

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОВОКУПНОСТИ ИЗЛУЧАЮЩИХ ТОЧЕК ПО ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯМ

Е. Ю. Деревцов

В рамках постановок геометрической томографии, обратных задач фотометрии и волновой оптики и дискретной томографии в работе изучаются вопросы определения пространственного расположения и светимости дискретного распределения излучающих источников по его изображениям, полученным с помощью малого числа оптических систем. Проведен анализ причин возникновения неоднозначности определения геометрических параметров распределения. Установлены критерии единственности решения обратной задачи восстановления дискретного тела, состоящего из некогерентных или монохроматических источников. Предложен конструктивный метод численного решения обратной задачи определения координат и светимостей совокупности излучающих точечных источников по их изображениям.

Ключевые слова и фразы: геометрическая томография, обратная задача оптики, оптическая система, дискретная томография, источник излучения, дискретное распределение, единственность.

§1. Введение и предварительные результаты

Обратная задача физической оптики состоит в определении характеристик излучающих или рассеивающих источников по результатам дистанционных измерений. В математических моделях в рамках схемы “источник - среда - приемник” при изучении прямых задач считаем известными источник и среду, а целью является построение оптического изображения. В обратной задаче по известному семейству изображений требуется определить тип, геометрические и оптические характеристики объекта изучения. Математические модели обратных задач волновой оптики и фотометрии построены в работах [4]–[7]. Там же формализованы и обобщены понятия оптического прибора типа фотоаппарата, введены определения реального (размытого) и идеального (резкого) изображений; исследованы вопросы существования, единственности и устойчивости ряда обратных задач для

источников топологической размерности от нуля до трех. Как правило, использовались веерные или конусные системы наблюдения. Наряду с построением теории были предложены конструктивные методы и алгоритмы решения некоторых прямых и обратных задач волновой оптики [2], [3].

В зависимости от типов источников возможны различные варианты постановок обратных задач оптики. Так, если в качестве подлежащих реконструкции источников, рассеивающих или излучающих, выступают множества точек, части кривых или поверхностей, то обычно используются данные в форме нескольких оптических изображений. Классический пример такого рода постановок — задачи дешифрирования аэрофото- или космических снимков для исследований в рамках тематике фотограмметрии и дистанционного зондирования Земли [10], [11]. В частности, требуется по нескольким изображениям (аэрофото- или космическим снимкам) определить рельеф участка земной поверхности. В обратных задачах фотометрии и волновой оптики, в отличие от томографических постановок, часто достаточно двух или трех изображений для однозначного восстановления формы поверхности, при условии наличия априорной информации о законе, по которому светится или излучает объект, и знания местоположения линии или точки, лежащей на поверхности [4], [7], [8]. Методы исследования обратных задач оптики по определению источников топологической размерности менее трех также принципиально отличаются от методов, используемых при решении задач томографии.

Проблемы единственности решений обратных задач занимают важное место в дистанционных оптических и томографических исследованиях. В работе [9] изучены вопросы решения обратной задачи фотометрии в предположениях однородности среды, сферической симметричности источников и финитности их распределения в \mathbb{R}^n . Так, любого конечного числа изображений может оказаться недостаточно для однозначного определения конечного множества светящихся точек. Именно, для любого конечного множества оптических систем существует распределения светящихся точек, так “заслоняющих” друг друга, что различные распределения точек дают одни и те же изображения на зафиксированном конечном множестве оптических систем. Иными словами, — если допустить возможность отрицательной светимости точечных источников, — это означает существование оптических распределений-невидимок, которые состоят из конечного числа точек, дающих нулевые изображения, полученные посредством наперед заданного семейства оптических систем. При этом уже счетного числа изображений достаточно для единственности восстановления любого оптического тела [9]. В дальнейшем эти результаты были обобщены на распределения с компактными носителями. Результаты сформулированы и доказаны в рамках томографических постановок как с параллельными,

так и с конусными схемами наблюдения [20], [14].

Возникновение геометрической томографии (ГТ) в конце прошлого века связано с именем Р. Дж. Гарднера (R. J. Gardner), а ее постановки, методы исследований и основные достижения отражены в авторской монографии [15]. Цель ГТ состоит в извлечении информации о геометрическом объекте из данных, полученных путем его ортогонального проектирования на плоскости, либо поперечных сечений плоскостями. По-существу, ГТ — это геометрический аналог хорошо известной компьютерной томографии [12]. ГТ тесно связана с выпуклой и интегральной геометрией, дискретной томографией, разработками в области машинного зрения и робототехники.

Бурное развитие дискретной томографии (ДТ) связано с ее многочисленными практическими приложениями. Ее название связано с именем Л. Шеппа (L. Shepp), который организовал первую конференцию по этой теме (DIMACS Mini-Symposium on Discrete Tomography, September 19, 1994, Rutgers University). Цель дискретной томографии в широком смысле состоит в восстановлении дискретной функции с целочисленными значениями по небольшому количеству ее изображений [16]. В частности, ДТ фокусируется на проблеме восстановления бинарных дискретных функций или конечных подмножеств целочисленной решетки, по небольшому числу их проекций. Дискретная томография тесно связана с другими математическими дисциплинами, а именно с теорией чисел, дискретной математикой, теорией сложности вычислений, комбинаторикой. Дискретная томография обладает обширным списком приложений. Это обработка изображений, электронная микроскопия, нанотехнологии, материаловедение, неразрушающий контроль, медицина. В целом задачи ДТ очень неустойчивы и обладают большой степенью неоднозначности [13], [22].

Вопросы единственности задач вычислительной томографии, — для параллельных систем наблюдения, — исследовались ранее в известных работах [21]–[19]. В первой показано существование функций-невидимок для любого наперед заданного конечного множества проекций. Остальные три работы посвящены исследованию проблемы существования и построения функций-невидимок. Так, предложены конструкции на основе быстро осциллирующих функций. Следует заметить, что результаты, полученные в [20], [14], носят более общий характер.

В настоящей работе, лежащей на стыке геометрической томографии, обратных задач оптики и дискретной томографии, сформулированы условия, выполнение которых гарантирует однозначное определение координат и светимостей конечного множества излучающих по различным законам точек, расположенных в оптически прозрачной трехмерной среде без поглощения и с поглощением. Используется понятие оптической системы

с плоским экраном [4]. Предполагается выполнение условий, при которых справедливо приближение Фраунгофера [1].

1.1. Предварительные сведения. Зададим в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 декартову прямоугольную систему координат. Под оптической системой (ОС) $\mathcal{F} = \{\Sigma, E, W, F\}$ понимается математическая модель прибора типа фотоаппарата [4], [7]. Геометрическая схема ОС включает в себя:

1. параллельные плоскости H (носитель диафрагмы) и E (экран) с лежащей в нем эффективной областью W , расположенные на расстоянии d_1 друг от друга;

2. диафрагму Σ , закрытую тонкой сферической линзой с фокусным расстоянием h , $\frac{1}{h} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d_1}$;

3. единичный вектор n_F , лежащий на оптической оси прибора и направленный в сторону предметного пространства Ω , в котором расположены источники излучения; вектор n_F приложен к центру объектива в точке q .

Точка $w_0 \in W$ такова, что $|q - w_0| = d_0 = \inf_{w \in E} \{|q - w|\}$. Наряду с геометрической схемой ОС содержит функцию фильтрации F .

Семейство оптических систем $\mathcal{F}_l, l = 1, \dots, L$ располагается в пространстве \mathbb{R}^3 так, что центры их объективов $q_l = (q_l^1, q_l^2, q_l^3)$ принадлежат плоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = H\}$. Экран E , общий для всех ОС \mathcal{F}_l , задается уравнением $x^3 = H + d_1$. В качестве эффективных областей $W_l \subset E$ выбираем открытые квадраты со сторонами длиной $2d$, параллельными осям абсцисс и ординат заданной системы координат; центры эффективных областей обладают координатами $(w_{0l}^1, w_{0l}^2, H + d_1)$, где

$$w_{0l}^1 = d_1 \frac{q_l^1}{H}, \quad w_{0l}^2 = d_1 \frac{q_l^2}{H}.$$

При этом геометрическое изображение точки $x \in \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y^3 - H < 0\}$ посредством ОС \mathcal{F}_l определяется формулой

$$P_l(x) = (P_l^1(x), P_l^2(x), H + d_1) = \left(q_l^1 + d_1 \frac{x^1 - q_l^1}{x^3 - H}, q_l^2 + d_1 \frac{x^2 - q_l^2}{x^3 - H}, H + d_1 \right). \quad (1)$$

Точки x_j, x_k геометрически двойные, если существует l , принадлежащая множеству $\{1, \dots, L\}$, такая, что $P_l(x_j) = P_l(x_k)$. Всюду в дальнейшем предполагаем, что центры объективов любых трех оптических систем из заданного семейства \mathcal{F}_l не лежат на одной прямой. Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{F}_+ = \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+} = \bigcap_{l=1}^L \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 - H < 0, \mathcal{L}_{xq_l} \cap W_l \neq \emptyset\},$$

называемое *допустимой областью* семейства оптических систем, и представляющее собой пересечение допустимых областей \mathcal{F}_{l+} , $j = 1, \dots, L$ каждой ОС из заданного семейства. Здесь через \mathcal{L}_{xq_l} обозначена прямая, проходящая через точки x, q_l . Под дискретным телом в \mathbb{R}^3 понимается пара (V, μ) , состоящая из носителя $V = \{x_1, \dots, x_N\}$ и плотности $\mu(x) = \sum_{j=1}^N c_j \delta(x - x_j)$, где $x, x_j \in \mathbb{R}^3$, $c_j \in \mathbb{C}$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Предполагается, что \mathcal{F}_+ не пусто, и в нем содержится носитель V дискретного тела (V, μ) , $V \subset \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$.

