УДК 519.1
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.206
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2023, том 26, № 2, 129-137

О РАЦИОНАЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЧИСЛА КОРНЕВЫХ ЛЕСОВ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

У.П. Камалов, А.Б. Кутбаев, А.Д. Медных

Пусть $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n)x^n$ — производящая функция для числа корневых лесов $f_\Gamma(n)$ в циркулянтном графе $\Gamma = C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$, либо $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$. Мы покажем, что $\Phi(x)$ является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющей условию $\Phi(x) = -\Phi(\frac{1}{x})$. Полученный результат мы иллюстрируем с помощью конкретных примеров.

Ключевые слова и фразы: корневой остовный лес, циркулянтный граф, производящая функция.

§ 1. Введение и основные результаты

В работах [10, 9] получены формулы нахождения числа остовных деревьев в циркулянтных графах и свойства производящей функции для него.

Идея использования полиномов Чебышева для изучения сложностей для графов выдвинута Бошом и Предингером [1]. Эта идея послужила основой для нахождения сложности различных классов графов (например, см. [2, 3, 6, 7, 5, 4]). В частности, в [9] получены точные формулы для числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах $C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$ и $C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$.

Основным результатом настоящей работы является следующее: пусть

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n)x^n$$

— производящая функция для числа корневых лесов $f_\Gamma(n)$ в циркулянтном графе $\Gamma = C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$, либо $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$. Мы покажем, что $\Phi(x)$ является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющей условию $\Phi(x) = -\Phi(\frac{1}{x})$.

Этот результат является естественным обобщением результата работы [4], где было установлено, что порождающая функция $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_\Gamma(n)x^n$ для числа остовных деревьев в графе Γ есть рациональная функция с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющая соотношению $F(x) = F(\frac{1}{x})$.

§ 2. Основные понятия и определения

Пусть Γ — конечный граф. *Корневым деревом* называется дерево, в котором одна вершина выделена. *Корневой лес* — это лес, связанные компоненты которого являются корневыми деревьями. *Корневым остовным лесом* в графе Γ называем корневой лес, содержащий все вершины графа Γ.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0005).

Пусть $s_1, s_2, ..., s_k$ такие натуральные числа, что $1 \le s_1 < s_2 < ... < s_k \le \frac{n}{2}$. Граф $C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$ на n вершинах $0, 1, 2, ..., n-1$ называется *циркулянтным* если вершина i, $i = 0, 1, ..., n-1$ смежна с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, ..., i \pm s_k (mod\, n)$. Если $s_k < \frac{n}{2}$, то все вершины графа имеют четную степень $2k$. Если n четное и $s_k = \frac{n}{2}$, то все вершины имеют нечетную степень $2k-1$.

В работе мы будем пользоваться основными свойствами полиномов Чебышева. Пусть

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) \text{ и } U_{n-1}(z) = \sin(n \arccos z)/\sin \arccos z$$

— полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно. Тогда

$$T_n'(z) = nU_{n-1}(z),\ T_n(1) = 1,\ U_{n-1}(1) = n.$$

Более подробные свойства полиномов Чебышева приведены в монографии [8].

§ 3. Число остовных лесов в циркулянтных графах четной валентности

Из [5] мы имеем следующий результат.

Теорема 1. *Число корневых остовных лесов в циркулянтном графе* $\Gamma = C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$, $1 \le s_1 < s_2 < ... < s_k < \frac{n}{2}$ *определяется следующей формулой*

$$f_\Gamma(n) = (-1)^{(s_k+1)n} \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(w_p) - 2), \tag{1}$$

