УДК 519.175.4 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.202 2023, том 26, № 2, 30-43

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УКЛОНЕНИЙ ЧИСЛА ЦИКЛОВ В ОБОБЩЁННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФАХ

А. А. Быстров, Н. В. Володько

Пусть R_n — центрированное и нормированное число циклов фиксированной длины, содержащихся в обобщённом графе с n вершинами. В работе получено экспоненциальное неравенство типа Хёвдинга для распределения R_n.

Ключевые слова и фразы: случайный обобщённый граф, число подграфов, циклы, экспоненциальные неравенства.

Введение

В последние годы вышло большое количество работ, посвящённых исследованию математических моделей сетей самой различной природы. Как правило, такими моделями служат случайные графы разных типов. Известной классической моделью является *граф Эрдёша-Реньи* с n вершинами, где каждое из возможных рёбер появляется с фиксированной вероятностью $p \in (0,1)$ независимо от остальных рёбер. Наряду с графами Эрдёша-Реньи представляют интерес и более общие конструкции. Популярным примером является модель *обобщенного графа*, в котором каждая вершина имеет вес, случайный или детерминированный, а вероятность ребра между двумя вершинами является функцией их весов. Так, вершины с большим весом скорее окажутся обладателями большого числа соседей, чем вершины с маленьким весом.

Одним из важнейших объектов в данных моделях является распределение числа копий некоторого фиксированного подграфа в случайных графах. Многие работы посвящены доказательству предельных теорем для таких распределений. Так, асимптотическая нормальность числа подграфов в графе Эрдёша-Реньи изучалась в [14]. Принцип больших уклонений для числа треугольников в графе Эрдёша-Реньи был получен в [6] для $p = p(n) \to 0$ и в [7] для фиксированного p (см. также [12],[2]). Что касается более общих моделей, в статье [13] доказана сходимость по распределению числа треугольников в обобщённом случайном графе к пуассоновскому закону. Аналогичный результат для числа циклов в обобщённом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант 22-21-00414).

случайном графе был получен в работе [3] (*циклом* называется замкнутый непрерывный путь (многоугольник), в котором нет повторящихся вершин, за исключением первой и последней). Также в этой работе исследована и скорость сходимости.

В настоящей работе рассматривается другая модель обобщённого графа, а именно, модель, в которой когда вероятность появления каждого ребра зависит только от весов вершин, соединяемых этим ребром (при этом все возможные ребра возникают независимо друг от друга). Целью работы является получение экспоненциальных неравенств типа Хёвдинга для хвостов распределения центрированного и нормированного числа циклов в обобщённом графе.

Классическое неравенство Хёвдинга для сумм независимых ограниченных случайных величин ([10]) имеет следуюший вид:

$$\mathbb{P}(n^{-1}(S_n - \mathbb{E}S_n) \geqslant t) \leqslant e^{-2nt^2/(b-a)^2}$$

для всех положительных t. Здесь S_n — сумма n независимых случайных величин со значениями в $[a, b]$. Верхние оценки такого вида широко изучаются на протяжении многих десятилетий. В частности, хорошо известны экспоненциальные оценки типа Хёвдинга для таких весьма общих объектов, как U- и V-статистики, в том числе в случае наблюдений из стационарной последовательности с условиями слабой зависимости. К сожалению, при изучении числа копий данного подграфа, например числа циклов с k вершинами (k-циклов), приходится иметь дело с кратными суммами сильно зависимых случайных величин.

Неравенства, в известном смысле близкие к интересующим нас, были получены в работе [11], но лишь для уклонений порядка n (после нормировки) и без явно выписанной константы в показателе экспоненты:

$$\mathbb{P}(T_n \geqslant \mathbb{E}T_n + \varepsilon n^k p^k) \leqslant \exp(-\alpha(\varepsilon, k) n^2 p^2),$$

где T_n — число $k-$циклов в графе Эрдёша-Реньи, а $\alpha(\varepsilon)$ имеет неявный вид. Заметим, что в этой работе изучаются подграфы более общего вида. Близкий результат для числа треугольников был получен в статье [8].

В работах ([4]) и ([5]) мы получили интересующие нас оценки для количества $k-$циклов и произвольных подграфов соответственно в графе Эрдёша-Реньи. В настоящей работе результат для циклов распространяется на случай обобщённых графов.