Резкое изображение дискретного тела (V, μ) , полученное посредством оптической системы \mathcal{F}_l , задается формулой

$$u_{\delta l}(w_l) = B \sum_{j=1}^N c_j c(x_j, q_l) \delta(w_l - P_l(x_j)), \quad (2)$$

где $x_j \in V$, B — некоторая комплексная постоянная, отображение $P_l(x_j)$ определено формулой (1), а функция $c(x, q_l)$, называемая *весовой функцией*, которая описывает закон излучения дискретного тела, может принимать как вещественные, так и комплексные значения. “Размытое” изображение тогда принимает следующий вид,

$$u_{\mathcal{F}_l}(w_l) = B \sum_{j=1}^N c_j c(x_j, q_l) \Delta_l(w_l - P_l(x_j)), \quad (3)$$

где $\Delta_l(w_l - P_l(x))$ — функция, определяемая конфигурацией диафрагмы и параметрами оптических систем. В частности, если диафрагмы являются квадратами со сторонами $2d$, а дискретное тело представляет собой источник излучения стационарного волнового поля [1], то

$$\Delta_l(w_l - P_l(x_j)) = \frac{\sin\left(\frac{kd}{d_1}(w_l^1 - P_l^1(x_j))\right)}{w_l^1 - P_l^1(x_j)} \frac{\sin\left(\frac{kd}{d_1}(w_l^2 - P_l^2(x_j))\right)}{w_l^2 - P_l^2(x_j)}. \quad (4)$$

Здесь k — волновое число.

Семейство $\{w_l\}$ точек $w_l \in W_l$, $l = 1, \dots, L$ назовем *геометрически согласованным*, если существует точка $x \in \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$ такая, что $P_l(x) = w_l$ для всех $l = 1, \dots, L$. В частности, критерий геометрической согласованности для двух оптических систем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ формулируется следующим образом:

Лемма 1.1. *Точки $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ геометрически согласованы если и только если*

$$|w_1 - w_2| > |b|, \quad |\langle w_1 - w_2, b \rangle| = |w_1 - w_2| |b|.$$

Общий стереообраз x точек w_1, w_2 может быть найден по формулам

$$x = q_1 + \frac{(b, a_2, a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|^2} a_1 = q_2 - \frac{(b, a_1, a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|^2} a_2, \quad (5)$$

где $a_1 = w_1 - q_1$, $a_2 = w_2 - q_2$, $b = q_1 - q_2$, числители дробей содержат смешанные произведения (a, b, c) векторов a, b, c .

Доказательство сформулированного утверждения состоит в непосредственной проверке.

Основная часть настоящей работы состоит из трех разделов и заключения. В следующем разделе проведен сведенный к двумерному случаю анализ характера неоднозначности при восстановлении простейшего дискретного тела при различных весовых функциях оптических систем. Раздел 3, посвященный вопросам однозначного определения носителя дискретного тела, является основным. Четвертый раздел посвящен описанию подхода к определению плотности (интенсивностей оптических источников) дискретного распределения излучающих точек. Там же обсуждаются варианты алгоритмов по восстановлению как носителя V дискретного тела (V, μ) , так и его плотности $\mu(x)$. Заключение содержит сжатое изложение полученных результатов и выводы.

§2. Анализ неоднозначностей при восстановлении дискретного тела

В работе [14] показано, что при восстановлении конечного множества светящихся точек (дискретного тела) в \mathbb{R}^n по конечному числу его изображений может возникать существенная неоднозначность. Приведем и проанализируем пример, проясняющий характер неоднозначности при определении координат и светимостей дискретного тела при $n = 3$. Будем исходить из резкого изображения дискретного тела (V, μ) при весовых функциях $c(x, q_l)$ вида:

- (1) $c(x, q_l) = |x - q_l|^r$;
- (2) $c(x, q_l) = \exp\{ik|x - q_l|\} |x - q_l|^r$;
- (3) $c(x, q_l) = \exp\{-\varepsilon|x - q_l|\} |x - q_l|^r$, $l = 1, 2$, r вещественно, $r \neq 0$.

Пусть дискретное тело (V, μ) состоит из точек $x_0, x_1 \in \mathcal{F}_{1+} \cap \mathcal{F}_{2+} \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 1), плотность же μ есть $\mu(x) = c_0\delta(x - x_0) + c_1\delta(x - x_1)$, но значения коэффициентов c_0, c_1 произвольны. Предположим, что точки x_0, x_1, q_1, q_2 лежат в одной плоскости. Это означает, что смешанное произведение $(q_1 - q_2, x_0 - x_1, x_0 - q_1)$ обращается в нуль, и легко проверяется (лемма 1.1), что каждая из точек $w_{10} = P_1(x_0)$, $w_{11} = P_1(x_1)$ геометрически согласована с

точками $w_{20} = P_2(x_0)$, $w_{21} = P_2(x_1)$. Таким образом, множество Q геометрически согласованных точек состоит из четырех элементов $\{w_{10}, w_{20}\}$, $\{w_{10}, w_{21}\}$, $\{w_{11}, w_{20}\}$, $\{w_{11}, w_{21}\}$, которые в соответствии с формулами (5) дают четыре прообраза, а именно точки $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \bar{V}$, и носитель V исходного дискретного тела (V, μ) содержится в множестве \bar{V} , причем V не содержит геометрически двойных точек, а \bar{V} уже целиком состоит из точек, каждая из которых является геометрически двойной по отношению к каждой из двум заданным ОС.

Следующий геометрический факт в несколько более общей форме был установлен в работе [14] методами проективной геометрии. Здесь приведено независимое доказательство более простого варианта леммы. Остальные результаты этого и располагающихся ниже разделов новые.

Лемма 2.1. Пусть в \mathbb{R}^3 заданы две оптические системы $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, носитель $V = \{x_0, x_1\}$ дискретного тела (V, μ) таков, что $V \subset \mathcal{F}_{1+} \cap \mathcal{F}_{2+}$, смешанное произведение $(q_1 - q_2, x_0 - x_1, x_0 - q_1)$ обращается в нуль, $w_{lj} = P_l(x_j)$ различны для различных пар индексов $l = 1, 2, j = 0, 1$. Пусть $x_2 \in \mathcal{L}_{x_0q_1} \cap \mathcal{L}_{x_1q_2}$, $x_3 \in \mathcal{L}_{x_0q_2} \cap \mathcal{L}_{x_1q_1}$, и $\bar{V} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$. Тогда для точек $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \bar{V}$, q_1, q_2 справедливо тождество

$$\frac{|x_0 - q_1|}{|x_2 - q_1|} \frac{|x_1 - q_1|}{|x_3 - q_1|} = \frac{|x_0 - q_2|}{|x_3 - q_2|} \frac{|x_1 - q_2|}{|x_2 - q_2|}. \quad (6)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим частный случай расположения шести точек $q_1, q_2, x_0, x_1, x_2, x_3$. Именно, предположим, что прямые $\mathcal{L}_{x_0q_1}$ и $\mathcal{L}_{x_0q_2}$ пересекаются под прямым углом. Введем в плоскости, которой принадлежат точки $x_0, x_1, x_2, x_3, q_1, q_2$, собственную прямоугольную декартову систему координат с центром в точке x_0 так, что $x_0 = (0, 0)$, $x_2 = (1, 0)$, $q_1 = (u, 0)$, $x_3 = (0, 1)$ и $q_2 = (0, v)$, $u, v > 1$. Тогда $|x_0 - q_1| = u$, $|x_0 - q_2| = v$, $|x_2 - q_1| = u - 1$, $|x_3 - q_2| = v - 1$, $|x_3 - q_1| = \sqrt{u^2 + 1}$, $|x_2 - q_2| = \sqrt{v^2 + 1}$. Находя координаты точки $x_1 = \left(\frac{u(v-1)}{uv-1}, \frac{v(u-1)}{uv-1}\right)$, получим $|x_1 - q_1| = \frac{u(v-1)}{uv-1} \sqrt{u^2 + 1}$, $|x_1 - q_2| = \frac{u(v-1)}{uv-1} \sqrt{v^2 + 1}$. Подставляя найденные выражения для расстояний в (6), получим соотношение

$$\frac{\frac{u(v-1)}{uv-1} \sqrt{u^2 + 1}}{(u-1)\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{v \frac{u(v-1)}{uv-1} \sqrt{v^2 + 1}}{(v-1)\sqrt{v^2 + 1}},$$

