получим оценку снизу величины (13). Для величины (14) справедлива оценка снизу

$$\Delta(N) \ge \omega(\delta) - N\delta = |s_\delta(z)| - \frac{\alpha_1}{\delta} |s_\delta(z)| \cdot \delta = \alpha_0 |s_\delta(z)|.$$

Откуда, используя равенство (16), получим оценку снизу наилучшего приближения функционала. Теорема 4 доказана.

В случае совпадения показателей $p = p_0 = p_1$ и весовых функций вида (27), как следствие, справедливо утверждение.

Предложение 7. *Пусть E_1 – измеримое подмножество $\mathbb{T}^m$ из семейства $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$. Тогда для всех $1 \le p \le \infty$, $\delta > 0$, $N > 0$ и $z \in \mathbb{D}^m$ справедливы равенства (7) и (19). Помимо того, в задаче (3) оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный функционал T_δ; в задаче (13) функционалом наилучшего приближения является T_δ, у которого параметр $\delta = \mathscr{C}^{1/\alpha_0}\alpha_1^{1/\alpha_0}N^{-1/\alpha_0}$. При этом имеет место равенство $\mathscr{C} = \left(\alpha_0^{-\alpha_0}\alpha_1^{-\alpha_1}\varpi(z)|\Phi(z)|\right)^{1/p}$.*

§5. Дополнительные замечания

5.1. Оптимальное восстановление голоморфной функции на подмножестве поликруга. В случае $p_0 = p_1 = \infty$ и $E_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$ экстремальная в (8) функция s_δ не зависит от выбора точки $z \in \mathbb{D}^m$. Как следствие, поточечный оптимальный метод (6) является наилучшим и в задаче восстановления голоморфной функции на произвольном компакте внутри поликруга. Приведем точные формулировки задачи и вытекающего результата.

Обозначим через K произвольный компакт в $\mathbb{D}^m$. Пусть $B(K)$ — банахова решётка (или, более общо, метрическое пространство с метрикой сохраняющей порядок) функций, определенных на K, которая содержит константы. В частности, в качестве $B(K)$ можно рассматривать пространства $L^q(K,\mu)$, где $0 < q \le \infty$ и μ — неотрицательная мера на K. Класс Q — класс функций f из $H^\infty(\mathbb{D}^m)$, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{L^\infty(G_0)} \le 1$; имеет место вложение $Q \subset B(K)$. Обозначим через Υ_K оператор на $H^\infty(\mathbb{D}^m)$, сопоставляющий предельным значениям на G_1 функции f ее сужение на компакт K.

Модулем непрерывности оператора Υ_K на классе Q называется функция переменной $\delta \ge 0$, определяемая равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon_K, Q) := \sup\left\{\|f\|_{B(K)} \,:\, f \in Q,\ \|f\|_{L^\infty(G_1)} \le \delta\right\}. \tag{36}$$

В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать множество $\mathcal{F}$ всех возможных, множество $\mathcal{L}$ линейных, или множество $\mathcal{B}$ линейных ограниченных операторов из $L^\infty(G_1)$ в $B(K)$. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T,\delta) := \sup\left\{\|f - Tf_\delta\|_{B(K)} \,:\, f \in Q,\ f_\delta \in L^\infty(G_1),\ \|f - f_\delta\|_{L^\infty(G_1)} \le \delta\right\}$$

является погрешностью восстановления методом T на компакте K функций класса Q по их значениям на G_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^\infty(G_1)$. Тогда

$$\mathcal{E}(\delta;\mathcal{R}) = \mathcal{E}(\delta;\Upsilon_K,Q,\mathcal{R}) := \inf\{\mathcal{U}(T,\delta)\ :\ T\in\mathcal{R}\} \tag{37}$$

есть *величина оптимального восстановления* на компакте K (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ_K) функций класса Q по их δ-приближённым значениям на G_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_\mathcal{R}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления — оператора, на котором в (37) достигается нижняя грань. Величины (36) и (37) связаны соотношениями

$$\omega(\delta) \le \mathcal{E}(\delta;\mathcal{F}) \le \mathcal{E}(\delta;\mathcal{L}) \le \mathcal{E}(\delta;\mathcal{B}). \tag{38}$$

