УДК 517.518.1
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.207

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2023, том 26, № 2,138 - 161

ЛИПШИЦЕВЫ ОБРАЗЫ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ НА СУБЛОРЕНЦЕВЫХ СТРУКТУРАХ

М. Б. Карманова

Мы выводим сублоренцев аналог формулы площади для классов липшицевых во внутреннем смысле отображений открытых подмножеств групп Карно произвольной глубины, на образе которых введена сублоренцева структура.

Ключевые слова и фразы: субриманова квазиметрика, открытое множество, липшицево отображение, группа Карно, сублоренцева структура, мера Хаусдорфа, формула площади.

Введение

Исследование, проведенное в данной статье, является завершением решения задачи о формуле площади для C^1_H-отображений групп Карно, модельный случай которой решен в [5] (см. краткий вариант в [3]). Принципиальным отличием является то, что изучаются отображения открытых подмножеств групп Карно произвольной глубины (которая может быть и больше двух, в отличие от [5]), при непрерывно дифференцируемых в субримановом смысле отображениях, которые являются липшицевыми во внутреннем смысле, но не всегда являются липшицевыми и дифференцируемыми в классическом смысле. Еще одной особенностью является то, что на пространстве-образе введена сублоренцева структура. Такие структуры являются неголономным обобщением геометрии Минковского (см. [11] и список цитируемых источников; например, [26, 27]). Исследования как самих структур, так и их приложений в физике начались относительно недавно. Статья [1] является одной из первых работ, в которых исследовались подобные структуры. Далее, в [16, 17, 18, 19, 20, 21] получены описание и свойства достижимых множеств на классах сублоренцевых структур, также исследованы геодезические [22], выведены некоторые глобальные свойства структур [15]. Некоторые свойства сублоренцевых структур установлены на

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0006).

группах $\mathbb{H}$-типа, в частности, изучены геодезические и их связь с описанием движения релятивистской частицы в постоянном равномерном электромагнитном поле [24, 25]. Применение сублоренцевых структур к задачам физики описано в [9, 10]. Мы будем рассматривать и «классический» случай с одной временно́й переменной, и общий случай, где таких переменных несколько (такие структуры также изучаются с недавнего времени; см., например, [12, 13]).

Как и в [5], в задаче не исключены случаи и вырожденности субриманова дифференциала (в отличие от классов поверхностей-графиков; ср. [2, 6]). Кроме того, так как интерес для исследований представляют аналоги пространственноподобных поверхностей (то есть, локально лежащие вне световых конусов с вершинами на поверхности за исключением самой вершины), то одним из вспомогательных результатов статьи является описание свойств отображений, гарантирующих пространственноподобие их образов. В первом разделе мы приведем все необходимые определения и известные результаты, во втором — докажем промежуточный результат для открытых множеств, а в третьем — основной результат, формулу площади для липшицевых во внутреннем смысле отображений открытых множеств.

§ 1. Группы Карно и липшицевы отображения

Определение 1.1 (см., например, [14]). *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е., представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j,\ [V_1, V_j] = V_{j+1},\ j < M,\ [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \ldots, M$, не зависят от точки x.

Определение 1.2. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$, и $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V, причем

$$\begin{cases} X_1, \ldots, X_{\dim V_1} & \text{— базис } V_1, \\ X_{\dim V_1+\ldots+\dim V_{k-1}+1}, \ldots, X_{\dim V_1+\ldots+\dim V_k} & \text{— базис } V_k,\ 1 < k \le M. \end{cases}$$

Здесь символ $\dim V_k$ означает размерность V_k (в каждой точке x). Если $X_j \in V_k$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Если $x = \exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j\Big)(\mathbf{0})$, $y = \exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\Big)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j\Big)(\mathbf{0})$, где $z_j = x_j + y_j$ для $\deg X_j = 1$,

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu>0,\beta>0\\ |\mu+\beta|_h=\deg X_j}} F^j_{\mu,\beta} x^\mu y^\beta \tag{1}$$

при $\deg X_j > 1$, и для каждого N-мерного мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается $|\lambda|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \deg X_i$.