которое дает тождество $\frac{uv}{uv-1} = \frac{uv}{uv-1}$, зависящее лишь от “расстояний” $1, u, v$ между точками на прямых $\mathcal{L}_{x_0q_1}, \mathcal{L}_{x_0q_2}$ и не зависящее от величин $\sqrt{u^2 + 1}, \sqrt{v^2 + 1}$, которые лишь и возникают в рамках требования

евклидовой структуры \mathbb{R}^2 . Следовательно, каков бы ни был угол между прямыми $\mathcal{L}_{x_0q_1}$ и $\mathcal{L}_{x_0q_2}$, тождество (6) остается справедливым. \square

Зададимся следующим вопросом: можно ли подобрать не обращающиеся в нуль вещественные или комплексные числа c_j , $j = 0, 1, 2, 3$, таким образом, чтобы резкие изображения $u_{\delta l}$, $l = 1, 2$, точек $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \bar{V}$ обращались в нуль? Проведем рассуждения для перечисленных выше трех

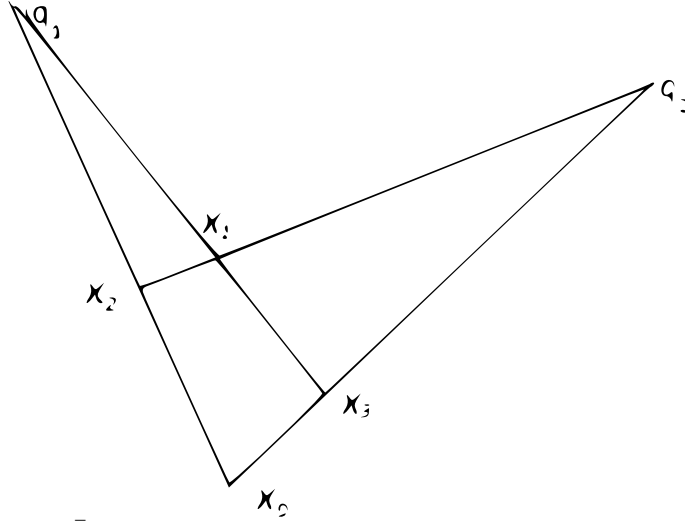


Рис. 1: Носитель $\bar{V} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, содержащий исходные точки $\{x_0, x_1\}$ и геометрически двойные точки $\{x_2, x_3\}$ дискретного тела (\bar{V}, μ) .

вариантов весовых функций, предварительно записав резкое изображение (2) дискретного тела (V, μ) , $V = \{x_1, \dots, x_N\}$, $\mu(x) = \sum_{j=1}^N c_j \delta(x - x_j)$,

$V \subset \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$, в привычном виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$w_{lj} \equiv (P_l(x_j)) = B \sum_{j=1}^N a_{lj} c_j, \quad l = 1, \dots, L, \quad (7)$$

где $a_{lj} = c(x_j, q_l)$.

Заметим, что если V задано, то система уравнений содержит N неизвестных c_j и состоит из NL уравнений. Если V не содержит геометрически двойных точек, то семейство геометрически согласованных точек состоит из N^2 элементов и, следовательно, множество \bar{V} также состоит из N^2 элементов. При этом “новая” система уравнений относительно N^2 неизвестных \bar{c}_j состоит из такого же количества уравнений.

(1) Весовая функция $c(x, q_l) = |x - q_l|^r$, r рационально, $r \neq 0$, $l = 1, 2$. В частности, весовая функция $c(x, q_l) = |x - q_l|^{-2}$, $l = 1, 2$, соответствует резкому фотометрическому изображению. Матрица \mathcal{A} системы линейных

однородных уравнений $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ для определения коэффициентов c_j , составляющих вектор-столбец $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, c_3)^T$, $j = 0, 1, 2, 3$, такова,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} |x_0 - q_1|^r & 0 & |x_2 - q_1|^r & 0 \\ 0 & |x_1 - q_1|^r & 0 & |x_3 - q_1|^r \\ |x_0 - q_2|^r & 0 & 0 & |x_3 - q_2|^r \\ 0 & |x_1 - q_2|^r & |x_2 - q_2|^r & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ее определитель

$$\det \mathcal{A} = -|x_0 - q_1||x_1 - q_1||x_2 - q_2||x_3 - q_2| + |x_0 - q_2||x_1 - q_2||x_2 - q_1||x_3 - q_1|$$

в соответствии с леммой 2.1 обращается в нуль, ранг же матрицы \mathcal{A} равен 3. Придавая значению коэффициента c_0 любое вещественное число, выражая остальные три коэффициента через c_0 , получаем распределение “невидимку“, состоящее из 4-х точек со светимостями, не равными нулю, но при этом оба резких изображения которого обращаются в нуль.

Если столбец \mathbf{B} правых частей системы $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{B}$ ненулевой, то либо система несовместна, что на практике не реализуемо, либо ранги основной и расширенной матриц совпадают и равны трем. И тогда светимости четырех точек определяются, как и в предыдущем случае, с точностью до выбора произвольной константы.

(2) Весовая функция $c(x, q_l) = \exp\{ik|x - q_l|\}|x - q_l|^r$, $l = 1, 2$, r рационально. В частности, при $c(x, q_l) = \frac{\exp\{ik|x - q_l|\}}{|x - q_l|}$, $l = 1, 2$ весовая функция соответствует резкому волновому изображению при $n = 3$. Введем обозначения ρ_{jl} для величин $|x_j - q_l|$, $j = 0, 1, 2, 3$, $l = 1, 2$. Матрица \mathcal{A} системы линейных однородных уравнений $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, c_3)^T$, $j = 0, 1, 2, 3$, для определения коэффициентов c_j , $j = 0, 1, 2, 3$, примет следующий вид,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} e^{ik\rho_{01}}\rho_{01}^r & 0 & e^{ik\rho_{21}}\rho_{21}^r & 0 \\ 0 & e^{ik\rho_{11}}\rho_{11}^r & 0 & e^{ik\rho_{31}}\rho_{31}^r \\ e^{ik\rho_{02}}\rho_{02}^r & 0 & 0 & e^{ik\rho_{32}}\rho_{32}^r \\ 0 & e^{ik\rho_{12}}\rho_{12}^r & e^{ik\rho_{22}}\rho_{22}^r & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Ее определитель

$$\det \mathcal{A} = -e^{ik\rho_{01}}\rho_{01}^r e^{ik\rho_{11}}\rho_{11}^r e^{ik\rho_{22}}\rho_{22}^r e^{ik\rho_{32}}\rho_{32}^r + e^{ik\rho_{02}}\rho_{02}^r e^{ik\rho_{12}}\rho_{12}^r e^{ik\rho_{21}}\rho_{21}^r e^{ik\rho_{31}}\rho_{31}^r$$

обращается в нуль при выполнении условия

$$\frac{e^{ik\rho_{01}}\rho_{01}^r}{e^{ik\rho_{21}}\rho_{21}^r} \frac{e^{ik\rho_{11}}\rho_{11}^r}{e^{ik\rho_{31}}\rho_{31}^r} = \frac{e^{ik\rho_{02}}\rho_{02}^r}{e^{ik\rho_{32}}\rho_{32}^r} \frac{e^{ik\rho_{12}}\rho_{12}^r}{e^{ik\rho_{22}}\rho_{22}^r},$$

которое преобразуется в следующее:

$$e^{ik(\rho_{01}-\rho_{21})}e^{ik(\rho_{11}-\rho_{31})}\left(\frac{\rho_{01}\rho_{11}}{\rho_{21}\rho_{31}}\right)^r = e^{ik(\rho_{02}-\rho_{32})}e^{ik(\rho_{12}-\rho_{22})}\left(\frac{\rho_{02}\rho_{12}}{\rho_{32}\rho_{22}}\right)^r$$

. Воспользовавшись леммой 2.1, получаем, что определитель обращается в нуль при условии

$$e^{ik(|x_0-x_2|+|x_1-x_3|)} = e^{ik(|x_1-x_2|+|x_0-x_3|)}. \quad (10)$$

В свою очередь, соотношение (10) выполняется, если волновое число принимает одно из следующего счетного множества значений,

$$k = \frac{2\pi n}{|x_0-x_2|+|x_1-x_3|-|x_1-x_2|-|x_0-x_3|}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11)$$

при неравном нулю знаменателе; либо, при любом k , выполнено равенство

$$|x_0-x_2|+|x_1-x_3| = |x_1-x_2|+|x_0-x_3|, \quad (12)$$

которое означает, что равны суммы длин противоположных сторон четырехугольника с вершинами в точках x_0, x_2, x_1, x_3 (см. рис. 1).