§ 1. Обозначения и основной результат

Пусть $V(G) = \{1, 2, ..., n\}$ — множество вершин графа G, а W_i — случайный вес $i-$й вершины ($1 \leqslant i \leqslant n$). Будем предполагать выполнение

следующих условий:
(A1) $W_1, \ldots, W_n$ независимы и одинаково распределены на открытом интервале $(0, 1)$.
(A2) При фиксации набора $W = (W_1, W_2, ..., W_n)$ любые две вершины i и j соединены ребром с вероятностью $p_{ij} = p_{ij}(W_i, W_j)$ независимо от других рёбер.
(A3) Существуют константы c_1, c_2 такие, что $0 < c_1 \leqslant \min(c_2, 1)$ и при всех (i, j)

$$c_1 W_i W_j \leqslant p_{ij}(W_i, W_j) \leqslant c_2 W_i W_j.$$

Для $k \geqslant 3$ обозначим $I(k)$ множество возможных $k-$циклов в G. Мощность $I(k)$ равна $(n)_k/(2k)$, где число размещений $(n)_k = n(n-1)...(n-k+1)$ представляет собой число способов выбрать k различных вершин с учётом порядка, а величина $2k$ равняется числу вариантов выбрать начальную точку и направление обхода цикла (все наборы k упорядоченных вершин с различными ориентациями и различными начальными вершинами представляют из себя один и тот же цикл). Для каждого потенциального цикла $\alpha \in I(k)$ обозначим Y_α индикатор события "G содержит α". Точнее, $Y_\alpha = \prod_{i<j:(i,j)\in\alpha} z_{ij}$, где z_{ij} — независимые бернуллиевские случайные величины, равные единице, если $e_{ij} \in E(G)$ ($E(G)$ — множество ребер G).

В данной работе получены экспоненциальные неравенства для вероятностей уклонений центрированной и нормированной кратной суммы

$$R_n = b_n^{-1/2} \sum_{\alpha \in I(k)} (Y_\alpha - \mathbb{E}Y_\alpha),$$

где

$$b_n = \mathbb{E}\,\mathbf{Var}(\sum_{\alpha \in I(k)} Y_\alpha | W),$$

а $\mathbf{Var}(...|W)$ — условная дисперсия при фиксации набора весов $\{W_i\}$.

Лемма 1. *Обозначим $m_j = \mathbb{E}W_1^j$. Тогда при выполнении условий (A1)–(A3) для любого $C \in (0, \frac{1}{2})$ существует число $n_k = n_k(C)$ такое, что для всех натуральных $n \geqslant n_k$ имеет место нижняя оценка*

$$b_n \geqslant C\rho n^{2k-2}, \tag{1}$$

где

$$\rho = m_2^{2(k-2)} \min_{2 \leqslant l \leqslant k} (c_1^{2k-1} m_3^l - c_2^{2k} m_4^l).$$

Здесь константа $C \in (0, \frac{1}{2})$ может быть выбрана произвольно, а $n_k = n_k(C)$ — наибольший корень некоторого многочлена, определяемого в доказательстве.

Нам потребуется дополнительное условие:
(A4) $\rho > 0$.

Теорема. *Пусть выполнены условия (A1) — (A4). Тогда для всех $n \geqslant n_k$ и всех $x > 0$ имеет место верхняя оценка следующего вида:*

$$\mathbb{P}(|R_n| > x) \leqslant \exp\left\{-\frac{C\rho k^{2/3}x^2}{2^{5+2(k-1)/3}e}\right\},$$

где ρ, C и n_k определены в Лемме 1.

Отметим, что в частном случае (A3), когда $c_1 = c_2 = 1$, условие (A4) выполнено автоматически в силу строгого убывания последовательности $\{m_j\}$. Отсюда вытекает

Следствие. *Если верны (A1), (A2) и $p_{ij} = W_iW_j$, то утверждение теоремы выполнено, при этом $\rho = m_2^{2(k-2)} \min_{2\leqslant l\leqslant k}(m_3^l - m_4^l)$.*

§ 2. Доказательство

Для вывода показательных оценок для хвоста распределения R_n мы используем хорошо известный метод, основанный на применении степенного неравенства Маркова (с моментами произвольного чётного порядка) для кратных сумм зависимых случайных величин. Наша основная задача — получение равномерных по n верхних оценок для моментов чётных порядков $\mathbb{E}R_n^{2m}$, $m = 1, 2, \ldots$ с 'правильным' порядком по m. Сначала нам нужно обосновать оценку снизу для b_n.

Доказательство Леммы 1.