где $w_p, p = 1, 2, ..., s_k$ *— все корни алгебраического уравнения*

$$\sum_{j=1}^{k} (2T_{s_j}(w) - 2) = 1$$

и $T_s(w)$ *— полином Чебышева первого рода.*

Воспользуемся следующей элементарной леммой

Лемма 1. *Пусть* $T_n(w)$ *— полином Чебышева первого рода и пусть* $w = (z + z^{-1})/2$. *Тогда*

$$T_n(w) = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n}).$$

Делая замену $w_p = (z_p + z_p^{-1})/2$, по лемме выводим, что

$$2T_n(w_p) - 2 = -(z_p^n - 1)(z_p^{-n} - 1).$$

Поэтому теорему 1 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Число корневых остовных лесов* $f_\Gamma(n)$ *в графе* $\Gamma = C_n(s_1, s_2, ..., s_k), 1 \le s_1 < s_2 < ... < s_k < \frac{n}{2}$ *определяется следующей формулой*

$$f_\Gamma(n) = (-1)^{(s_k+1)n+s_k} \prod_{p=1}^{s_k} (z_p^n - 1)(z_p^{-n} - 1), \tag{2}$$

где $z_p, z_p^{-1}, p = 1, 2, ..., s_k$ *— все корни уравнения*

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{k} (z^{s_j} - 1)(z^{-s_j} - 1) + 1 = 0.$$

§ 4. Производящая функция для числа остовных лесов в циркулянтных графах четной валентности

Основным результатом этого раздела является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $f_\Gamma(n)$ *число корневых остовных лесов в циркулянтном графе* $C_n(s_1, s_2, ..., s_k), 1 \leq s_1 < s_2 < ... < s_k < \frac{n}{2}$ *четной валентности. Тогда*

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n) x^n \tag{3}$$

является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами. Более того, $\Phi(x) = -\Phi(\frac{1}{x})$.

Доказательство теоремы опирается на теорему 2 и следующие два предложения.

Предложение 1. *Пусть* $P(x)$ — *полином степени* $2s$ *с целочисленными коэффициентами и пусть* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2s}$ *все его корни. Тогда*

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{2s} (\xi_i^n - 1) x^n$$

— *рациональная функция с целочисленными коэффициентами.*

Доказательство. Пусть через $\sigma_k(x_1, x_2, ..., x_{2s})$ обозначим $k-$ый элементарный симметрический многочлен от переменных $x_1, x_2, ..., x_{2s}$. А именно, мы имеем

$$\sigma_0 = 1,$$

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_{2s},$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_{2s-1} x_{2s},$$

$$...$$

$$\sigma_{2s} = x_1 x_2 ... x_{2s}.$$

Тогда

$$\Phi(x) = \Phi_{2s}(x) - \Phi_{2s-1}(x) + ... - \Phi_1(x) + \Phi_0(x),$$

где

$$\Phi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_{2s}^n) x^n, k = 0, 1, ..., 2s.$$

Мы имеем

$$\sigma_k(\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_{2s}^n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq 2s} \xi_{i_1}^n \xi_{i_2}^n ... \xi_{i_k}^n.$$

Следовательно,

$$\Phi_k(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq 2s} \frac{\xi_{i_1} \xi_{i_2} ... \xi_{i_k} x}{1 - \xi_{i_1} \xi_{i_2} ... \xi_{i_k} x}.$$

Отметим, что $\Phi_k(x)$ симметрическая функция в корнях $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2s}$ многочлена $P(x)$. По теореме Виета, она является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами. Тогда функция $\Phi(x)$ также является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами. □

Предложение 2. *Если в последнем предложении выполнено условие* $\xi_{i+s}=\xi_i^{-1}$ *для* $i=1,2,...,s$, *то функция* $\Phi(x)$ *удовлетворяет соотношению* $\Phi(x)=-\Phi(1/x)$.

Доказательство. Действительно, если $\xi_{i+s}=\xi_i^{-1}$ для $i=1,2,...,s$, то функцию $\Phi(x)$ можно записать в следующем виде

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}(\xi_i^n-1)(\xi_i^{-n}-1)x^n=(-1)^s\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}(2T_n(\xi_i)-2)x^n.$$