Пусть наряду с условием (6), которое выполняется автоматически (лемма 2.1), выполнено одно из условий (11) или (12). Рассматривая однородную систему уравнений, приходим к ситуации, описанной в пункте 1. Именно, коэффициентами c_j , $j = 0, 1, 2, 3$ распоряжаемся так же, как в предыдущем пункте. Пусть теперь при равном нулю определителе матрицы \mathcal{A} , заданной (9), система неоднородна и ранги основной и расширенной матриц равны трем. Тогда вновь, как и в пункте 1, получаем неопределенность (с точностью до произвольной константы) при определении светимостей c_j , $j = 0, 1, 2, 3$.

Если же не имеет места условие (10), что эквивалентно невыполнению условий (11) и (12), то ранг матрицы (9) равен четырем, что влечет за собой однозначность определения светимостей c_j , $0 \leq j \leq 3$, которые обращаются в нуль в случае однородной системы, и имеют единственное решение для неоднородной системы. Очевидно, в условиях примера при этом $c_2 = c_3 = 0$ и точки x_2, x_3 являются “ложными”.

(3) Весовая функция $c(x, q_l) = \exp\{-\varepsilon|x - q_l|\}|x - q_l|^r$, $l = 1, 2$, r рационально. В частности, при $c(x, q_l) = \frac{\exp\{-\varepsilon|x - q_l|\}}{|x_j - q_l|^2}$ весовая функция соответствует резкому экспоненциальному фотометрическому изображению. С введенными обозначениями ρ_{jl} для величин $|x_j - q_l|$, $j = 0, 1, 2, 3$,

$l = 1, 2$, матрица \mathcal{A} системы линейных однородных уравнений $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, c_3)^T$, $j = 0, 1, 2, 3$, примет следующий вид,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} e^{-\varepsilon\rho_{01}}\rho_{01}^r & 0 & e^{-\varepsilon\rho_{21}}\rho_{21}^r & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon\rho_{11}}\rho_{11}^r & 0 & e^{-\varepsilon\rho_{31}}\rho_{31}^r \\ e^{-\varepsilon\rho_{02}}\rho_{02}^r & 0 & 0 & e^{-\varepsilon\rho_{32}}\rho_{32}^r \\ 0 & e^{-\varepsilon\rho_{12}}\rho_{12}^r & e^{-\varepsilon\rho_{22}}\rho_{22}^r & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Ее определитель

$$\det \mathcal{A} = -e^{-\varepsilon\rho_{01}}\rho_{01}^r e^{-\varepsilon\rho_{11}}\rho_{11}^r e^{-\varepsilon\rho_{22}}\rho_{22}^r e^{-\varepsilon\rho_{32}}\rho_{32}^r + e^{-\varepsilon\rho_{02}}\rho_{02}^r e^{-\varepsilon\rho_{12}}\rho_{12}^r e^{-\varepsilon\rho_{21}}\rho_{21}^r e^{-\varepsilon\rho_{31}}\rho_{31}^r$$

обращается в нуль при выполнении условия (пользуемся леммой 2.1) (12), которое означает, что равны суммы длин противоположных сторон четырехугольника с вершинами в точках x_0, x_2, x_1, x_3 (см. рис. 1). Определитель матрицы (13) обращается в нуль лишь при выполнении условия (12) на геометрию расположения источников. Проводя анализ, аналогичный анализу, проведенному в предыдущем пункте, получаем полностью аналогичные результаты.

Результаты рассмотрения трех весовых функций сформулируем в виде леммы.

Лемма 2.2. Пусть в условиях леммы 2.1 весовые функции оптических систем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ имеют вид:

(1) $c(x, q_l) = |x - q_l|^r$, r рационально, $r \neq 0$, $l = 1, 2$. Тогда ранг матрицы \mathcal{A} (8) равен трем. Системы однородных $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ и неоднородных $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{B}$ уравнений обладают множеством решений с одной свободной переменной, если ранги основной матрицы \mathcal{A} и расширенной $\mathcal{A}|\mathbf{B}$ совпадают.

(2) $c(x, q_l) = \exp\{ik|x - q_l|\}|x - q_l|^r$, $l = 1, 2$, r рационально. Тогда ранг матрицы \mathcal{A} (9) равен трем при выполнении условий (11) или (12). Системы однородных $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ и неоднородных $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{B}$ уравнений обладают множеством решений с одной свободной переменной, если ранги основной \mathcal{A} и расширенной $\mathcal{A}|\mathbf{B}$ матриц совпадают и равны трем. Система неоднородных уравнений имеет единственное решение, если не выполнены условия (11) и (12).

(3) $c(x, q_l) = \exp\{-\varepsilon|x - q_l|\}|x - q_l|^r$, $l = 1, 2$, r рационально. Тогда ранг матрицы \mathcal{A} (13) равен трем при выполнении условия (12). Системы однородных $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ и неоднородных $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{B}$ уравнений обладают множеством решений с одной свободной переменной, если ранги основной матрицы \mathcal{A} и расширенной $\mathcal{A}|\mathbf{B}$ совпадают и равны трем. Система неоднородных уравнений имеет единственное решение, если не выполнено условие (12).

Сформулируем выводы, к которым приходим в результате рассмотрения в этом разделе простого варианта задачи о единственности определения координат и светимостей дискретного тела по его резким изображениям, полученных посредством двух ОС $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$.

1. Задача восстановления носителя 3D дискретного тела по двум его резким изображениям сводится к решению серии двумерных задач.

Образы носителя V принадлежат конечному множеству параллельных эпполярных линий, представляющих собой пересечения плоскостей, проходящих через q_1, q_2 (эпполярных плоскостей), с экраном E . Иными словами, множество геометрически согласованных точек является разбиением, элементы которых суть пары точек (w_1, w_2) , $w_1 = P_1(x_0) \in W_1$, $w_2 = P_2(x_0) \in W_2$, $x_0 \in V$. Все образы точек $x_j \in V$, $j = 1, \dots, N$ носителя V дискретного тела (V, μ) лежат на пересечении эпполярных линий с эффективными областями W_1, W_2 .

2. Задача восстановления носителя дискретного тела, лежащего в эпполярной плоскости, по двум его резким изображениям.

Рассмотрим случай, когда множество V_0 , состоящее из N_0 элементов, не содержит точек, геометрически двойных относительно ОС $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Тогда на пересечении эпполярной линии с каждой из эффективных областей W_1, W_2 лежит в точности N_0 точек w_{lm} , $l = 1, 2$, $m = 1, \dots, N_0$. Ясно, что множество Q геометрически согласованных точек состоит из $(N_0)^2$ элементов и, следовательно, множество \bar{V}_0 также содержит $(N_0)^2$ точек. В данном случае множество V_0 состоит из минимального N_0 , а \bar{V}_0 — из максимального количества $(N_0)^2$ точек, дающих одно и то же изображение на ОС $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. В рассматриваемом случае возникает значительное количество вариантов как количества, — между N_0 и $(N_0)^2$, — так и вариантов геометрической конфигурации точек (при одном и том же их количестве) носителя дискретного тела.

Второй случай возникает, если количество точек w_{1k} и w_{2m} различно: K_0 и M_0 . Тогда максимальное множество точек \bar{V}_{km} содержит $K_0 M_0$, а о минимальном множестве трудно что-либо сказать без наличия априорной информации. Одно из ограничений — условие видимости множества точек из V , т.е. отсутствие в V геометрически двойных точек. Это условие достаточно сильное.

В обоих случаях возникает чисто комбинаторная задача подсчета количества и возможных различных геометрических конфигураций точек носителя, дающих одни и те же резкие изображения на двух ОС.

3. Задача восстановления дискретного тела, лежащего в эпполярной плоскости, по двум его резким изображениям.

В пунктах 1, 2 речь шла лишь об определении координат (местоположения) точек, — в пространстве или на эпполярной плоскости — по их

известным координатам на двух эффективных областях. В этом пункте мы подключаем информацию о светимости μ дискретного тела (V, μ) , исходя из трех рассмотренных ранее вариантов весовых функций. Строго говоря, это — априорная информация. После определения координат точек максимально возможного множества \bar{V} , содержащего много геометрически двойных точек, строится система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Система содержит, вообще говоря, $K_0 M_0$ уравнений и столько же неизвестных.

