УДК 517.518.23, 517.518.83, 519.651 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.203 2023, том 26, № 2, 44-61

# ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА

*В. Л. Васкевич, И. М. Тургунов*

Задача поиска оптимальных среди всевозможных квадратурных формул для криволинейных интегралов первого рода, точных на тождественно постоянных функциях, сведена к задаче минимизации квадратичной формы с симметрической положительно определенной матрицей от большого числа переменных. Доказано, что минимум этой целевой квадратичной функции существует и достигается в единственной точке многомерного пространства. Тем самым доказано существование единственной при заданном множестве узлов оптимальной квадратурной формулы по замкнутому гладкому контуру, то есть формулы с наименьшей нормой функционала погрешности в сопряженном пространстве. Веса искомой весовой оптимальной квадратурной формулы, как показано, являются решением специальной невырожденной системы линейных алгебраических уравнений.

*Ключевые слова и фразы*: квадратурная формула, функционал погрешности, пространство Соболева на замкнутой кривой, константа и функция вложения, оптимальная формула.

## Введение

Пусть на плоскости с декартовыми координатами $(x, y)$ задана область $S$, ограниченная замкнутой гладкой кривой $(L)$ конечной длины $|L|$. По границе области $S$, то есть по кривой $(L)$, взят криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{(L)} f(x, y)\, dl$$

от непрерывной на кривой $(L)$ подынтегральной функции $f(x, y)$.

Предполагается, что начало координат лежит внутри области $S$ вместе с кругом, имеющем центр в начале и положительный радиус $R_1$. Сама же область $S$ расположена внутри другого круга также с центром в начале и положительного радиуса $R_2$, $R_2 > R_1$. При этом любой луч, выходящий из

---

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008)

начала, пересекает границу области $S$, то есть кривую $(L)$, в единственной точке.

На кривой $(L)$ рассматриваются квадратурные формулы вида

$$\frac{1}{|L|}\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl \cong \sum_{j=0}^{N-1} c_j f(x_j,y_j), \tag{1}$$

где $|L|$ — не равная нулю длина кривой, а точки $(x_j,y_j)$, $j=0,1,2,...N-1$, лежат на кривой интегрирования $(L)$ и задают узлы формулы. Веса $c_j$ формулы подчинены условию

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j = 1. \tag{1'}$$

В частности, условие (1') означает, что рассматриваемые здесь квадратурные формулы точны на тождественно постоянных функциях.

Разность между интегралом в левой части приближенного равенства (1) и квадратурной суммой в его правой части определяет линейный функционал погрешности [1,2]

$$(l_N,f) = \frac{1}{|L|}\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl - \sum_{j=0}^{N-1} c_j f(x_j,y_j), \quad \forall\, f\in C(L). \tag{2}$$

Область действия этого функционала — это все пространство $C(L)$ непрерывных на кривой $(L)$ функций.

С точки зрения теории приближений интересно знать, как ведет себя погрешность квадратурной формулы в зависимости от числа $N$ узлов формулы, от свойств гладкости подынтегральной функции $f$ и от геометрии кривой интегрирования.

Отметим, что определенный равенством (2) функционал погрешности $l_N$ на банаховом пространстве $C(L)$ непрерывных на кривой $(L)$ функций ограничен. При этом

$$\|l_N \mid C^*(L)\| = 1 + \sum_{j=0}^{N-1} |c_j|.$$

Если выполнено условие (1'), то выражение в правой части не может быть меньше 2. Достигается это минимально возможное значение на квадратурной формуле с равными весами.

Пусть априори известно, что подынтегральная функция не просто непрерывна на кривой интегрирования, но и обладает некоторой дополнительной гладкостью. Предположим, что всевозможные функции с такой же гладкостью образуют в $C(L)$ нормированное подпространство $X(L)$, вложенное ограниченно в $C(L)$, то есть такое, что

$$\|f \mid X(L)\| \leq A\|f \mid C(L)\|, \quad \forall\, f \in X(L).$$

Постоянная $A$ в этой оценке конечна. В теории квадратурных формул традиционно рассматриваются следующие две экстремальные задачи [2,3].

**Задача 1**. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\frac{1}{|L|}\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl \cong \sum_{j=0}^{N-1} c_j f(x_j, y_j),$$

*сумма весов которых равна единице, выделить те и только те, функционалы погрешности которых имеют минимальную норму в сопряженном пространстве* $X^*(L)$.