Условное среднее для введённых выше индикаторов циклов при фиксации весов вершин графа G представляется в виде

$$\mathbb{E}(Y_\alpha|W) = \mathbb{P}\big(Y_\alpha = 1|W\big) = \prod_{i<j:(i,j)\in\alpha} p_{ij}.$$

Далее, зафиксируем два цикла $\alpha, \alpha' \in I(k)$, имеющих общие ребра. Для них

$$\operatorname{cov}\big(Y_\alpha, Y_{\alpha'}|W\big) = \mathbb{E}(Y_\alpha Y_{\alpha'}|W) - \mathbb{E}(Y_\alpha|W)\mathbb{E}(Y_{\alpha'}|W) =$$

$$= \prod_{(i,j)\in\alpha\triangle\alpha'} p_{ij} \prod_{(i,j)\in\alpha\cap\alpha'} p_{ij} - \prod_{(i,j)\in\alpha\triangle\alpha'} p_{ij} \prod_{(i,j)\in\alpha\cap\alpha'} p_{ij}^2.$$

Здесь и далее, чтобы не загромождать запись, в произведениях не указываем $i < j$, но подразумеваем, что ребро (i, j) входит в граф единожды, вне зависимости от порядка вершин, образующих это ребро. Также мы пишем $(i, j) \in \alpha \cap \alpha'$, подразумевая, что произведение берется по всем ребрам, принадлежащим одновременно обоим циклам (с аналогичным соглашением в случае симметрической разности). Если два цикла не имеют общих рёбер, соответствующие индикаторы независимы.

Используя (A3), мы можем оценить эту условную ковариацию снизу:

$$\operatorname{cov}\big(Y_\alpha, Y_{\alpha'}|W\big) \geqslant$$

$$\geqslant c_1^{2k-1} \prod_{(i,j)\in\alpha\triangle\alpha'} W_iW_j \prod_{(i,j)\in\alpha\cap\alpha'} W_iW_j - c_2^{2k} \prod_{(i,j)\in\alpha\triangle\alpha'} W_iW_j \prod_{(i,j)\in\alpha\cap\alpha'} W_i^2W_j^2.$$

Здесь мы взяли максимально возможную степень c_1 в уменьшаемом, так как $c_1 \leqslant 1$. Степень c_2 в вычитаемом совпадает с числом ребер в соответствующем произведении и всегда равна $2k$.

Степень каждого W_i в произведении

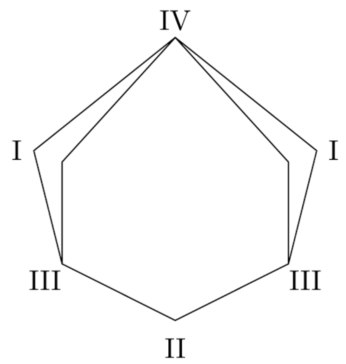
$$\prod_{(i,j)\in\alpha\triangle\alpha'} W_iW_j \prod_{(i,j)\in\alpha\cap\alpha'} W_iW_j \tag{2}$$

равна степени вершины i в $\alpha \cup \alpha'$. Соответственно, степень W_i в произведении

$$\prod_{(i,j)\in\alpha\triangle\alpha'} W_iW_j \prod_{(i,j)\in\alpha\cap\alpha'} W_i^2W_j^2 \tag{3}$$

равна сумме степеней вершины i в α и α'.

Далее мы хотим перейти от произведений по всем рёбрам к произведениям по вершинам циклов. В данном представлении мы можем разбить все вершины двух циклов на четыре непересекающихся группы. На рисунке ниже в качестве примера изображена пара циклов длины 6, в которой присутствуют и обозначены все четыре типа. В первую группу (I) отнесем вершины, соединяющие ровно два ребра, которые принадлежат лишь одному из циклов. Для вершин из этой группы степень соответствующего веса W_i будет равна двум и для (2), и для (3). Во вторую группу (II) отнесём вершины, соединяющие ровно два являющихся общими для обоих циклов ребра. Для них степень W_i будет равняться двум для (2) и четырём для (3). В третью группу (III) отнесём вершины, соединяющие ровно три ребра, из которых одно общее для обоих циклов. Для таких вершин степень W_i будет равняться трём для (2) и четырём для (3). Наконец, в последнюю группу (IV) отнесём вершины, принадлежащие обоим циклам, но не общим рёбрам циклов (точки касания). Для вершин из этой группы степень веса W_i будет равна четырём и для (2), и для (3).