Весовая функция первого типа не дает возможности однозначного определения дискретного тела. Весовая функция второго типа позволяет однозначное восстановление как координат точек носителя, так и их светимостей при невыполнении двух вполне определенных условий. Наиболее благоприятная ситуация возникает, если в однородной среде имеется постоянное поглощение. Тогда однозначному восстановлению может помешать только достаточно экзотическое геометрическое расположение источников из \bar{V} .

§3. Определение носителя дискретного тела в пространстве

Пусть $\{\mathcal{F}_l\}$, $l = 1, \dots, L$ — семейство оптических систем и (V, μ) — дискретное тело такое, что $V \subset \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$. Применив к носителю V геометрические P_l -отображения, задаваемые формулой (1), получим на каждой эффективной области W_l семейство точек $\{w_{ln_i}\}$, где $n_i = 1, \dots, N_l$. Различное число N_l точек на областях W_l , $l = 1, \dots, L$, обусловлено различным количеством геометрически двойных точек относительно разных ОС $\{\mathcal{F}_l\}$. Заметим, что если носитель V вообще не содержит оптически двойных точек, то числа N_l одинаковы и совпадают с количеством точек в носителе.

Ставится задача определения носителя V дискретного тела (V, μ) по известному семейству точек $\{w_{ln_i}\}$. Рассмотрим множество точек $Q = \bigcup_{l=1}^L \{w_{ln_i}\} = \bigcup_{l=1}^L P_l(V)$. Используя критерий геометрической согласованности, разобьем множество Q на семейства геометрически согласованных точек Q_j . Каждому семейству Q_j сопоставим по формулам (5) стереообраз $x_j \in \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$, то есть каждому множеству Q_j сопоставлена одна и только одна точка $x_j \in \bar{V}$. Таким образом,

$$Q = \bigcup_{l=1}^L \{w_{ln_i}\} = \bigcup_{l=1}^L P_l(V) = \bigcup_{j=1}^J Q_j, \quad (14)$$

где $Q_j = \bigcup_{l=1}^L P_l(x_j)$ для всякого $j = 1, \dots, J$, и множеству Q (14) соответствует множество точек $\{x_j\} = \bar{V}$ из $\bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$, причем $V \subseteq \bar{V}$.

Ниже потребуется еще одно разбиение множества Q . Его построение осуществляется следующим образом. Выберем произвольным образом семейство $Q_{n_1} \subset Q$ геометрически согласованных принадлежащих эффективным областям W_l , $l = 1, \dots, L$, точек. Последовательно перебирая оставшиеся семейства $Q_{n_j} \subset Q$, $n_j \neq n_1$, объединяя с Q_{n_1} те из них, которые обладают непустым пересечением с ним, получаем множество U_1 . Далее присоединяем к U_1 те семейства из множества Q , которые обладают непустыми пересечениями хотя бы с одним из семейств, уже входящих в U_1 . Повторяя эту процедуру необходимое число раз, получаем множество $U_1 = Q_{n_1} \cup Q_{n_2} \cup \dots \cup Q_{n_i}$, состоящее из объединения геометрически согласованных между собой точек, таких что:

- (1) для всякого n_k существует n_m , такое что $Q_{n_k} \cap Q_{n_m} \neq \emptyset$;
- (2) если $j \neq n_1, n_2, \dots, n_i$, то $Q_j \cap U_1 = \emptyset$.

Повторяя описанную процедуру по отношению к семействам геометрически согласованных точек, не вошедших в множество U_1 , получаем множество U_2 . Действуя таким образом вплоть до полного исчерпания множества Q , приходим к представлению множества Q (14) через множества U_n , $Q = \bigcup_{n=1}^N U_n$. Из способа построения множеств U_1, U_2, \dots, U_N легко видеть, что получено полное разбиение множества Q (14), так что если $n \neq m$, то $U_n \cap U_m = \emptyset$ и справедливо (15). Разбиение (15) множества Q задает не пересекающееся разбиение множества $\bar{V} = \{x_j\} = \bigcup_{n=1}^N V_n$, где каждое множество V_n является прообразом U_n при геометрических P_l -отображениях, то есть $\bigcup_{l=1}^L P_l(V_n) = U_n$, $n = 1, \dots, N$. Таким образом,

$$Q = \bigcup_{n=1}^N U_n = \bigcup_{n=1}^N \left(\bigcup_{l=1}^L P_l(V_n) \right). \quad (15)$$

Отметим несколько простых свойств построенных множеств. В сочетании с большой буквой обозначение $|M|$ применяется для числа элементов в конечном множестве M точек из \mathbb{R}^3 .

1. $P_l(\bar{V}) = P_l(V)$ для всех $l = 1, \dots, L$.
2. $|Q_j| = L$ для любого $j = 1, \dots, J$.
3. $N \leq J$; $N = J$ тогда и только тогда, когда для всяких $i, j = 1, \dots, J$, $i \neq j$, справедливо $Q_i \cap Q_j = \emptyset$.
4. Если $Q_n \cap Q_m \neq \emptyset$ для некоторых $n, m = 1, \dots, J$, $n \neq m$, то существуют l такое, что $F_l(x_n) = F_l(x_m)$.
5. Если $\bar{V} \setminus V \neq \emptyset$ и $x_j \in \bar{V} \setminus V$, то для всякого $l = 1, \dots, L$ существует точка $x_n(l) \in \bar{V} \setminus \{x_j\}$ такая, что $P_l(x_j) = P_l(x_n(l))$.

Докажем, например, свойство 5. Пусть $x_j \in \bar{V} \setminus V \neq \emptyset$. Зафиксируем номер l оптической системы и обозначим через w_l точку $P_l(x_j)$. Если не существует точки $x_n(l)$ такой, что $w_l = P_l(x_n(l))$, то $|P_l(\bar{V})| = |P_l(\bar{V} \setminus \{x_j\})| + 1$. Но тогда $P_l(\bar{V}) \neq P_l(V)$, что противоречит свойству 1.

О соотношении между количеством оптических систем, необходимых для однозначного восстановления носителя V дискретного тела (V, μ) , и количеством точек в нем, говорится в следующем утверждении.

Лемма 3.1. Пусть заданы оптические системы $\{\mathcal{F}_l\}$, $l = 1, \dots, L$. Существует дискретное тело (V, μ) такое, что $|\bar{V}| = |V| + 1 = L + 1$. Если оптическая система $\mathcal{F}_0 \notin \{\mathcal{F}_l\}$ и $\bar{V} \subset \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+} \cap \mathcal{F}_{0+}$, то множество оптических систем $(\bigcup_{l=1}^L \{\mathcal{F}_l\}) \cup \{\mathcal{F}_0\}$ позволяет однозначно восстановить носитель V дискретного тела (V, μ) .

Доказательство. Построим множества V и \bar{V} . Для этого выберем произвольным образом точку $x_0 \in \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$ и рассмотрим отрезки $\{y_l \in \mathbb{R}^3 \mid y_l = tx_0 + (1-t)q_l, 0 \leq t \leq 1\}$ прямых $\mathcal{L}_{x_0q_l}$, $l = 1, \dots, L$. Тогда для любого l в силу открытости множества $\bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$ существует вещественное число $t_l \in (0, 1)$ такое, что точка $x_l = t_l x_0 + (1-t_l)q_l \in \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$. Пусть $V = \{x_l\}$, $l = 1, \dots, L$. Рассмотрим множество $A = \bigcup_{l=1}^L P_l(x_l)$. Из способа построения множества V вытекает, что $P_l(x_l) = P_l(x_0)$ при всяком $l = 1, \dots, L$. Поэтому A — семейство геометрически согласованных точек и $x_0 \in \bar{V}$, но $x_0 \notin V$. Вторая часть утверждения тривиальна. \square

Сформулируем условия, выполнение которых позволяет однозначно находить носитель V дискретного тела (V, μ) .

Теорема 3.2. Пусть задано семейство оптических систем $\{\mathcal{F}_l\}$, $l = 1, \dots, L$, и дискретное тело (V, μ) , $V \subset \bigcap_{l=1}^L \mathcal{F}_{l+}$. Если геометрические P_l -отображения носителя V таковы, что для любого $n = 1, \dots, N$ существует l такое, что $|P_l(V_n)| < L$, где $\bar{V} = \bigcup_{n=1}^N V_n$, то $\bar{V} = V$. Здесь N — количество множеств в разбиении (15) множества Q .