Любая квадратурная формула с минимальным по норме функционалом погрешности называется $X^*(L)$-оптимальной.

**Задача 2**. *Доказать, что оптимальная квадратурная формула в пространстве* $X(L)$ *единственна.*

Цель представленной работы состоит в решении этих двух экстремальных задач в предположении, что банахово пространство $X(L)$ не совпадает со всем пространством $C(L)$ непрерывных функций, а представляет собой некоторое его собственное подпространство. Точнее, в качестве $X(L)$ далее выбираются некоторые аналоги пространств Соболева на единичной окружности [3].

## § 1. Пространства подынтегральных функций

Определим пространство Соболева на окружности $C$ единичного радиуса, лежащей на исходной плоскости. Точка $(x, y)$ принадлежит окружности $C$ тогда и только тогда когда

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad \text{где} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Пусть $f$ — это тригонометрической полином, задаваемый в виде линейной комбинации косинусов и синусов следующим равенством:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\bigl(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\bigr). \tag{3}$$

Лишь конечное число коэффициентов $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$ в этом разложении не равны нулю. Связь этих коэффициентов с полиномом $f$ задается следующими соотношениями:

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Символом $H^s = H^s(C)$, $s > 1/2$, обозначается пополнение множества всех определенных равенством (3) тригонометрических полиномов по норме [4]

$$\|f|H^s(C)\| = \left\{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s}\Big(|a_{k,1}(f)|^2 + |a_{k,2}(f)|^2\Big)\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Любая функция $f = f(\varphi)$ из $H^s$ разлагается в сходящийся по норме (4) тригонометрический ряд.

Пространство $H^s$ является гильбертовым, а скалярное произведение двух его элементов $f$ и $g$ выражается через коэффициенты их разложений в тригонометрические ряды следующим образом:

$$(f, g)_s = \frac{1}{4}a_0(f)a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s}\big(a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)\big).$$

Любая функция $f = f(\varphi)$ из $H^s$ при $s > 1/2$ непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, причем максимум значений ее модуля по окружности $C$ допускает оценку

$$\max_{\varphi\in[0,2\pi]} |f(\varphi)| \le A(s)\|f \mid H^s\|. \quad (5)$$

Здесь $A(s)$ — это константа вложения, определяемая следующим равенством [3,5,6]:

$$A(s) = \left\{1 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2s}}\right\}^{1/2}, \quad s > 1/2.$$

Определим теперь пространство $H^s(L)$, состоящее из функций, заданных на исходной кривой интегрирования. С этой целью условимся прежде всего, что радиус круга, содержащего внутри себя исходную область $S$ с границей $L$, равен единице: $R_2 = 1$. Это не ограничит общности проводимых далее рассуждений. Таким образом, кривая интегрирования целиком лежит внутри единичной окружности.

Взяв непрерывную на кривой $L$ функцию $f = f(x, y)$, поставим ей в соответствие функцию $f_+ = f_+(\varphi)$, определенную и непрерывную на единичной окружности $C$. Точнее, выпустив из начала координат луч под углом $\varphi$ к оси абсцисс, $0 \leq \varphi < 2\pi$, найдем его точку пересечения $(x(\varphi), y(\varphi))$ с исходной кривой $L$. По условию, эта точка единственна. Таким образом, получаем следующую циклическую параметризацию кривой интегрирования:

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi. \tag{6}$$

Здесь $r(\varphi)$ — гладкая функция, $R_1 < r(\varphi) < R_2 = 1$. Полагая теперь $f_+(\varphi) = f(x(\varphi), y(\varphi))$, устанавливаем взаимнооднозначное соответствие между пространством непрерывных функций на единичной окружности и пространством $C(L)$. Нормы образа и прообраза при этом соответствии совпадают.

Взяв число $s > 1/2$, введем в рассмотрение пространство $H^s(L)$ подынтегральных функций.

**Определение.** Будем говорить, что непрерывная функция $f(x, y)$ принадлежит пространству $H^s(L)$ тогда и только тогда, когда функция $f_+(\varphi) = f(x(\varphi), y(\varphi))$ принадлежит классу Соболева $H^s(C)$ на единичной окружности.