В силу независимости и одинаковой распределённости W_i математические ожидания (2) и (3) будут равняться произведениям моментов W_i. Обозначим число вершин, принадлежащих $s-$й группе в данной фикисрованной паре циклов через l_s, $\quad s = 1, 2, 3, 4$. Тогда

$$\mathbb{E}\mathrm{cov}\big(Y_\alpha, Y_{\alpha'}|W\big) \geqslant m_2^{l_1} m_4^{l_4}(c_1^{2k-1} m_3^{l_3} m_2^{l_2} - c_2^{2k} m_4^{l_2+l_3}) \geqslant \\ \geqslant m_2^{l_1+2l_4}(c_1^{2k-1} m_3^{l} - c_2^{2k} m_4^{l}) \geqslant m_2^{2(k-2)} \min_{2\leqslant l\leqslant k}(c_1^{2k-1} m_3^{l} - c_2^{2k} m_4^{l}) = \rho. \quad (4)$$

Здесь $l = l_2 + l_3$ — число вершин, входящих в общие ребра двух циклов. Во втором неравенстве в цепочке выше мы использовали тот факт, что $m_2 \geqslant m_3$ (невозрастание моментов вытекает из того, что W_i принадлежат $(0, 1)$ почти наверное) и неравенство $m_4 \geqslant m_2^2$.

Теперь мы оценим снизу выражение

$$b_n = \mathbb{E}\,\mathbf{Var}(\sum_{\alpha\in I(k)} Y_\alpha|W) = \mathbb{E}\sum_{\alpha,\alpha'\in I(k)} \mathrm{cov}(Y_\alpha, Y_{\alpha'}|W) = \sum_{\alpha,\alpha'\in I(k)} \mathbb{E}\,\mathrm{cov}(Y_\alpha, Y_{\alpha'}|W) \quad (5)$$

(начиная с некоторого минимального n, которое определим позже).

Для оценки последней суммы в (5) необходимо проанализировать число пар (α, α') с ненулевыми усреднёнными ковариациями. Это означает, что α и α' должны иметь хотя бы одно общее ребро. Можно рассмотреть число пар, в которых два множества вершин имеют ровно l общих элементов (l принимает значения от 2 до k), причём все общие вершины принадлежат общим рёбрам. Для каждого такого l соответствующее число слагаемых в сумме (5) представляет из себя некоторый многочлен от n, причем наибольший порядок (n^{2k-2}, как мы сейчас убедимся) соответствует случаю $l = 2$: α и α' имеют ровно две общие вершины, соединённые ребром. Число таких слагаемых равняется

$$C_n^2(n-2)_{k-2}(n-k)_{k-2} = \frac{n(n-1)...(n-2k+3)}{2},$$

где C_n^2 — число способов выбрать две общие вершины (для определённости, в порядке возрастания), $(n-2)_{k-2}$ — число способов достроить (от одного общего ребра) цикл α и $(n-k)_{k-2}$ — число способов достроить цикл α'. Очевидно, что число слагаемых, в которых два цикла имеют два или более общих ребра, представляет из себя многочлен от n меньшего порядка. Например, число пар циклов, имеющих ровно два общих ребра, равняется $C_1C_n^3C_{n-3}^{k-3}C_{n-k}^{k-3}+C_2C_n^2C_{n-2}^2C_{n-4}^{k-4}C_{n-k}^{k-4}$ и является многочленом от n порядка $2k-3$ (здесь C_1, C_2 — некоторые константы, зависящие только от k).

Для двух циклов, имеющих общее ребро, $\mathbb{E}\operatorname{cov}(Y_\alpha, Y_{\alpha'}) \geqslant \rho$ в силу (4). Следовательно,

$$b_n \geqslant \frac{\rho}{2}n^{2k-2} + \rho r_n,$$

где r_n — это многочлен от n порядка строго меньше $2k-2$. Полученную нижнюю оценку для b_n можно переписать в следующем виде:

$$b_n \geqslant C\rho n^{2k-2} + (1/2 - C)\rho n^{2k-2} + \rho r_n.$$

Здесь мы можем выбрать произвольно значение $C \in (0, \frac{1}{2})$. Многочлен $(\frac{1}{2} - C)n^{2k-2} + r_n \geqslant 0$ для всех $n \geqslant n_k$, где n_k — минимальное натуральное число, превышающее наибольший корень этого многочлена. Заметим, что чем ближе к $\frac{1}{2}$ мы выберем C (что улучшает доказываемую оценку), тем большим будет значение n_k. Например, для $k = 3$ (число треугольников) можно взять $C = \frac{1}{6}$ и получить $n_3 = 7$. Заметим также, что последняя оценка имеет место не только при $n \geqslant n_k$, но и при всех других n для которых соответствующий многочлен неотрицателен.