Предполагая, что $p_0 = p_1 = \infty$ и разбиение удовлетворяет условию $E_1 \subset \mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$, рассмотрим функцию s_δ, $\delta > 0$, определённую равенством (5). В этом случае для неё справедливо представление:

$$s_\delta(\xi) = s_1^{\ln\delta}(\xi), \quad s_1(\xi) = \exp\{w(\xi) + iv(\xi)\}, \quad \xi\in\mathbb{D}^m,$$

в котором $w(\xi) = w(\xi, G_1, \mathbb{D}^m)$ есть плюригармоническая функция, а v – сопряженная к w функция в $\mathbb{D}^m$. Для модуля и норм функции s_δ имеют место равенства

$$|s_\delta(\xi)| = \delta^{w(\xi)},\ \xi\in\mathbb{D}^m; \quad \|s_\delta\|_{L^\infty(G_k)} = \delta^k,\ k = 0,1.$$

Ясно, что $s_\delta \in H^\infty(\mathbb{D}^m)$, более того $s_\delta \in Q$. Отсюда, функция s_δ даёт оценку снизу для модуля непрерывности оператора (36):

$$\omega(\delta) \ge \|s_\delta\|_{B(K)} = \|\delta^\omega\|_{B(K)}. \tag{39}$$

На пространстве $L^\infty(G_1)$ определим линейный оператор $\mathcal{T}_\delta$ формулой

$$(\mathcal{T}_\delta f)(z) := \int_{E_1} P(z,e^{it})\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, f(e^{it})\,dt, \quad z\in\mathbb{D}^m. \tag{40}$$

Оператор (40) и функционал (6) связаны равенством $(\mathcal{T}_\delta f)(z) = T_\delta f$, $z \in \mathbb{D}^m$. Используя лемму 4.2, предположения на $B(K)$ и представление s_δ получаем равенства для нормы и уклонения оператора $\mathcal{T}_\delta$.

Лемма 5.3 *Пусть E_1 измеримое подмножество $\mathbb{T}^m$ из $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$. Тогда $\mathcal{T}_\delta$ является линейным ограниченным оператором из $L^\infty(G_1)$ в $B(K)$; имеют место равенства*

$$\|\mathcal{T}_\delta\|_{L^\infty(G_1)\to B(K)} = \|w\delta^{w-1}\|_{B(K)},$$
$$\mathcal{U}(\mathcal{T}_\delta,\delta) = \|\delta^w\|_{B(K)}. \tag{41}$$

Отсюда для задачи оптимального восстановления голоморфной функции на компакте K следует утверждение.

Теорема 6. *Пусть E_1 – измеримое подмножество $\mathbb{T}^m$ из $\mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$. Тогда для величин* (36) *и* (37) *для всех $\delta > 0$ справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathcal{E}(\delta; \mathcal{B}) = \mathcal{E}(\delta; \mathcal{L}) = \mathcal{E}(\delta; \mathcal{F}) = \|s_\delta\|_{B(K)} = \|\delta^w\|_{B(K)}.$$

При этом экстремальными в (36) *являются функции вида ϵs_δ, $|\epsilon| = 1$; в задаче* (37) *оптимальным методом восстановления является линейный ограниченный оператор $\mathcal{T}_\delta$.*

Доказательство. Утверждения теоремы 6 следуют из (38), (39) и (41), дающих цепочку соотношений

$$\|\delta^w\|_{B(K)} \le \omega(\delta) \le \mathcal{E}(\delta; \mathcal{F}) \le \mathcal{E}(\delta; \mathcal{L}) \le \mathcal{E}(\delta; \mathcal{B}) \le \mathcal{U}(\mathcal{T}_\delta, \delta) = \|\delta^w\|_{B(K)}.$$

Теорема 6 доказана.