Доказательство. Зафиксируем целое число n и точку $x_0 \in V_n$. Предположим, что $x_0 \in \bar{V} \setminus V \neq \emptyset$. Из свойства 5 следует, что для всякого целого $l = 1, \dots, L$ найдется точка $x_l(n) \in V_n \setminus \{x_0\}$ такая, что $P_l(x_0) = P_l(x_l(n))$. Рассмотрим множества $B = (\bigcup_{l=1}^L x_l(n)) \cup x_0 \subset V_n$ и $P_l(B)$ для всех $l = 1, \dots, L$. Покажем, что $|P_l(B)| = L$ для любого l . Если это не так, то для некоторого l_0 справедливо неравенство $|P_{l_0}(B)| < L$ (обратное неравенство выполняться не может в силу способа построения множества B), то есть существуют точки $x_{l_1}, x_{l_2} \in B \setminus \{x_0\}$ такие, что $P_{l_0}(x_{l_1}(n)) = P_{l_0}(x_{l_2}(n))$. Но это означает, что центры объективов $q_{l_0}, q_{l_1}, q_{l_2}$ оптических систем $\mathcal{F}_{l_0}, \mathcal{F}_{l_1}, \mathcal{F}_{l_2}$ лежат на одной прямой, что противоречит соглашению, принятому в начале работы относительно взаимного расположения оптических систем. Таким образом получаем, что для всех l справедливо равенство $P_l(B) = L$. Следовательно, если выполнено условие доказываемого утверждения, то $\bar{V} \setminus V = \emptyset$, что и требовалось доказать. \square

Предложение 3.3. Пусть задана оптическая система \mathcal{F}_1 и дискретное тело (V, μ) . Если относительно носителя V известно, что $V \subset \mathcal{F}_{1+} \cap \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 \leq H - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$, то существует оптическая система \mathcal{F}_2 такая, что по геометрическим P_1 -, P_2 -изображениям дискретного тела (V, μ) его носитель V определяется однозначно.

Доказательство. Рассмотрим множество $P_1(V) = \{w_j\}, j = 1, \dots, J$ и совокупность отрезков $[w_i, w_j], i \neq j$. Выберем две точки w_b, w_e так, чтобы отрезок $[w_b, w_e]$ не был бы параллелен ни одному из имеющихся отрезков $[w_i, w_j]$. Проведем через точки w_b, w_e, q_1 плоскость. Точку q_2 выберем в пересечении проведенной плоскости и плоскости $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = H\}, q_2 \neq q_1$. Условие $V \subset \mathcal{F}_{1+} \cap \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 \leq H - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ означает, что можно построить оптическую систему \mathcal{F}_2 с допустимой областью \mathcal{F}_{2+} , не совпадающей с полупространством $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 \leq H\}$, и эффективной областью W_2 , представляющей собой открытый квадрат, определяемой допустимой областью \mathcal{F}_{2+} . Единственность определения носителя V следует из того, что местоположение центра объектива q_2 таково, что в множестве V нет геометрически двойных точек относительно оптической системы \mathcal{F}_2 . \square

3.1. Восстановление носителя в предположении отсутствия геометрически двойных точек. В этом подразделе рассматривается задача восстановления носителя V дискретного тела (V, μ) при наличии априорной информации, которая состоит в том, что V не содержит геометрически двойных точек и их возникновения при построении \bar{V} априорная информация не позволяет.

Для изложения последующих результатов введем дополнительные конструкции. Пусть S — замкнутая гладкая поверхность, делящая множество $\mathbb{R}^3 \setminus S$ на ограниченную S_- и неограниченную S_+ компоненты связности; X — замкнутое подмножество поверхности S . Множество $\omega(x) \subseteq \mathbb{R}^3$, где $x \in X$, определяется следующим образом (в определении ниже $[x, y)$ — полуоткрытый интервал):

$$\omega(x) = \{y \in S_+ \mid [x, y) \cap S = \emptyset\},$$

а множество $\omega(X)$ — как $\omega(X) = \bigcap_{x \in X} \omega(x)$. Зададим две оптические системы $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ и замкнутое подмножество $X \subset S$ так, чтобы для носителя V некоторого дискретного тела (V, μ) выполнялось условие $V \subset X \subset \mathcal{F}_{1+} \cap \mathcal{F}_{2+}$. Кроме того потребуем, чтобы диафрагмы Σ_1, Σ_2 оптических систем были таковы, что выполнены условия $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \omega(X)$. В этих предположениях можно показать, что тогда

$$\cos(\widehat{q_l - x, n_x}) > 0, \quad l = 1, 2, \quad x \in X, \quad (16)$$

где n_x — нормаль к поверхности S в точке x . В дальнейшем без дополнительных упоминаний предполагается выполнение перечисленных условий. В силу (16) среди точек носителя $V \subset X$ нет геометрически двойных относительно оптических систем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, поэтому для всех $n = 1, \dots, N$ справедливы равенства $|P_1(V_n)| = |P_2(V_n)| = K_n$, где K_n — натуральное число. Для восстановления носителя V по геометрическим P_1 -, P_2 -изображениям необходимо из каждого множества $V_n, n = 1, \dots, N$, выделить подмножество $B_n \subset V_n$ такое, что $|B_n| = K_n$ (заметим, что $|V_n| = K_n^2$). Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти в каждом множестве $U_n, n = 1, \dots, N, K_n$ непересекающихся семейств геометрически согласованных точек, если известно, что $V \subset X \subset (\mathcal{F}_{1+} \cap \mathcal{F}_{2+})$ и, кроме того, $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \omega(X)$.

Рассмотрим точку $x \in X$, эпполярную плоскость \mathcal{P} ,

$$\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + t_1(q_1 - x) + t_2(q_2 - x); t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \quad (17)$$

и прямые \mathcal{L}_l ,

$$\mathcal{L}_l = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + t(q_l - x); t \in \mathbb{R}\} \quad l = 1, 2,$$

проходящие через точки q_1, x, q_2, x , соответственно. Пусть криволинейный отрезок $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cap X$ — след эпполярной плоскости \mathcal{P} на множестве X . Прямые $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ делят плоскость \mathcal{P} на четыре части, задаваемые множествами $\mathcal{P}_{x_i}^j, i, j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{x_i}^j &= \{y \in \mathcal{P} \mid (-1)^{i-1}(y > x + t_1(q_1 - x)) \\ &\quad \& (-1)^{j-1}(y > x + t_2(q_2 - x)); t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Из определения множеств $\mathcal{P}_{x_i}^j$ следуют следующие их свойства,

$$\mathcal{P}_{x_i}^j \cap \mathcal{P}_{x_{3-i}}^j = \emptyset, \quad \mathcal{P}_{x_i}^j \cap \mathcal{P}_{x_i}^{3-j} = \emptyset, \quad i, j = 1, 2.$$

Введем на плоскости \mathcal{P} прямоугольную декартову систему координат q_1uv с центром в точке q_1 и осями e_1, e_2 , удовлетворяющим соотношениям

$$e_1 = \frac{q_2 - q_1}{|q_2 - q_1|}, \quad \langle q_1 - x, e_2 \rangle > 0. \quad (18)$$

Пользуясь обобщенной теоремой о среднем для функций, задающих прямые \mathcal{L}_1 (или \mathcal{L}_2), криволинейный отрезок \mathcal{L} , и принимая во внимание свойство (16), легко проверить, что справедлива

Лемма 3.4. *Если $x, y \in \mathcal{L}, x \neq y$, то либо $y \in \mathcal{P}_{x_1}^1$, либо $y \in \mathcal{P}_{x_2}^2$.*

Докажем следующую теорему о единственности восстановления носителя V дискретного тела (V, μ) .

Теорема 3.5. Пусть дискретное тело (V, μ) и оптические системы $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ таковы, что $V \subset X \subset \mathcal{F}_{1+} \cap \mathcal{F}_{2+}$, и диафрагмы $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \omega(X)$. Тогда носитель V определяется однозначно по известным $P_1(V)$ и $P_2(V)$.