Итак, для $n \geqslant n_k$, мы получили подходящую оценку снизу:

$$b_n \geqslant C\rho n^{2k-2}. \tag{6}$$

Тем самым, Лемма 1 доказана.

Доказательство Теоремы

Теперь мы оценим сверху $\mathbb{E}R_n^{2m}$. Эта часть доказательства в основном повторяет [4]. Обозначим

$$\tilde{Y}_\alpha = Y_\alpha - \mathbb{E}Y_\alpha.$$

$$\mathbb{E}R_n^{2m} = b_n^{-m} \sum_{\alpha_s \in I(k)} \mathbb{E}\tilde{Y}_{\alpha_1}...\tilde{Y}_{\alpha_{2m}}. \tag{7}$$

Зафиксируем слагаемое в этой сумме. Оно отлично от нуля если каждый цикл α_s из смешанного момента $\mathbb{E}\tilde{Y}_{\alpha_1}...\tilde{Y}_{\alpha_{2m}}$ имеет хотя бы одно общее ребро с одним или несколькими другими циклами в этом смешанном моменте. В противном случае, в силу условной независимости возникает множитель $\mathbb{E}(\tilde{Y}_{\alpha_s}|W)$, который зануляет данное слагаемое. Заметим, что $|\tilde{Y}_{\alpha_s}| \leqslant 1$ почти наверно для всех α. Оценим сверху число ненулевых слагаемых в (7).

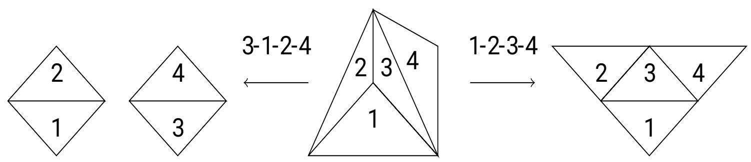
Сначала получим нужную оценку для случая

$$m \leqslant \frac{n(n-1)}{8}. \tag{8}$$

Наша цель - оценить сверху количество ненулевых слагаемых, то есть таких, в которых каждый из циклов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}\}$ имеет хотя бы одно общее ребро с одним или несколькими из остальных циклов в этом наборе. Для того, чтобы получить такую оценку, мы сначала определённым образом разобъём на классы как рёбра, так и сами циклы в каждом таком наборе. Сразу поясним, что такое разбиение на классы не единственно, нас интересует лишь тот факт, что оно осуществимо.

Сначала выделим в списке всех рёбер, имеющихся в наборе циклов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}\}$ те, что повторяются в разных циклах. Назовём эти ребра “общими”, а остальные ребра назовём “произвольными”. Далее, часть рёбер из числа “общих” мы переведем в список “произвольных.” Во-первых, если два цикла имеют более одного общего ребра, то в списке “общих” оставим лишь одно (любое) из них (переведя остальные в список “произвольных”). Таким образом, два любых цикла из нашего набора имеют не более одного “общего” ребра. Теперь последовательно пройдемся по всем циклам нашего набора. “Текущий” цикл α_s может иметь нескольких “соседей” (циклов, имеющих “общее” ребро с α_s). Если “сосед” имеет ещё и “общее” ребро с каким-то другим циклом, то его “общее” ребро с циклом α_s также переведём в список “произвольных”, если только это не последнее “общее” ребро цикла α_s. После того, как мы пройдемся по всем циклам нашего набора, назовем “центрами” (циклами первого типа) те циклы, у которых осталось более одного “общего” ребра и назовём “лепестками” (циклами второго типа) циклы, имеющие “общее” ребро с центром. Заметим, что “центры” не могут иметь “общих” рёбер друг с другом. Таким образом, мы разбили все рёбра на два типа — “общие” и “произвольные”, а все циклы из набора на три типа - “центры”, “лепестки” и остальные (все циклы третьего типа делятся на непересекающиеся кластеры, в каждом из которых все циклы имеют ровно одно “общее” ребро). Разбиение рёбер и циклов на типы зависит от того, какое именно из нескольких общих рёбер двух циклов мы оставляли в списке “общих”, а также от того, в каком порядке мы шли по циклам нашего набора, также убирая некоторые рёбра из списка “общих”.