Норму в линейном пространстве $H^s(L)$ определим равенством

$$\|f(x, y) \mid H^s(L)\| = \|f_+(\varphi) \mid H^s\|. \tag{7}$$

Если кривая интегрирования $L$ совпадает с единичной окружностью, то пространства $H^s(L)$ и $H^s$ также совпадают.

## § 2. Весовое представление функционала погрешности

Преобразуем исходный криволинейный интеграл, используя предложенную выше циклическую параметризацию (6) контура интегрирования.

Заметим, что расстояние от начала координат до точки $(x(\varphi), y(\varphi))$ равно $r(\varphi)$. При этом для каждого из узлов $(x_j, y_j)$ рассматриваемой квадратурной формулы найдется свой угол $\varphi_j$, $0 \leq \varphi_j < 2\pi$, с которым окажутся справедливыми равенства

$$x_j = r(\varphi_j)\cos\varphi_j, \quad y_j = r(\varphi_j)\sin\varphi_j; \quad j = 0, 1, 2, ...N - 1.$$

По условию кривая $L$ гладкая, то есть существует и непрерывна первая производная функции $r(\varphi)$. Следовательно, определена и непрерывна весовая функция

$$p(\varphi) = \sqrt{\big(x'(\varphi)\big)^2 + \big(y'(\varphi)\big)^2}.$$

В результате замены переменных (6) в интеграле $I$ получим следующее равенство:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl = \int\limits_0^{2\pi} p(\varphi) f_+(\varphi)\,d\varphi.$$

Весовая функция $p(\varphi)$ здесь неотрицательна, периодична с периодом $2\pi$ и удовлетворяет нормировочному соотношению

$$\frac{1}{|L|}\int\limits_0^{2\pi} p(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{|L|}\int\limits_{(L)} dl = 1.$$

Представление (2) погрешности $(l_N, f)$ трансформируется в следующее равество

$$\frac{1}{|L|}\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl - \sum_{j=0}^{N-1} c_j f(x_j, y_j) = \frac{1}{|L|}\int\limits_0^{2\pi} p(\varphi) f_+(\varphi)\,d\varphi - \sum_{j=0}^{N-1} c_j f_+(\varphi_j). \quad (8)$$

Здесь $f(x,y)$ — произвольная непрерывная на контуре $L$ функция, а $f_+(\varphi)$ — поставленная ей в соответствие непрерывная функция на единичной окружности. В частности, равенство (8) выполняется для произвольной функции $f(x,y)$ из пространства $H^s(L)$.

Разность в правой части формулы (8) представляет собой действие на функцию $f_+(\varphi)$ следующего линейного функционала

$$(l_N^+, f_+) = \frac{1}{|L|}\int\limits_0^{2\pi} p(\varphi) f_+(\varphi)\,d\varphi - \sum_{j=0}^{N-1} c_j f_+(\varphi_j).$$

Эквивалентная форма этого равенства, использующая символику теории обобщенных функций, имеет вид

$$(l_N^+, f_+) = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{|L|} p(\varphi) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \delta(\varphi - \varphi_j)\Big] f_+(\varphi)\,d\varphi.$$

Здесь $\delta(\varphi)$ обозначает известную дельта-функцию Дирака, а $\delta(\varphi - \varphi_j)$ — это сдвиг этой обобщенной функции. Для непрерывной и неотрицательной весовой функции $p(\varphi)$ линейный функционал погрешности

$$l_N^+(\varphi) = \frac{1}{|L|}p(\varphi) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \delta(\varphi - \varphi_j)$$

ограничен на пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных на отрезке функций.

Из оценки (5) следует, что функционал погрешности $l_N^+$ также линеен и ограничен на пространстве Соболева $H^s$, если только $s > 1/2$. Это означает, что $l_N^+$ принадлежит сопряженному пространству $H^{s*}$.

Как следует из равенств (7) и (8), нормы функционалов погрешности $l_N$ и $l_N^+$ в соответствующих функциональных пространствах совпадают:

$$\|l_N \mid H^{s*}(L)\| = \|l_N^+ \mid H^{s*}\|.$$

## § 3. Экстремальные функции и их нормы

Рассмотрим в этом разделе произвольный линейный функционал погрешности вида

$$l_N^+(\varphi) = \frac{1}{|L|}p(\varphi) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \delta(\varphi - \varphi_j)$$