С помощью формулы произведения косинусов углов мы можем представить выражение

$$\prod_{i=1}^{s}(2T_n(\xi_i)-2)$$

в виде линейной комбинации полиномов Чебышева первого рода вида

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(2T_n(\zeta_j)-2),$$

где α_j и ζ_j - величины, не зависящие от n. Этот факт по индукции следует из тождества

$$(2T_n(\eta)-2)(2T_n(\xi)-2)=(2T_n(\zeta_1)-2)+(2T_n(\zeta_2)-2)-2(2T_n(\zeta_3)-2)-2(2T_n(\zeta_4)-2),$$

где

$$\zeta_1=\eta\xi+\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\xi^2},$$
$$\zeta_2=\eta\xi-\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\xi^2},$$
$$\zeta_3=\eta,\zeta_4=\xi.$$

Указанное тождество получается из тригонометрического соотношения

$$(2\cos n\alpha-2)(2\cos n\beta-2)=(2\cos(n(\alpha+\beta))-2)+(2\cos(n(\alpha-\beta))-2)-$$
$$2(2\cos n\alpha-2)-2(2\cos n\beta-2),$$

при $\alpha=\arccos\xi,\beta=\arccos\eta$.

С другой стороны, функция

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2T_n(\zeta)-2)x^n=-\frac{2(\zeta-1)x(x+1)}{(x-1)\left(-2\zeta x+x^2+1\right)}$$

удовлетворяет соотношению $\phi(x)=-\phi(\frac{1}{x})$. Поскольку

$$\Phi(x)=(-1)^s\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}(\xi_i^n-1)(\xi_i^{-n}-1)x^n=(-1)^s\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\alpha_j(2T_n(\zeta_j)-2)x^n,$$

то эта функция также удовлетворяет соотношению

$$\Phi(x)=-\Phi(1/x).$$

$\square$

Доказательство теоремы 3. Мы воспользуемся предложениями 1 и 2. С этой целью, рассмотрим многочлен $P(z) = z^{s_k} Q(z)$, где $Q(z)$ многочлен, определенный в теореме 2. Отметим, что $P(z)$ — многочлен с целочисленными коэффициентами степени $2s_k$. По теореме 2 производящая функция

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n) x^n$$

может быть записана в следующей форме

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(s_k+1)n+s_k} \prod_{p=1}^{s_k} (z_p^n - 1)(z_p^{-n} - 1) x^n,$$

где $z_p, z_p^{-1} (p = 1, 2, ..., s_k)$ — все корни многочлена $P(z)$. В силу предложений 1 и 2, производящая функция является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами, для которой выполнено соотношение

$$\Phi(x) = -\Phi(1/x).$$

$\square$

§ 5. Число остовных лесов в циркулянтных графах нечетной валентности

Целью этого раздела является установление рациональности производящей функции для числа корневых остовных лесов в циркулянтном графе $C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$ нечетной валентности. Следующий результат был получен в ([5], Теорема 4.1).

Теорема 4. *Пусть $C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$, $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_k < n$—иркулянтный граф нечетной валентности. Тогда число $f_\Gamma(n)$ корневых остовных лесов в графе $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$ задается следующей формулой*

$$f_\Gamma(n) = \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(u_p) - 2)(2T_n(v_p) + 2),$$

где u_p и $v_p, p = 1, 2, ..., s_k$ — корни уравнений $Q(u) - 1 = 0$ и $Q(v) + 1 = 0$ соответственно. Здесь

$$Q(w) = 2k + 2 - 2\sum_{i=1}^{k} T_{s_i}(w)$$

и $T_s(w)$ — Чебышева первого рода.

Используя тождество $T_n(\frac{z+z^{-1}}{2}) = \frac{z^n+z^{-n}}{2}$, переформулируем предыдущую теорему следующим образом.