Следующий пример иллюстрирует два различных способа классифицировать четыре треугольника. В зависимости от порядка, в котором мы рассматриваем эти треугольники, мы можем получить “центр” с тремя “лепестками” (три “общих” ребра) либо же два кластера, в каждом из которых будет два цикла третьего типа (два “общих” ребра):



Дальнейшая оценка имеет место для любого такого разбиения на типы.

Теперь введём некоторые обозначения. Обозначим буквой l число рёбер в списке “общих”, буквой s число циклов-центров, буквой Q число “общих” рёбер, принадлежащих “центрам”. Так как каждый “центр” имеет не менее двух “лепестков” (а значит, не менее двух ребер из указанных Q “общих”), то верны следующие соотношения:

$$0 \leqslant 2s \leqslant Q \leqslant l \leqslant 2m, \quad 3s \leqslant 2m.$$

Кроме того, заметим, что совокупное количество циклов первого и второго типов (”центров” и “лепестков”) не может быть меньше, чем $s+Q$, а число подграфов третьего типа не меньше, чем $2(l-Q)$ (так как каждое ребро из l “общих”, не входящее в Q принадлежщих “центрам”, содержится как минимум в двух подграфах третьего типа). Таким образом, $2m \geqslant s+Q+2(l-Q)$, откуда с учётом $Q \geqslant s$ имеем

$$m \geqslant s + l - Q. \tag{9}$$

Теперь мы собираемся оценить сверху число ненулевых слагаемых в (7) при фиксированных l, s, Q, а затем просуммировать по все возможным значениям l, s, Q.

Нам понадобится следующая техническая

Лемма 2. Пусть $t_1, ..., t_l$ — неотрицательные целые числа, такие что $t_1 + ... + t_l = u \geqslant l$. Тогда

$$\frac{u!}{t_1!...t_l!} \leqslant l! l^{u-l}.$$

Доказательство. Полиномиальный коэффициент в левой части доказываемого неравенства достигает своего наибольшего значения при фкисированном u в случае, когда все t_i совпадают, либо (если u не делится на l) отличаются друг от друга не более, чем на единицу.

Обозначим $\lfloor x \rfloor$ целую часть x, и пусть

$$j = u - \left\lfloor \frac{u}{l} \right\rfloor \cdot l.$$

Тогда максимум выражения $\frac{u!}{(t_1!...t_l!)}$ по $t_1, ..., t_l$ при условии $t_1+...+t_l = u \geqslant l$ равняется

$$\frac{u!}{\Big(\big(\lfloor (u)/l \rfloor + 1\big)!\Big)^j \Big(\lfloor (u)/l \rfloor !\Big)^{l-j}}. \qquad (10)$$

Заметим, что

$$u! = l! \prod_{i=1}^{j} (i+l)(i+2l) \cdot \ldots \cdot \big(i + \lfloor u/l \rfloor l\big) \prod_{i=j+1}^{l} (i+l)(i+2l) \cdot \ldots \cdot \big(i + \big(\lfloor u/l \rfloor - 1\big) l\big)$$

$$\leqslant l! \prod_{i=1}^{j} \Big(l^{\lfloor u/l \rfloor} \big(\lfloor u/l \rfloor + 1\big)! \Big) \prod_{i=j+1}^{l} \Big(l^{\lfloor u/l \rfloor - 1} \lfloor u/l \rfloor ! \Big) =$$

$$= l! l^{u-l} \Big(\big(\lfloor u/l \rfloor + 1\big)!\Big)^j \Big(\lfloor u/l \rfloor !\Big)^{l-j},$$

следовательно, максимум выражения в (10) не превышает $l!l^{u-l}$. □

Число способов выбрать вершины и рёбра для s “центров” не превышает $((n)_k/(2k))^s$ и может быть оценено сверху числом

$$\left(\frac{n^k}{2k}\right)^s. \qquad (11)$$

Число способов выбрать, какие именно из $2m$ циклов в наборе $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}\}$ окажутся “центрами” равняется

$$C_{2m}^s. \qquad (12)$$

Теперь выберем “общие” рёбра, принадлежащие “центрам”. Для этого оценим число способов представить Q в виде $Q = q_1 + \ldots + q_s$, где $q_i \geqslant 2$ — число “лепестков” i–го “центра”. Количество способов разбить натуральное Q на s целых слагаемых, каждое из которых не меньше двух, равняется $C_{Q-2s+(s-1)}^{s-1}$ и оценивается числом