Доказательство. Зафиксируем множества U_n, V_n для некоторого n из множества $\{1, \dots, N\}$ и произвольную точку $x \in V_n$. Зададим на плоскости \mathcal{P} , определяемой (17), систему координат q_1uv с ортами, удовлетворяющими соотношениям (18). Перенумеруем от 1 до K_n каждое из семейств $P_l(V_n) = \{w_{lj}\}$, $j = 1, \dots, K_n$, $l = 1, 2$, в соответствии с порядком, заданным координатой u . Рассмотрим множество геометрически согласованных точек $\{Q_j\} = \{w_{1j}, w_{2j}\}$, $j = 1, \dots, K_n$, и соответствующее ему множество стереообразов $B_n = \{x_j\}$, $P_l(x_j) = w_{lj}$, $j = 1, \dots, K_n$, $l = 1, 2$. Убедимся в том, что если некоторое множество точек $M \subset V_n$ таково, что $|M| = K_n$ и $M \subset X$, то $M = B_n$. Пусть это не так. Предположим, что $Q_1 = \{w_{11}, w_{2m}\} \subset M$, $m \neq 1$, и x_1 — стереообраз множества Q_1 , то есть $P_1(x_1) = w_{11}$, $P_2(x_1) = w_{2m}$. Рассмотрим множество $Q_2 = \{w_{1k}, w_{2(m-1)}\} \subset M$, где k — какое-либо из чисел $2, \dots, K_n$, и точку x_2 такую, что $P_1(x_2) = w_{1k}$, $P_2(x_2) = w_{2(m-1)}$. Непосредственная проверка показывает, что $x_2 \in \mathcal{P}_{x_1}^2$. Это означает, что точка x_2 не принадлежит множествам $\mathcal{P}_{x_1}^1, \mathcal{P}_{x_2}^2$, и уж тем более не принадлежит множеству X . Заметим, что индекс k и соответствующая точка x_2 выбирались произвольно. Мы пришли к противоречию с леммой 3.4. Следовательно, $M = B_n$. \square

Пусть, как и ранее, X — замкнутое подмножество поверхности S , диафрагмы $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \omega(X)$, но в отличие от условия теоремы 3.5, оптические системы $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ и носитель V таковы, что $V \subset X \subset \mathcal{F}_{1+} \cup \mathcal{F}_{2+}$. Введем обозначения $\tilde{X} = X \cap \mathcal{F}_{1+} \cap \mathcal{F}_{2+} \neq \emptyset$, $\tilde{V} = V \cap \mathcal{F}_{1+} \cap \mathcal{F}_{2+} \neq \emptyset$. Ставится задача определения подмножества \tilde{V} носителя V , если известны множества $P_1(V)$ и $P_2(V)$.

Теорема 3.6. Пусть известна линия $\mathcal{L} \subset \tilde{X}$, касательная к которой в любой точке $x \in \mathcal{L}$ не лежит в плоскости \mathcal{P} , определяемой (17). Тогда множество \tilde{X} находится однозначно по известным $P_l(V)$, $l = 1, 2$.

Доказательство. Так как $\mathcal{L} \subset \tilde{X}$ и $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \omega(X)$, то не существует точек $x \in \mathcal{L}$, $y \in X$, для которых выполнялись бы соотношения $P_l(x) = P_l(y)$, $l = 1, 2$. Зафиксируем какое-либо n , $1 \leq n \leq N$ и любую точку $x \in V_n$. Плоскость \mathcal{P} и система координат на ней q_1uv с ортами e_1, e_2 определяются (17), (16). Рассмотрим точки $w_{l0} = P_l(\mathcal{L} \cap \mathcal{P})$ и множества $P_l(V_n) = \{w_{li}\}$, $i = 1, \dots, K_l$, $l = 1, 2$, где $w_{li} = (u_{li}, d_1)$ в системе координат q_1uv . Пусть

$M_{l1} = \{w_{li} \in W_l \mid u_{li} > u_{l0}, 1 \leq i \leq K_l\}$, $M_{l2} = \{w_{li} \in W_l \mid u_{li} < u_{l0}, 1 \leq i \leq K_l\}$, $l = 1, 2$. Занумеруем точки, принадлежащие M_{l1} , по возрастанию координаты u , а точки множества M_{l2} — по ее убыванию, используя индексы от 1 до $|M_{lj}|$, $l, j = 1, 2$ и оставляя прежние обозначения. Пусть множества индексов A_1 и A_2 таковы, что $A_i = M_{1j}$, если $|M_{1j}| < |M_{2j}|$, и $A_i = M_{2j}$, если $|M_{1j}| \geq |M_{2j}|$, $j = 1, 2$. Введем обозначение $\tilde{U} = \{w_{1j}, w_{2j}\}$, где $j \in A_1 \cup A_2$. Построение множества \tilde{U} завершает доказательство, так как для него справедливы условия теоремы 3.5. \square

§4. Определение плотности распределения

В предыдущем разделе исследовался вопрос единственности определения носителя дискретного распределения (V, μ) , то есть однозначного определения координат точек носителя V . В этом разделе рассматривается задача определения плотности μ . Иными словами, задача определения интенсивностей излучающих точек, входящих в носитель исследуемого дискретного тела. Ниже предлагается схема одного из конструктивных методов и элементов соответствующего алгоритма, предназначенных для решения обратной задачи по определению интенсивностей точечных источников волнового монохроматического поля.

Пусть задано множество оптических систем $\{\mathcal{F}_l\}$, $l = 1, \dots, L$, и известны полученные с их помощью размытые изображения $u_{\mathcal{F}_l}(w_l)$ дискретного тела (V, μ) , определяемые формулой (3) с аппаратной функцией $\Delta_l(w_l - P_l(x_j))$, заданной формулой (4). В общей постановке по заданным размытым изображениям требуется:

- найти местоположение точек $w_{ln_i} \in W_l$, $l = 1, \dots, L$, представляющих собой образы носителя V дискретного тела (V, μ) ;
- по формулам (5) найти множество $\bar{V} = \{x_j\}$, $j = 1, \dots, J$;
- провести анализ единственности решения задачи определения носителя V , $V \subseteq \bar{V}$;
- определить интенсивности излучения c_j источников монохроматического волнового поля, расположенных в точках носителя V .

В качестве еще одной задачи может выступать задача перехода от размытого изображения к резкому.

На практике известны именно размытые, а не резкие изображения. Вообще говоря, они предпочтительнее резких при численной реализации любого алгоритма решения задачи, поскольку расчеты необходимо проводить в узлах дискретной сетки, и работа с δ -функцией в таких условиях становится весьма затруднительной. При исследовании задач фотометрии и волновой оптики, поставленных в оптически прозрачных средах, часто вполне оправдано использование приближение Фраунгофера [1]. Оно зна-

чительно упрощает техническую сторону решения задач, а возникающие при этом аппаратные функции Δ достаточно хорошо, но и не избыточно точно приближают δ -функцию.

Считаем известными размытые изображения, полученные посредством L оптических систем. Точки $\{w_{ln_l}\} \in W_l$, $n_l = 1, \dots, N_l$, являющиеся образами точек $\{x_j\}$ носителя, суть ярко выраженные локальные максимумы. Считаем их идентифицированными и известными для каждой эффективной области W_l . Используя формулы (5), находим множество $\bar{V} = \{x_j\}$, $j = 1, \dots, J$. Напомним, что размытые изображения $u_{\mathcal{F}_l}(w_l)$ дискретного тела (V, μ) , определяемые формулой (3) с функцией $\Delta_l(w_l - P_l(x_j))$, заданной (4), известны. В качестве весовой функции выбираем функцию вида $c(x, q_l) = \frac{\exp\{ik|x - q_l|\}}{|x - q_l|}$. Ставится задача найти коэффициенты c_j , $j = 1, \dots, J$. Введем следующие обозначения:

$$\mu_l(w_l) = \frac{u_{\mathcal{F}_l}(w_l)}{B}, \quad G_{lj} = \frac{\exp\{ik|x_j - q_l|\}}{|x_j - q_l|} c_j, \quad a_{lj}(w_l) = \Delta_l(w_l - P_l(x_j)), \quad (19)$$

где B — комплексная постоянная, входящая в формулу (2). В обозначениях (19) исходные формулы (3) приобретут вид

$$\mu_l(w_l) = \sum_{j=1}^J a_{lj}(w_l) G_{lj} \quad (20)$$

Известны коэффициенты $a_{lj}(w_l)$ и правые части $\mu_l(w_l)$ системы (20). В качестве неизвестных выступают величины G_{lj} . Отметим сразу, что если известна величина G_{mj} хотя бы для одного m , $1 \leq m \leq L$ и всех $j = 1, \dots, J$, то известны G_{lj} и для всех остальных l .

Заметим, что если в нашем распоряжении имеются резкие изображения, то следует исходить из системы уравнений (7).

Зафиксируем ОС \mathcal{F}_1 из имеющегося множества оптических систем и произвольное множество точек $\{w_{1j}\}$ так, чтобы $N \geq \max_{1 \leq l \leq L} \{N_l\}$, $j = 1, \dots, N$. Ясно, что такая возможность существует, так как величины μ_l и a_{lj} зависят только от точек $w_l \in W_l$, $l = 1, \dots, L$. Покажем, что ранг системы уравнений, полученной при $l = 1$ из (20), не превосходит N_1 . Действительно, если множество \bar{V} не содержит геометрически двойных точек относительно оптической системы \mathcal{F}_1 , то $N_1 = J$. Если такие точки найдутся, то из свойств функций $P_1(x)$ и $\Delta_1(w_1 - P_1(x))$ следует, что среди величин a_{1j} , $j = 1, \dots, J$ только N_1 различных, но при этом некоторые неизвестные являются суммами вида $\sum_{k \in K_1} G_{1k}$, где K_1 — множество индексов $1 \leq i, j \leq J$, $i \neq j$, таких что $P_1(x_i) = P_1(x_j)$, $x_i, x_j \in \bar{V}$. Эти

рассуждения показывают, что если $\sum_{l=1}^L N_l < |\bar{V}|$, то система уравнений, получающаяся из (20) при $l = 1$, недоопределена.