Теорема 5. *Число $f_\Gamma(n)$ корневых остовных лесов в графе $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$, $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_k < n$ нечетной валентности задается следующей формулой*

$$f_\Gamma(n) = (-1)^{s_k} \prod_{p=1}^{s_k} (u_p^n - 1)(u_p^{-n} - 1)(v_p^n + 1)(v_p^{-n} + 1),$$

где u_p, u_p^{-1}, $p = 1, 2, ..., s_k$ *— все корни уравнения* $Q(z) + 1 = 0$, *а* $v_p, v_p^{-1}, p = 1, 2, ..., s_k$ *— все корни уравнения* $Q(z) + 3 = 0$ *и*

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{k} (z^{s_i} - 1)(z^{-s_i} - 1).$$

§ 6. Производящая функция для числа остовных лесов в циркулянтных графах нечетной валентности

Основным результатом данного раздела является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $f_\Gamma(n)$ *— число корневых остовных лесов в циркулянтном графе* $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, ..., s_k, n)$ *нечетной валентности. Тогда производящая функция*

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n) x^n$$

является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами. Более того

$$\Phi(x) = -\Phi(\frac{1}{x}).$$

Доказательство теоремы опирается на теорему 5 и следующие два предложения.

Предложение 3. *Пусть* $U(x), V(x)$ *— полиномы степени* $2s$ *с целочисленными коэффициентами и пусть соответственно* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2s}$, *и* $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{2s}$ *все их корни. Тогда*

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{2s} (\xi_i^n - 1)(\eta_i^n + 1) x^n$$

— рациональная функция с целочисленными коэффициентами.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 1.

Предложение 4. *Если в последнем утверждении*

$$\xi_{i+s} = \xi_i^{-1} \text{ и } \eta_{i+s} = \eta_i^{-1}$$

для $i = 1, 2, ..., s$, *то функция* $\Phi(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi(x) = -\Phi(1/x).$$

Доказательство. Действительно, если $\xi_{i+s} = \xi_i^{-1}$ и $\eta_{i+s} = \eta_i^{-1}$ для $i = 1, 2, ..., s$, то функцию $\Phi(x)$ можно записать в следующем виде

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{s} (\xi_i^n - 1)(\xi_i^{-n} - 1)(\eta_i^n + 1)(\eta_i^{-n} + 1) x^n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^s \prod_{i=1}^{s} (2T_n(\xi_i) - 2)(2T_n(\eta_i) + 2) x^n.$$

Запишем

$$(2T_n(\xi_i) - 2)(2T_n(\eta_i) + 2) =$$

$$(2T_n(\xi_i)-2)(2T_n(\eta_i)-2)+4(2T_n(\xi_i)-2)$$

и воспользуемся рассуждениями из предложения 2, чтобы установить равенство $\Phi(x) = -\Phi(1/x)$.

$\square$

Доказательство теоремы 6. Мы воспользуемся предложениями 3 и 4. С этой целью, рассмотрим многочлены

$$U(z) = z^{s_k}(Q(z)+1) \text{ и } V(z) = z^{s_k}(Q(z)+3),$$

где $Q(z)$ многочлен, определенный в теореме 5. Отметим, что $U(z)$ и $V(z)$ — многочлены с целочисленными коэффициентами степени $2s_k$. По теореме 5 производящая функция

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n)x^n$$

может быть записана в следующей форме

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(s_k+1)n+s_k}\prod_{p=1}^{s_k}(u_p^n-1)(u_p^{-n}-1)(v_p^n+1)(v_p^{-n}+1)x^n,$$

где $u_p, u_p^{-1}, p = 1,2,...,s_k$ — все корни многочлена $U(z)$, а $v_p, v_p^{-1}, p = 1,2,...,s_k$ — все корни многочлена $V(z)$. В силу предложений 3 и 4, производящая функция является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющей условию

$$\Phi(x) = -\Phi(1/x).$$

$\square$

§ 7. Примеры

1. Рассмотрим циркулянтный граф $\Gamma = C_n(1)$. По теореме 1 находим число остовных лесов. Для этого, мы решаем уравнение $2T_1(z)-2=1$. Отсюда имеем $z = \frac{3}{2}$. Следовательно, $f_{C_n(1)}(n) = 2T_n(\frac{3}{2})-2$. Таким образом, производящая функция для числа остовных лесов в данном графе имеет вид

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2T_n(\frac{3}{2})-2)x^n = -\frac{x(x+1)}{(x-1)\left(x^2-3x+1\right)}.$$