5.2. Обобщение на полицилиндрические области. Рассмотренные в настоящей работе задачи и полученные результаты голоморфной заменой переменных переносятся на случай полицилиндрических областей.

Пусть полицилиндрическая область $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^m$ является декартовым произведением односвязных областей $B_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, m}$, т.е. $\mathbb{B} := B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$, ограниченных замкнутыми спрямляемыми жордановыми кривыми ∂B_j, $j = \overline{1, m}$. Множество $\Sigma := \partial B_1 \times \partial B_2 \times \ldots \times \partial B_m$ есть остов области $\mathbb{B}$.

Обозначим через ψ_j функцию, осуществляющую однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на область B_j. Известно [11, гл.X,§1], что ψ_j непрерывна на замыкании $\overline{\mathbb{D}}$ и абсолютно непрерывна на окружности $\mathbb{S}$; её производная ψ_j' из класса $H^1(\mathbb{D})$. При этом измеримому подмножеству положительной меры на $\mathbb{S}$ соответствует множество положительной меры на ∂B_j и обратно. Обозначим через ψ вектор функцию $\psi(z) := (\psi_1(z_1), \psi_2(z_2) \ldots \psi_m(z_m))$, которая задаёт взаимно однозначное голоморфное отображение поликруга $\mathbb{D}^m$ на полицилиндрическую область $\mathbb{B}$.

Класс Смирнова (также как и классы Неванлина и Харди) инвариантен относительно отображения $\zeta = \psi(z)$. Точнее, функция f принадлежит классу $N_*(\mathbb{B})$ тогда и только тогда, когда суперпозиция $F(z) = f(\psi(z))$ из $N_*(\mathbb{D}^m)$. Покажем, что класс $\mathcal{H}$ также обладает инвариантностью.

Рассмотрим внешние функции (функции Сегё), определяемые в круге $\mathbb{D}$ равенством

$$\widetilde{\psi}_j(z_j) := \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\tau} + z_j}{e^{i\tau} - z_j}\, \ln|\psi_j'(e^{i\tau})|\, d\tau\right\}.$$

Введём функцию $\widetilde{\Psi}$ как произведение функций $\widetilde{\psi}_j$: $\widetilde{\Psi}(z) := \prod_{j=1}^{m} \widetilde{\psi}_j(z_j)$, $z \in \mathbb{D}^m$. По построению функция $\widetilde{\Psi}$ обладает свойствами: $\widetilde{\Psi}$ – внешняя функция класса $N_*(\mathbb{D}^m)$; равенство $|\widetilde{\Psi}(e^{it})| = \prod_{j=1}^{m} |\psi_j'(e^{it_j})|$ справедливо почти всюду на $\mathbb{T}^m$.

Для разбиения $\Theta = \{E_0, E_1\}$ тора $\mathbb{T}^m$ (или, соответственно, разбиения $\theta = \{G_0, G_1\}$ – остова поликруга $\mathbb{S}^m$), определим разбиение $\widetilde{\theta} = \{\widetilde{G}_0, \widetilde{G}_1\}$ остова Σ области $\mathbb{B}$ равенством $\widetilde{G}_k = \{\zeta \in \Sigma\,:\, \zeta = \psi(e^{it}),\, t \in E_k\}$. Пусть $\widetilde{\phi}_k$ – сужения веса $\widetilde{\phi}$ на множества $\widetilde{G}_k$, $k = 0, 1$.

Обозначим через $\mathscr{H}^{p_0,p_1}(\mathbb{B}; \widetilde{\theta}; \widetilde{\phi})$, $0 < p_0, p_1 \le \infty$, класс функций из $N_*(\mathbb{B})$ таких, что $|f|^{p_k}\widetilde{\phi}_k \in L^1(\widetilde{G}_k)$, если $p_k < \infty$, т.е. конечны L^{p_k}-средние с весом $\widetilde{\phi}_k$:

$$\|f\|_{L^{p_k}_{\widetilde{\phi}_k}(G_k)} := \left(\int_{\widetilde{G}_k} |f(\zeta)|^{p_k} \widetilde{\phi}_k(\zeta)\, |d\zeta| \right)^{1/p_k} =$$

$$= \left(\int_{E_k} |f(\psi(e^{it})|^{p_k} \widetilde{\phi}_k(\psi(e^{it})) \prod_{j=1}^{m} |d\psi_j(e^{it})| \right)^{1/p_k} < +\infty.$$