с гладкой $(2\pi)$-периодической весовой функцией $p(\varphi)$, удовлетворяющей условию

$$\frac{1}{|L|}\int_0^{2\pi} p(\varphi)\, d\varphi = 1.$$

Предположим также, что этот линейный функционал $l_N^+(\varphi)$ точен на любой тождественно постоянной функции, то есть таков, что

$$(l_N^+(\varphi), 1) = 0.$$

Это условие согласуется с нормировочным условием на весовую функцию с помощью следующего ограничения на веса функционала $l_N^+(\varphi)$:

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j = 1.$$

Рассматриваемый функционал $l_N^+(\varphi)$ принадлежит сопряженному пространству $H^{s*}$, $s > 1/2$, тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \Big( |(l_N^+(\varphi), \cos k\varphi)|^2 + |(l_N^+(\varphi), \sin k\varphi)|^2 \Big) < +\infty.$$

При этом тригонометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big( (l_N^+(\psi), \cos k\psi) \cos k\varphi + (l_N^+(\psi), \sin k\psi) \sin k\varphi \Big)$$

сходится к функционалу погрешности $l_N^+(\varphi)$ по норме

$$\|l \mid H^{s*}\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \big( |(l(\varphi), \cos k\varphi)|^2 + |(l(\varphi), \sin k\varphi)|^2 \big) \right\}^{1/2}.$$

Это означает, что для последовательности частичных сумм

$$S_M(\varphi) = \sum_{k=1}^{M} \Big( (l_N^+(\psi), \cos k\psi) \cos k\varphi + (l_N^+(\psi), \sin k\psi) \sin k\varphi \Big)$$

выполняется следующее предельное равенство:

$$\lim_{M \to +\infty} \|l_N^+ - S_M \mid H^{s*}\| = 0.$$

Пространству $H^{s*}$, $s > 1/2$, принадлежит, например, всякая обобщенная функция вида

$$l(\varphi \mid \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \varphi')\, d\varphi', \quad 0 \le \varphi_0 < 2\pi.$$

На произвольную непрерывную на единичной окружности функцию $g = g(\varphi)$ эта обобщенная функция действует по формуле

$$\big( l(\varphi \mid \varphi_0), g(\varphi) \big) = g(\varphi_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi')\, d\varphi',$$

т.е. сравнивает значение функции в точке с ее средним значением по окружности.

Соответствующее обобщенной функции $l(\varphi \mid \varphi_0)$ разложение в ряд по синусам и косинусам записывается в виде следующего равенства:

$$l(\varphi \mid \varphi_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \big( \cos k\varphi_0 \cos k\varphi + \sin k\varphi_0 \sin k\varphi \big) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\cos \omega_0).$$

Здесь $\omega_0 = \varphi - \varphi_0$, а $T_k(t)$ — это полином Чебышева, нормализованный условием $T_k(+1) = 1$. Для полинома $T_k(t)$ выполняется равенство

$$\max_{-1\le t\le 1} |T_k(t)| = T_k(+1) = 1.$$

Экстремальная для $l_N^+(\varphi)$ функция $u_N(\varphi)$ из $H^s$, $s > 1/2$, определяется как функция, удовлетворяющая следующим двум соотношениям [1,7]:

$$\|l_N^+ \mid H^{s*}\|^2 = (l_N^+, u_N) = \|u_N \mid H^s\|^2. \tag{9}$$

Экстремальная для $l_N^+(\varphi)$ функция $u_N(\varphi)$ существует, единственна и ортогональна тождественной постоянной. Ее разложение в ряд по тригонометрическим полиномам имеет вид

$$u_N(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \Big( (l_N^+(\psi), \cos k\psi) \cos k\varphi + (l_N^+(\psi), \sin k\psi) \sin k\varphi \Big). \tag{10}$$

На окружности $C$ функция $u_N(\varphi)$ является решением уравнения

$$\Big(-\frac{d^2}{d\varphi^2}\Big)^s u(\varphi) = l_N^+(\varphi). \tag{11}$$

Если $s$ — это натуральное число, то уравнение (11) является дифференциальным.