$$2^{Q-s-1}. \qquad (13)$$

Заметим, что число способов выбрать для каждого "центра" среди его k рёбер q_i "общих" оценивается следующим выражением:

$$\sum_{q_1+\ldots+q_s=Q}\prod_{i=1}^{s}C_k^{q_i}. \tag{14}$$

Количество способов выбрать "общие" рёбра, которые содержатся в циклах третьего типа, равняется $C_{n(n-1)/2-Q}^{l-Q}$ и может быть оценено сверху величиной

$$\frac{n^{2l-2Q}}{2^{l-Q}(l-Q)!}. \tag{15}$$

Далее оценим число способов разбить циклы второго и третьего типов на l непересекающихся групп (по группе на каждое из l "общих" рёбер). Число циклов в каждой группе обозначим $t_i, i=1,\ldots l$. При этом из кратностей "общих" рёбер t_i ровно Q штук не меньше единицы (те, что соответствуют второму типу), а остальные $l-Q$ штук не меньше двух (каждое из этих рёбер входит как минимум в два подграфа третьего типа). Число способов выбрать возможные значения $t_1,\ldots,t_l$ и разбить $2m-s$ циклов на группы соответствующих кратностей равняется

$$C_{2m-s-l+Q-1}^{l-1}\frac{(2m-s)!}{t_1!\ldots t_l!}$$

и оценивается сверху выражением

$$2^{2m-s-l+Q-1}l!l^{2m-s-l} \tag{16}$$

в силу Леммы 2 и того факта, что $C_a^b\leqslant 2^a$. Мы уже пользовались этим фактом в (13).

Наконец, остается оценить число способов достроить каждое из этих $2m-s$ рёбер до цикла. Нам подойдет оценка

$$(n^{k-2})^{2m-s}. \tag{17}$$

Перемножая теперь все выписанные выражения (11-17), мы получаем оценку сверху для числа ненулевых слагаемых в (7) в виде

$$\sum_{s,l,Q}\sum_{q_1+\ldots+q_s=Q}\prod_{i=1}^{s}C_k^{q_i}\;2^{2m-2s+3Q-2l-2}n^{2m(k-2)+2s+2(l-Q)}C_{2m}^{s}l^{2m-s-l}\frac{l!}{(2k)^s(l-Q)!}$$

Учитывая тот факт, что $\frac{l!}{(l-Q)!}\leqslant l^Q$, $Q\leqslant l$ и нормировку в (6), получаем верхнюю оценку

$$\mathbb{E}R_n^{2m}\leqslant\sum_{s,l,Q}C_{2m}^{s}\left(\sum_{q_1+\ldots+q_s=Q}\prod_{i=1}^{s}C_k^{q_i}\right)2^{2m-2}\frac{1}{C^m\rho^m(2k)^s}\left(\frac{4l}{n^2}\right)^{m-s-l+Q}l^m.$$

Используя неравенство (8) (из которого следует $4l \leqslant 8m \leqslant n^2$) и (9), получаем

$$\left(\frac{4l}{n^2}\right)^{m-s-l+Q} \leqslant 1.$$

Теперь, используя неравенства

$$\sum_Q \sum_{q_1+\ldots+q_s=Q} \prod_{i=1}^{s} C_k^{q_i} \leqslant 2^{ks}, \ \sum_s C_{2m}^s \leqslant 2^{2m},$$

$$\left(\frac{2^k}{2k}\right)^s \leqslant \left(\frac{2^{k-1}}{k}\right)^{2m/3},$$

имеем

$$\mathbb{E}R_n^{2m} \leqslant \frac{2^{4m-2+2m(k-1)/3}}{C^m \rho^m k^{2m/3}} \sum_l l^m.$$

Теперь воспользуемся оценкой

$$\sum_{l=1}^{2m} l^m \leqslant \int_0^{2m+1} t^m dt = \frac{1}{m+1}(2m+1)^{m+1} = \frac{2m+1}{m+1}(2m+1)^m$$

$$\leqslant 2 \cdot (2m)^m \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^m \leqslant 2\sqrt{e}(2m)^m < 2^2(2m)^m.$$

Окончательно,

$$\mathbb{E}R_n^{2m} \leqslant \frac{2^{4m+2m(k-1)/3}}{k^{2m/3} C^m \rho^m}(2m)^m = C_0^{2m}(2m)^m, \tag{18}$$