Если показатель p_k равен бесконечности, то конечна величина

$$\|f\|_{L^\infty(\widetilde{G}_k)} := \operatorname{ess\,sup}\{|f(\zeta)|\,:\, \zeta \in \widetilde{G}_k\}.$$

Предложение 8. *Функция f принадлежит классу $\mathscr{H}^{p_0,p_1}(\mathbb{B}; \widetilde{\theta}; \widetilde{\phi})$ тогда и только тогда, когда функция $F(\cdot) = f(\psi(\cdot))$ из класса $\mathscr{H}^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m; \theta; \phi)$, где веса $\widetilde{\phi}$ и ϕ связаны равенством $\phi(z) = \widetilde{\phi}(\psi(z))|\widetilde{\Psi}(z)|$, $z \in \mathbb{S}^m$. При этом для произвольной функции $f \in \mathscr{H}^{p_0,p_1}(\mathbb{B}; \widetilde{\theta}; \widetilde{\Phi})$ справедливо равенство*

$$\|f\|_{L^{p_k}_{\widetilde{\phi}_k}(\widetilde{G}_k)} = \|F\|_{L^{p_k}_{\phi_k}(G_k)}, \quad k = 0, 1. \tag{42}$$

Доказательство. Так как $f \in N_*(\mathbb{B})$ тогда и только тогда, когда $F \in N_*(\mathbb{D}^m)$, то достаточно показать справедливость равенств для норм. В случае $p_k = \infty$ это очевидно, рассмотрим случай $0 < p_k < \infty$. Используя замену переменных $\zeta = \psi(e^{it})$ и цепочку соотношений

$$\widetilde{\phi}(\zeta)\, |d\zeta| = \widetilde{\phi}(\psi(e^{it})) \prod_{j=1}^{m} |\psi_j'(e^{it_j})| dt_j = \widetilde{\phi}(\psi(e^{it}))|\widetilde{\Psi}(e^{it})| dt = \phi(e^{it}) dt,$$

получаем равенство норм (42). Предложение 8 доказано.

Отметим, что так как $\widetilde{\Psi}$ является внешней функцией из класса $N_*(\mathbb{D}^m)$, то весовая функция ϕ представима в виде (27) тогда и только тогда, когда весовая функция $\widetilde{\phi}(\psi)$ имеет вид (27).

Определим в $\mathscr{H}^{p_0,p_1}(\mathbb{B};\widetilde{\theta};\widetilde{\phi})$ класс $Q^{p_0,p_1}(\mathbb{B};\widetilde{\theta};\widetilde{\phi})$ функций f с предельными значениями на $\widetilde{G}_0$, удовлетворяющими неравенству $\|f\|_{L^{p_0}_{\widetilde{\phi}_0}(\widetilde{G}_0)} \le 1$. Из предложения 8 следует, что функция f из класса $Q^{p_0,p_1}(\mathbb{B};\widetilde{\theta};\widetilde{\phi})$ тогда и только тогда, когда функция F принадлежит $Q^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m;\theta;\phi)$. Для функционала $\widetilde{\Upsilon}_\zeta$, сопоставляющего предельным значениям на $\widetilde{G}_1$ функции f её значение $f(\zeta)$ в точке $\zeta=\psi(z)\in\mathbb{B}$ (функционала голоморфного продолжения функции в точку ζ с части остова $\widetilde{G}_1$), справедливы равенства:

$$\omega(\delta;\widetilde{\Upsilon}_\zeta,Q^{p_0,p_1}(\mathbb{B};\widetilde{\theta};\widetilde{\phi}))=\omega(\delta;\Upsilon_z,Q^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m;\theta;\phi)),\quad \delta>0;$$