Если же $s$ дробное, то уравнение (11) следует понимать как псевдодифференциальное. При этом действие линейного оператора $(-\frac{d^2}{d\varphi^2})^s$ из $H^s$ в $H^{s*}$ вполне определяется последовательностью равенств

$$\begin{aligned} (-\tfrac{d^2}{d\varphi^2})^s \cos k\varphi &= k^{2s} \cos k\varphi, \\ (-\tfrac{d^2}{d\varphi^2})^s \sin k\varphi &= k^{2s} \sin k\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Вопрос существования и единственности решения операторного уравнения (11) рассматривается в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Пусть функционал $l_N^+(\varphi)$ из $H^{s*}$, $s > 1/2$, принимает нулевые значения на тождественно постоянных функциях, то есть $(l_N^+(\varphi), 1) = 0$. Тогда существует единственное решение краевой задачи*

$$\Big(-\frac{d^2}{d\varphi^2}\Big)^s u(\varphi) = l_N^+(\varphi), \quad u(\varphi) \in H^s, \quad \int_0^{2\pi} u(\varphi) d\varphi = 0, \tag{13}$$

*которое совпадает с экстремальной для $l_N^+(\varphi)$ функцией $u_N(\varphi)$.*

*Доказательство.* Как уже отмечалось выше, сумма тригонометрического ряда

$$u_N(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \Big( (l_N^+(\psi), \cos k\psi) \cos k\varphi + (l_N^+(\psi), \sin k\psi) \sin k\varphi \Big)$$

удовлетворяет операторному уравнению

$$\Big( -\frac{d^2}{d\varphi^2} \Big)^s u(\varphi) = l_N^+(\varphi).$$

Эта же функция, как следует из ее определения, принадлежит пространству Соболева $H^s$ и при этом ортогональна в этом же гильбертовом пространстве тождественно единичной функции.

Таким образом, рассматриваемая функция $u_N(\varphi)$ удовлетворяет всем требуемым условиям, то есть решение задачи (13) заведомо существует.

Пусть теперь функция $u(\varphi)$ из пространства $H^s$ является решением задачи (13). Тогда из уравнения (11) и равенств (12) следует, что ее разложение в тригонометрический ряд с необходимостью имеет вид

$$u(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \Big( (l_N^+(\psi), \cos k\psi) \cos k\varphi + (l_N^+(\psi), \sin k\psi) \sin k\varphi \Big).$$

Следовательно, $u(\varphi)$ совпадает с экстремальной для $l_N(\varphi)$ функцией $u_N(\varphi)$.

Экстремальная для $l_N^+(\varphi)$ функция единственна. Произвольное решение краевой задачи (13), как доказано, совпадает с этой экстремальной функцией. Следовательно, решение краевой задачи (13) также единственно. □

Рассмотрим следующую функцию переменной $t$, где $-1 \le t \le 1$:

$$u(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} T_k(t). \tag{14}$$

Здесь $T_k(\cdot)$ — это полином Чебышева, нормированный условием $T_k(+1) = 1$. Как известно, $T_k(\cos\varphi) = \cos k\varphi$.

Ряд в правой части равенства (14) при $s > 1/2$ сходится абсолютно и равномерно на отрезке $-1 \le t \le 1$:

$$\Big| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} T_k(t) \Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} < +\infty.$$

Полагая $\omega_j = \varphi - \varphi_j$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$, преобразуем следующую линейную комбинацию:

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j u(\cos\omega_j) = -\sum_{j=0}^{N-1} c_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} T_k(\cos\omega_j) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \Big( \sum_{j=0}^{N-1} c_j T_k(\cos\omega_j) \Big).$$

Заметив, что

$$T_k(\cos\omega_j) = \cos k\omega_j = \cos k\varphi_j \cos k\varphi + \sin k\varphi_j \sin k\varphi,$$

получаем при $k = 1, 2, \ldots$ следующие соотношения:

$$-\sum_{j=0}^{N-1} c_j T_k(\cos\omega_j) = (-\sum_{j=0}^{N-1} c_j \cos k\varphi_j) \cos k\varphi + (-\sum_{j=0}^{N-1} c_j \sin k\varphi_j) \sin k\varphi.$$

Но в соответствии с обозначениями справедливы равенства

$$-\sum_{j=0}^{N-1} c_j \cos k\varphi_j = (l_N^+, \cos k\psi), \quad -\sum_{j=0}^{N-1} c_j \sin k\varphi_j = (l_N^+, \sin k\psi).$$

Таким образом, имеем

$$-\sum_{j=0}^{N-1} c_j T_k(\cos\omega_j) = (l_N^+, \cos k\psi) \cos k\varphi + (l_N^+, \sin k\psi) \sin k\varphi.$$

Далее получаем

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j u(\cos\omega_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} \Big( (l_N^+, \cos k\psi) \cos k\varphi + (l_N^+, \sin k\psi) \sin k\varphi \Big).$$

Сумма тригонометрического ряда в правой части полученного равенства совпадает с функцией $u_N(\varphi)$, экстремальной для функционала погрешности $l_N^+$.