где

$$C_0 = \frac{2^{2+(k-1)/3}}{k^{1/3}(C\rho)^{1/2}}.$$

Полученная оценка для произвольного степенного момента чётного порядка позволяет предъявить и оценку для хвоста распределения R_n. Соответствующее известное рассуждение можно найти, например, в [1] (Лемма 1, Замечание 1):

Лемма 3. *Пусть ζ - произвольная случайная величина с конечными степенными моментами любого порядка $r \geqslant 0$, причём*

$$\mathbf{E}|\zeta|^r \leqslant AC_o^r r^{r/2} \quad \text{для всех натуральных } r,$$

где константы $A \geqslant 1$ и $C_o > 0$ не зависят от r. Тогда при всех $x \geqslant 0$ имеет место следующая оценка:

$$\mathbf{P}(|\zeta| \geqslant x) \leqslant Ae^{-\frac{1}{2e}(x/C_o)^2}.$$

Мы воспользуемся этим утверждением, положив $\zeta = R_n$, $A = 1$, и $r = 2m$, и получим следующее неравенство:

$$\mathbb{P}(|R_n| > x) \leqslant \exp\left\{-\frac{C\rho k^{2/3}x^2}{2^{5+2(k-1)/3}e}\right\}.$$

Еще раз напомним, что это неравенство доказано для $n \geqslant n_k$, где n_k тем больше, чем ближе к $\frac{1}{2}$ мы выберем величину C. Значение n_k может быть вычислено для определённых k and C. Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность профессору И. С. Борисову за ценные советы и замечания.

Список литературы

1. *Борисов И. С., Быстров А. А.* Экспоненциальные неравенства для распределений канонических процессов частичных кратных сумм // *Теория вероятностей и её применения.* 2019. Т. 64, № 2. С. 209–227.

2. *Логачёв А. В., Могульский А. А.* Экспоненциальные неравенства Чебышева для случайных графонов и их применение // *Сиб. матем. журн.* 2020. Т. 61, № 4. С. 880–900.

3. *S.G. Bobkov, M.A. Danshina, and V.V. Ulyanov.* Rate of convergence to the Poisson law of the number of cycles in the generalized random graphs. I // *Operator Theory & Harmonic Analysis, OTHA 2020. Springer Proc. in Math. and Statist.* 2021. V. 358. P. 109–132.

4. *A.A.Bystrov, N.V.Volodko.* Exponential Inequalities for the Distribution Tails of the Number of Cycles in the Erdös-Rényi Random Graphs // *Siberian Adv. Math.* 2022. V. 32, N 2. P. 87–93.

5. *A.A.Bystrov, N.V.Volodko.* Exponential inequalities for the number of subgraphs in the Erdös-Rényi random graph // *Statist. Probab. Lett.* 2023. V. 195.

6. *Chatterjee S.* The missing log in large deviations for triangle counts // *Random Structures Algorithms.* 2011. V. 40, N 4. P. 437–451.

7. *Chatterjee S. and Varadhan S.R.S.* The large deviation principle for the Erdös-Rényi random graphs // *European J. Combin.*. 2011. V. 32, N 7. P. 1000–1017.

8. *DeMarco B. and Kahn J.* Upper tails for triangles // *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*. 2012. V. 40, N 4. P. 452–459.

9. *Erdös P. and Rényi A.* On the evolution of random graphs // *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*. 1960. V. 5. P. 38–82.

10. *Höffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables // *J. Amer. Statist. Assoc.* 1963. V. 58. P. 13–30 .

11. *Janson S., Oleszkiewicz K. and Ruciński A.* Upper tails for subgraph counts in random graphs // *Israel J. Math.* 2004. V. 142. P. 61–92.

12. *Kim J.H. and Vu V.H.* Divide and conquer martingales and the number of triangles in a random graph // *Random Structures Algorithms.* 2004. V. 24, № 2. P. 166–174.

13. *Liu Q.and Dong Z.* Limit laws for the number of triangles in the generalized random graphs with random node weights // *Statist. Probab. Lett.* 2020. V. 161, № 1. P. 1–6.

14. *Ruciński A.* When are small subgraphs of a random graph normally distributed? // *Probab. Theory Related Fields* 1988. V. 78, № 1. P. 1–10.

Быстров Александр Александрович
Новосибирский гос. университет
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `a.bystrov@g.nsu.ru`.
Володько Надежда Владимировна
Институт математики,
им. С.Л.Соболева СОРАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: `nvolodko@gmail.com`.

Поступила в редакцию
21 июня 2023 г.
Получена после доработки
23 июля 2023 г.
Принята к публикации
5 октября 2023 г. г.