$$\mathcal{E}(\delta;\widetilde{\Upsilon}_\zeta,Q^{p_0,p_1}(\mathbb{B};\widetilde{\theta};\widetilde{\phi}),\mathcal{F})=\mathcal{E}(\delta;\Upsilon_z,Q^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m;\theta;\phi),\mathcal{F}),\quad \delta>0;$$

$$E(N;\widetilde{\Upsilon}_\zeta,Q^{p_0,p_1}(\mathbb{B};\widetilde{\theta};\widetilde{\phi}))=E(N;\Upsilon_z,Q^{p_0,p_1}(\mathbb{D}^m;\theta;\phi)),\quad N>0.$$

Автор выражает благодарность профессору П.А. Бородину, чей вопрос инициировал исследование задачи в многомерном случае, и профессору В.В. Арестову за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

Список литературы

1. *Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения.* Новосибирск: Наука, 1990.

2. *Акопян Р. Р.* Аналог теоремы о двух константах и оптимальное восстановление аналитических функций // *Матем. сб.* 2019. Т. 210, N 10. C 3–16.

3. *Акопян Р. Р.* Аналог теоремы Адамара и связанные экстремальные задачи на классе аналитических функций // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2020. Т. 26, N 4. С. 32–47.

4. *Арестов В. В.* О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // *Матем. заметки.* 1977. Т. 22, N 2. С. 231–244.

5. *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // *Тр. Мат. ин-та АН СССР.* 1989. Т. 189. С. 3–20.

6. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // *Изв. вузов. Матем.* 1995. N 11. С. 42–68.

7. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // *Успехи мат. наук.* 1996. Т. 51, N 6(312). С. 89–124.

8. *Арестов В. В., Акопян Р. Р.* Задача Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора ограниченными и родственные ей задачи // *Тр. ИММ УрО РАН* 2020. Т. 26, N 4. С. 7–31.

9. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // *Ж. вычис. матем. и матем. физики.* 1971. Т. 11, N 4. С. 1014–1016.

10. *Габушин В. Н.* Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // *Матем. заметки.* 1970. Т. 8, N 5. С. 551–562.

11. *Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.–Л.: Гостехиздат, 1952. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

12. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1956. Т. 20, N 6. С. 819—842.

13. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа.* М.: Наука, 1980.

14. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // *Матем. заметки.* 1991. Т. 50, N 6. С. 85–93.

15. *Марчук А. Г. Оптимальные по точности методы решения линейных задач восстановления* / Препринт. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976.

16. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных в конечном числе точек // *Матем. заметки.* 1975. Т. 17, N 3. С. 359–368.

17. *Рудин У. Теория функций в поликруге.* М.: Наука, 1974.

18. *Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них* / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1965.

19. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // *Матем. заметки.* 1967. Т. 1, N 2. С. 137–148.

20. *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // *Сер. Мат. анал.* / Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. С. 3–124.

21. *Micchelli Ch. A., Rivlin Th. J.* A survey of optimal recovery *Optimal estimation in approximation theory.* N.Y. etc. Plenum Press. 1977. P. 1–54.

22. *Nevanlinna F., Nevanlinna R.* Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie // *Acta Soc. Sc. Fennicae.* 1922. V. 50, N 5. 46 pp.

23. *Osipenko K. Yu. Optimal Recovery of Analytic Functions.* Huntington: NJVA Science Publ.Inc., 2000.

24. *Stoll M.* The space N_* of holomorphic functions bounded symmetri domains // *Ann. Polon. Math.* 1976. V. 32. P. 95–110.

25. *Zarantonello S. E.* A representation of H^p-functions with $0 < p < \infty$ // *Pacif. J. Math.* 1978. V. 79, N 1. P. 271–282.

Акопян Роман Размикович
Уральский федеральный университет,
ул. Тургенева 4,
Екатеринбург, 620002 РОССИЯ.
E-mail: `RRAkopyan@mephi.ru`

Поступила в редакцию
3 апреля 2023 г.
Получена после доработки
28 августа 2023 г.
Принята к публикации
5 октября 2023 г.