Доказано таким образом, что экстремальную функцию $u_N(\varphi)$ возможно представить следующей линейной комбинацией:

$$u_N(\varphi) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j u(\cos(\varphi - \varphi_j)). \tag{15}$$

Здесь функция $u(t)$ определена выше равенством (14) как сумма ряда

$$u(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} T_k(t).$$

Вместе с функцией $u(t)$ используем далее ей противоположную, которую обозначим как $G(t)$, то есть полагаем

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} T_k(t) = -u(t). \tag{16}$$

Функция $G(\cos\varphi)$ является для оператора $\left(-\frac{d^2}{d\varphi^2}\right)^s$ *функцией Грина*:

$$\left(-\frac{d^2}{d\varphi^2}\right)^s G(\cos\varphi) = \left(-\frac{d^2}{d\varphi^2}\right)^s \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k(\cos\varphi)}{k^{2s}}\right) =$$

$$= \left(-\frac{d^2}{d\varphi^2}\right)^s \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k^{2s}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi = \delta(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \varphi')\, d\varphi'.$$

Воспользуемся определением экстремальной функции $u_N$, в соответствии с которым справедливо равенство

$$\|l_N^+ \mid H^{s*}\|^2 = (l_N^+, u_N).$$

Подставив сюда найденное представление $u_N$ в виде линейной комбинации (15), получим для квадрата нормы функционала погрешности следующую ключевую формулу:

$$\|l_N^+ \mid H^{s*}\|^2 = \sum_{i,j=0}^{N-1} c_i c_j G(\cos\omega_{ij}). \tag{17}$$

Здесь $\omega_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, а квадратичная форма справа положительно определена.

Элементы матрицы квадратичной формы (17) — это значения $G(\cos\omega_{ij})$ функции Грина. Диагональные элементы этой матрицы, получающиеся при $i = j$, совпадают друг с другом и равны $G(+1)$. Интересно отметить, что с константой вложения $A(s)$ эти диагональные элементы связаны следующим соотношением:

$$G(+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} = \pi\Big(A^2(s) - 1\Big).$$

В силу (10) экстремальная функция $u_N(\varphi)$ следующим образом разлагается в тригонометрический ряд

$$u_N(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(l_N^+, \cos k\psi)\cos k\varphi + (l_N^+, \sin k\psi)\sin k\varphi}{k^{2s}}.$$

Применив функционал $l_N^+$ к обеим частям этого равенства, получим еще одно выражение для квадрата нормы функционал погрешности:

$$\|l_N^+ \mid H^{s*}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(l_N^+, \cos k\varphi)^2 + (l_N^+, \sin k\varphi)^2}{k^{2s}}.$$

В частности, из этого представления следует, что норма функционала погрешности $\|l_N^+ \mid H^{s*}\|$, рассматриваемая как функция гладкости $s$, монотонно убывает.

## § 4. Теорема существования и единственности

Полученное в предыдущем разделе представление квадрата нормы функционала погрешности в виде положительно определенной квадратичной формы (17) от весов исходной формулы позволяет решить обе поставленные во введении экстремальные задачи.

**Теорема 2.** *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\frac{1}{|L|}\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl \cong \sum_{j=0}^{N-1} c_j f(x_j, y_j), \tag{18}$$

*с заданным множеством узлов $(x_j, y_j)$, $j = 0, 1, 2, ...N-1$, лежащих на кривой интегрирования $(L)$, и весами, удовлетворющими условию*

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_j = 1, \tag{19}$$

*существует в точности одна, для которой норма функционала погрешности в пространстве $H^{s*}(L)$, $s > 1/2$, принимает минимально возможное значение.*

*Доказательство.* Зафиксировав на кривой $(L)$ узлы $(x_j, y_j)$, $j = 0, 1, .\,.., N-1$, заметим, что функционал погрешности $l_N$ вида (18) с условием (19) имеет в $H^{s*}(L)$ минимальную норму тогда и только тогда когда соответствующий ему весовой функционал погрешности

$$l_N^+(\varphi) = \frac{1}{|L|} p(\varphi) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \delta(\varphi - \varphi_j)$$

имеет минимальную норму в $H^{s*} = H^{s*}(C)$.