2. Пусть $\Gamma = C_n(1,2)$. По теореме 1 имеем

$$f_\Gamma(n) = (-1)^n(2T_n(\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{29}\right))-2)(2T_n(\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{29}\right))-2).$$

   Таким образом, производящая функция

$$\Phi(x) = -\frac{(x-1)x\left(x^6-x^5+20x^4-14x^3+20x^2-x+1\right)}{(x+1)\left(x^4-7x^3+13x^2-7x+1\right)\left(x^4-x^3-5x^2-x+1\right)}.$$

3. Граф лента Мебиуса $\Gamma = C_{2n}(1, n)$.

   В этом случае по теореме 4 имеем $f_\Gamma(n) = (2T_n(u) - 2)(2T_n(v) + 2)$, где u и v — корни уравнений $Q(w) - 1 = 0$ и $Q(w) + 1 = 0$ соответственно, а $Q(w) = 4 - 2T_1(w)$. Решая соответствующие уравнения, мы находим $u = 3/2, v = 5/2$. Таким образом, $f_\Gamma(n) = (2T_n(3/2) - 2)(2T_n(5/2) + 2)$. Отсюда имеем

$$\Phi(x) = -\frac{\left(28p^3 - 100p^2 + 165p - 105\right)}{2(p-1)(2p-5)(2p-3)\left(2p^2 - 15p + 15\right)}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

   где

$$p = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

   Все производящие функции удовлетворяют соотношению $\Phi(x) = -\Phi(1/x)$.

Список литературы

1. *Boesch F. T. and Prodinger H.* Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials // *Graphs Combin.* 1986. V. 2. P. 191–200.

2. *Chen X. B.* The numbers of spanning trees in undirected circulant graph // *J. Zhangzhou Teach. Coll. (Nat. Sci.)* 2000. V. 13. № 4. P. 1–6.

3. *Chen X. B., Lin Q. Y.and Zhang F.J.* The number of spanning trees in odd valent circulant graphs // *Discrete Math.* 2004. V. 282. № 1. P. 69–79.

4. *Grunwald L.A., Kwon Y.S. and Mednykh I.A.* Counting rooted spanning forests for circulant foliation over a graph // *Tokohu Math. J.* 2022. V. 74. P. 535–548.

5. *Grunwald L.A. and Mednykh I.A.* The number of rooted forests in circulant graphs // *Ars Math. Contemp.* 2022. V. 22. #P.4.10, 12pp.

6. *Kwon Y. S., Mednykh A. D. and Mednykh I. A.* On Jacobian group and complexity of the generalized Petersen graph $GP(n; k)$ through Chebyshev polynomials // *Linear Algebra Appl.* 2017. V. 529. P. 355–373.

7. *Louis J.* Asymptotics for the number of spanning trees in circulant graphs and degenerating d-dimensional discrete tori // *Ann. Comb.* 2015. V. 19. № 3. P. 513–543.

8. *Mason J. C. and Handscomb D. C. Chebyshev Polynomials* / Taylor and Francis, London, 2002.

9. *Mednykh A.D., Mednykh I.A.* On the rationality of generating function for the number of spanning trees in circulant graphs // *Algebra Colloq.* 2020. V. 27.№ 1. P. 87–94.

10. *Mednykh A.D., Mednykh I.A.* The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic // *Discrete Math.* 2019. V. 342. P. 1772–1781.

Камалов Улугбек Полат улы
Институт математики
им. С.Л.Соболева СОРАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `u.kamalov@g.nsu.ru`

Кутбаев Айдос Бакберген улы
Нукусский государственный
педагогический институт
имени Ажинияза,
ул. П. Сейитова,
г. Нукус, УЗБЕКИСТАН.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `a.kutbaev@alumni.nsu.ru`

Медных Александр Дмитриевич
Институт математики
им. С.Л.Соболева СОРАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `smedn@mail.ru`

Поступила в редакцию
18 мая 2023 г.
Получена после доработки
31 июля 2023 г.
Принята к публикации
5 октября 2023 г. г.