Пусть для заданного семейства $\{\mathcal{F}_l\}$, $l = 1, \dots, L$ и множества \bar{V} справедливо неравенство $\sum_{l=1}^L N_l \geq |\bar{V}|$. Для того, чтобы найти неизвестные величины G_{lj} из системы (20), необходимо зафиксировать множество точек w_{lm} , $m = 1, \dots, M$, так, чтобы определитель полученной при этом системы линейных уравнений не обращался в нуль. В частности, можно выбрать точки w_{lm} из семейства образов $\bigcup_{l=1}^L \{w_{lm_l}\}$, $n_l = 1, \dots, N_l$ носителя V . Тогда при достаточно больших значениях kd/d_1 (см. формулу (4)) имеет место диагональное преобладание $|a_{mm}| > \sum_{i=1}^n |a_{im}|$, $i \neq m$, $m = 1, \dots, n$, и тогда определитель системы не обращается в нуль. Следовательно, при достаточно больших kd/d_1 система уравнений однозначно разрешима.

При численной реализации задачи, если известны значения $u_{\mathcal{F}_l}(w_l)$ на достаточно густой сетке переменных (w_l^1, w_l^2) , имеются широкие возможности выбора необходимого числа уравнений из соотношений (20). Вычислением определителя полученной матрицы на каждом шаге может быть отрегулирован отбор нужных уравнений. Действительно существенным является лишь условие $\sum_{l=1}^L N_l \geq |\bar{V}|$.

На практике в распоряжении исследователей часто имеются только две оптические системы. Проведенный в разделе 2 анализ неоднозначности при решении обратной задачи волновой оптики по восстановлению дискретного тела показывает, что и двух изображений достаточно для единственности восстановления как носителя, так и плотности дискретного тела, если не выполнены условия (10). С другой стороны, можно построить дискретное тело-невидимку путем подбора взаимного расположения и волновых чисел излучающих точечных источников.

§5. Заключение

В теории обратных задач заметное место по праву принадлежит исследованиям единственности решений. В рамках строгих математических постановок вопросы единственности решений обратных задач фотометрии изучались в работах [7], [8], [9], волновой оптики — в работах [5], [6], [2]. Вопросы единственности решений задач компьютерной томографии изучались многими авторами, а с конструированием функций и распределений, не дающих единственного решения по фиксированному конечному

набору проекций — в работах отечественных [9]–[14] и зарубежных [21]–[19] исследователей. В дальнейшем акценты исследований в области обратных задач оптики в постановках [4], [7] были смещены в сторону исследования распространения волновых фронтов в сложных средах, разработки алгоритмов машинного зрения, обработки космических снимков, мониторинга атмосферы и океана.

Наряду со смещением акцентов в направлениях исследований в рамках обратных задач оптики, выявлены тесные связи дистанционных задач оптики с геометрической и дискретной томографией. Целью геометрической томографии [15] является извлечение информации о геометрическом объекте из проекционных данных. По своей сути это геометрический аналог компьютерной томографии [12]. Одна из целей нашей работы, а именно определение координат семейства излучающих точек по небольшому числу изображений, относится к геометрической томографии. Но это и задача дискретной томографии [16], состоящая в восстановлении дискретного распределения семейства точек с априорной информацией о законе, по которому они излучают. Известно, что задачи дискретной томографии весьма неустойчивы и обладают большой степенью неоднозначности [13], [22]. Поэтому установленные в статье критерии единственности восстановления дискретного распределения по его изображениям представляют определенный интерес.

В рамках постановок геометрической томографии, обратных задач оптики и дискретной томографии, в настоящей работе изучаются вопросы определения пространственного расположения и светимости дискретного распределения источников по его изображениям, полученным с помощью малого числа оптических систем. Проведен анализ причин возникновения неоднозначности определения координат источников. Так, для источников некогерентного излучения условия неоднозначности определения их координат носят наиболее широкий характер и связаны с геометрическим фактором взаимного заслонения. Неоднозначность определения источников монохроматического излучения возникает при выполнении дополнительных условий, связывающих счетное множество волновых чисел с геометрией расположения источников. Наличие же постоянного поглощения в среде требует для неединственности решения выполнения очень жестких условий на геометрию расположения источников. Тем не менее, во всех перечисленных случаях для любого конечного числа оптических систем существуют условия, при которых координаты системы излучающих точек находятся неоднозначно. В работе установлены критерии единственности решения обратной задачи для некогерентных или монохроматических источников в среде с постоянным поглощением или отсутствием такового, исключая условия возникновения неоднозначности решения.

Список литературы

1. Гудмен Дж. *Введение в фурье-оптику*. М.: Мир, 1970.
2. Деревцов Е. Ю. Об одной задаче волновой оптики // *Вычислительные проблемы математических задач геофизики*. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1977. С. 36–47.
3. Деревцов Е. Ю. *Численное решение некоторых задач волновой оптики* / Препринт № 275. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981.
4. Кирейтов В. Р. О задаче восстановления оптической поверхности по ее изображениям // *Функц. анализ и его прил.* 1975. Т. 10, № 3. С. 45–54.
5. Кирейтов В. Р. О некоторых обратных задачах волновой оптики // *Математические проблемы геофизики*. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1975. Вып. 6, Ч. 1. С. 167–210.
6. Кирейтов В. Р. О некоторых обратных задачах волновой оптики II // *Математические проблемы геофизики*. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1975. Вып. 6, Ч. 2. С. 90–121.
7. Кирейтов В. Р. *Обратные задачи фотометрии*. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1983.
8. Лаврентьев М. М., Ладыжец В. С. Об одной обратной задаче геометрической оптики // *Докл. АН СССР*. 1983. Т. 269, № 6. С. 1313–1315.
9. Лаврентьев М. М., Деревцов Е. Ю., Шарафутдинов В. А. Об определении оптического тела, находящегося в однородной среде, по его изображениям // *Докл. АН СССР*. 1981. Т. 260, № 4. С. 799–803.
10. Лобанов А. Н. *Фотограмметрия* / Учебник для вузов. 2-е изд. М.: Недра, 1984.
11. Обиралов А. И., Лимонов А. Н., Гаврилова Л. А. *Фотограмметрия и дистанционное зондирование*. М.: КолосС, 2006.
12. Хермен Г. *Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии* / М.: Мир, 1983.
13. Alpers A., Gritzmann P. On Stability, Error Correction, and Noise Compensation in Discrete Tomography // *SIAM J. Discrete Math.* 2006. V. 20, N 1. P. 227–239.

14. *Derevtsov E. Yu.* Ghost distributions in the cone-beam tomography // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 1997. V. 5, N 5, P. 411–426.
15. *Gardner R. J.* *Geometric Tomography* / 2nd edition. New York: Cambridge University Press, 2006.
16. *Herman G. T. Kuba A.* *Advances in Discrete Tomography and Its Applications* / Boston: Birkhäuser Boston, 2007.
17. *Louis A. K.* Ghosts in tomography - the null space of the radon transform // *Math. Methods Appl. Sci.* 1981. V. 3, N 1. P. 1–10.
18. *Louis A. K.* Nonuniqueness in inverse Radon problems: the frequency distribution of the ghosts // *Math. Z.* 1984. V. 185, N 3, P. 429–440.
19. *Louis A. K.* Orthogonal function series expansions and the null space of the radon transform // *SIAM J. Math. Anal.* 1984. V. 15. P. 621–633.
20. *Sharafutdinov V. A.* Uniqueness theorems for the exponential X-ray transform // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 1993. V. 1, N 4, P. 355–372.
21. *Smith K. T., Solmon D. C., Wagner S. L.* Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1977. V. 83, N 6. P. 1227–1270. N 12. P. 3905–3916.
22. *van Dalen B.* Stability results for uniquely determined sets from two directions in discrete tomography // *Discrete Mathematics*. 2009. V. 309,

Деревцов Евгений Юрьевич

Институт математики
им. С. Л. Соболева СОРАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: dert@math.nsc.ru

Поступила в редакцию

1 июня 2023 г.

Получена после доработки

4 сентября 2023 г.

Принята к публикации

5 октября 2023 г.