Это означает, что составленный из весов формулы вектор $c^0 = (c^0_0, ...,c^0_{N-1})$ доставляет на многообразии $\sum\limits_{j=0}^{N-1} c_j = 1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ минимум квадратичной форме

$$\psi(c) = \sum_{i,j=0}^{N-1} c_i c_j G(\cos\omega_{ij}).$$

Здесь $G(\cos\omega)$ — это введенная равенством (16) функция Грина. Используем стандартный метод Лагранжа поиска условного экстремума в применении к функции $\psi(c)$ переменных $(c_0, c_1, ..., c_{N-1})$.

Приравнивая нулю частные производные вспомогательной функции Лагранжа

$$\psi_1(c,\lambda) = \psi(c) + 2\lambda\Big(1 - \sum_{j=0}^{N-1} c_j\Big),$$

приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N-1} G(\cos\omega_{ij})c_j - \lambda = 0, \quad i = 0,1,...,N-1, \\ \sum\limits_{j=0}^{N-1} c_j = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Пусть $g_{ij} = G(\cos\omega_{ij})$, $G = (g_{ij})$ обозначает квадратную матрицу размеров $N\times N$, а $P$ — это вектор-строка длины $N$ с единичными элементами. Тогда матричный вид системы (20) следующий:

$$\begin{pmatrix} G & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad Q\begin{pmatrix} c \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Здесь $Q$ — это квадратная матрица размеров $(N+1)\times(N+1)$, задаваемая равенством

$$Q = \begin{pmatrix} G & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что эта матрица $Q$ невырождена.

Допустим, что матрица $Q$ вырождена. В этом случае соответствующая (21) однородная система

$$Q\begin{pmatrix} c \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \mu \end{pmatrix} = 0 \tag{22}$$

имеет ненулевое решение $\begin{pmatrix} c_* \\ \mu_* \end{pmatrix}$. При этом $c_* = (c_0^*, \dots, c_{N-1}^*) \neq (0, \dots, 0)$ (иначе и $\mu_* = 0$, то есть решение тривиально, что противоречит его выбору).

Далее, рассмотрим соответствующий ненулевому вектору весов $c_*$ функционал погрешности нуля

$$m_N(\varphi) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^* \delta(\varphi - \varphi_j), \quad (c_0^*, \dots, c_{N-1}^0) = c_* \neq 0.$$

Функционал $m_N(\varphi)$ линеен и ограничен на пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных функций.

В силу оценки (5) функционал $m_N(\varphi)$ также линеен и ограничен на пространстве $H^s$, где $s > 1/2$. Учитывая, что $Pc_* = 0$ или, что одно и то же, $\sum\limits_{j=0}^{N-1} c_j^* = 0$, получаем, что действие функционала $m_N(\varphi)$ на тождественно единичную функцию равно нулю.

Следовательно, экстремальная для $m_N$ функция $u_N^*(\varphi)$ из гильбертова пространства $H^s$ задается следующей аналогичной равенству (15) формулой:

$$u_N^*(\varphi) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^* G(\cos \omega_j), \quad \text{где} \quad \omega_j = \varphi - \varphi_j. \tag{23}$$

Первые $N$ уравнений системы (21) с учетом представления (23) позволяют следующую эквивалентную запись:

$$u_N^*(\varphi_j) + \mu_* = 0, \quad j = 0, ..., N-1.$$

Таким образом, значения экстремальной функции $u_N^*(\varphi)$ в точках $\varphi_j$ совпадают друг с другом:

$$u_N^*(\varphi_i) = u_N^*(\varphi_j) = -\mu_*, \quad i, j = 0, ..., N-1.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\|u_N^* \mid H^s\|^2 = (m_N, u_N^*) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^* u_N^*(\varphi_j) = -\mu_* \sum_{j=0}^{N-1} c_j^*.$$

Последнее $(N+1)$-е уравнение системы (22) имеет вид $\sum_{j=0}^{N-1} c_j^* = 0$ и поэтому норма $\|u_N^* \mid H^s\|$ равна нулю. Это возможно лишь тогда, когда функция $u_N^*(\varphi)$ тождественно нулевая. Получили противоречие, доказывающее, что однородная система (22) может иметь только тождественно нулевое решение.

Таким образом, матрица $Q$ невырождена и система (22) имеет единственное решение. Это решение нетривиально. Обозначим его как $(c^{(0)}, \lambda^{(0)})$.

Точка $(c^{(0)}, \lambda^{(0)})$ — стационарная для функции $\psi_1(c, \lambda)$ (по определению). Других стационарных точек у функции $\psi_1(c, \lambda)$ нет. Убедимся, что $c^{(0)}$ при этом доставляет минимум функции $\psi(c)$ на множестве векторов $c$, удовлетворяющих дополнительному условию $\sum\limits_{j=0}^{N-1} c_j = 1$.

С этой целью рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(c) = \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial c_i \partial c_j}(c^{(0)}, \lambda^{(0)}) c_i c_j = 2 \sum_{i,j=0}^{N-1} G(\cos \omega_{ij}) c_i c_j$$

и докажем, что эта форма положительно определена на подпространстве векторов $c$, удовлетворяющих равенству $\sum\limits_{j=0}^{N-1} c_j = 0$.

Пусть вектор $c = (c_0, ..., c_{N-1})$ — произвольный ненулевой вектор, компоненты которого удовлетворяют условию $\sum\limits_{j=0}^{N-1} c_j = 0$. Рассмотрим соответствующий этому вектору функционал погрешности нуля

$$m_N(\varphi) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \delta(\varphi - \varphi_i), \quad (c_0, \ldots, c_{N-1}) = c \neq 0.$$

Это нетривиальный функционал и поэтому его норма в сопряженном пространстве $\|m_N \mid H^{s*}\|$ строго положительна. Экстремальная для $m_N$ функция $u_N(\varphi)$ из гильбертова пространства $H^s$ задается следующей формулой:

$$u_N(\varphi) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j G(\cos \omega_j), \quad \text{где} \quad \omega_j = \varphi - \varphi_j.$$

При этом справедливы соотношения

$$(m_N, u_N) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j (m_N, G(\cos \omega_j)) = \sum_{i,j=0}^{N-1} c_i c_j G(\cos \omega_{ij}) = \|m_N \mid H^{s*}\|^2 > 0.$$

Таким образом, для произвольного ненулевого вектора $c$, компоненты которого удовлетворяют условию $\sum\limits_{j=0}^{N-1} c_j = 0$, имеем строгое неравенство

$$\Phi(c) = \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial c_i \partial c_j}(c^{(0)}, \lambda^{(0)}) c_i c_j = 2 \sum_{i,j=0}^{N-1} G(\cos \omega_{ij}) c_i c_j > 0.$$

Этого условия достаточно для того, чтобы точка $c^{(0)}$ доставляла строгий минимум функции $\psi(c)$ на множестве векторов $c$, удовлетворяющих дополнительному условию $\sum\limits_{j=0}^{N-1} c_j = 1$.

Таким образом, существование оптимальной в $H^{s*}(L)$ квадратурной формулы доказано. Единственность оптимальной формулы следует из однозначной разрешимости системы линейных уравнений для стационарных точек функции $\psi(c)$. □

## Список литературы

1. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1996.

2. *Васкевич В.Л.* Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53, № 6, С. 1245–1262.

3. Васкевич В. Л. Сферические кубатурные формулы в пространствах Соболева // Сиб.матем.журн. 2017. Т. 58, №3. с. 530–542.

4. *Никольский С.М., Лизоркин П.И.* Приближение сферическими функциями // Тр. МИАН. 1986. Т. 173. С. 181–189.

5. *Васкевич В.Л.* Константы и функции вложения пространств соболевского типа на единичной сфере // Докл. РАН. 2010. Т. 433, № 4. С. 441–446.

6. *Васкевич В.Л.* Константы вложения периодических пространств Соболева дробного порядка // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1019–1027.

7. *Васкевич В.Л.* Экстремальные функции кубатурных формул на многомерной сфере и сферические сплайны // Матем. тр. 2011. Т. 14. № 2. С. 14–27.

*Васкевич Владимир Леонтьевич*
Институт математики
им. С.Л.Соболева СОРАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `vask@math.nsc.ru`

Поступила в редакцию
10 октября 2023 г.
Получена после доработки
7 ноября 2023 г.
Принята к публикации
20 ноября 2023 г. г.

*Тургунов Исмоилжон Махаммаджон угли*
Новосибирский гос. универитет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: i.turgunov@g.nsu.ru