Здесь умножение $x \cdot y$ понимается в следующем смысле. Сначала движение идет до точки x вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j$ с началом в $\mathbf{0}$, а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j$ с началом в x. Таким образом, интегральная линия поля $\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\Big)(x)$.

Определение 1.3. Константы $\{F^j_{\mu,\beta}\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

Замечание 1.4. Так как на группе Карно по определению верно

$$[X_i, X_j] = \sum_{k\colon \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k,$$

где все $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ постоянны, а при вычислении координат $\{z_j\}_{j=1}^N$ используется формула Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа, то константы $\{F^j_{\mu,\beta}\}_{j,\mu,\beta}$ всегда определяются однозначно.

Определение 1.5. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\biggl(\sum_{i=1}^{N} v_i X_i\biggr)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (*относительно* $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

В качестве расстояния будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную известной метрике Карно — Каратеодори на группах Карно.

Определение 1.6. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, и $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\Bigr)(v)$. Определим величину d_2 следующим образом:

$$d_2(v, w) = \max\Bigl\{\Bigl(\sum_{j:\,\deg X_j = 1} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}, \Bigl(\sum_{j:\,\deg X_j = 2} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2\cdot 2}}, \dots, \Bigl(\sum_{j:\,\deg X_j = M} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2\cdot M}}\Bigr\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно* d_2 *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричености, и локально для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника. Кроме того, d_2 является субримановым обобщением евклидовой метрики.

Отметим, что часто в исследованиях на неголономных структурах используют метрику Карно — Каратеодори (см., например, [28]), описываемую ниже.

Определение 1.7. Кривая называется *горизонтальной*, если в почти каждой точке x ее касательный вектор принадлежит $V_1(x)$.

Определение 1.8. Значение *метрики Карно — Каратеодори* между точками равно точной нижней грани длин горизонтальных кривых, соединяющих эти точки.

Недостаток такой метрики состоит в том, что структура шаров в такой метрике в настоящее время известна только в нескольких частных случаях.

Свойство 1.9. Образ шара $\mathrm{Box}_2(v, r)$ при отображении θ_v^{-1} — декартово произведение M (евклидовых) шаров, диаметры которых равны $2r, 2r^2, \ldots, 2r^M$.

Свойство 1.10. С помощью свойства 1.9 непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна

$$\nu = \sum_{j=1}^{M} j \dim V_j.$$

Определение 1.11. Определим функцию множества $\mathcal{H}^\nu$ для $A \subset \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\mathcal{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \liminf_{\delta \to 0} \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_i, r_i) \supset A,\ y_i \in A,\ r_i < \delta \Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Здесь и далее символ ω_l обозначает объем евклидова шара единичного радиуса в $\mathbb{R}^l$.

Так как определение $\mathcal{H}^\nu$ нестандартное (центры шаров покрытия рассматриваются на самом множестве), то проведем некоторые несложные рассуждения, показывающие, что функция $\mathcal{H}^\nu$ является мерой.

Замечание 1.12. Функция множества $\mathcal{H}^\nu$ является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathcal{H}^N$ на $\mathbb{G}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно:

- рассмотреть покрытие множества нулевой $\mathcal{H}^N$-меры шарами $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, сумма мер которых не превосходит заданное $\varepsilon > 0$;
- на каждом шаре B_i применить теорему Витали для семейств шаров

  $$\big\{ B_{cc}(y, r) : y \in B_i, r > 0 \big\}$$

  в метрике Карно — Каратеодори (мы получим покрытие семейством шаров $\{B^i_{cc}(y_l, r_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ в метрике d_{cc}, сумма мер по всем l и i которых не превышает $K_{cc}\varepsilon$, где $K_{cc} < \infty$ зависит только от структуры группы Карно);

- каждый шар $B^i_{cc}(y_l, r_l)$ нового покрытия заменить на шар
$$B^i_2(y_l, Lr_l) \supset B^i_{cc}(y_l, r_l)$$
в квазиметрике d_2, где $d_2 < Ld_{cc}$, $0 < L < \infty$ (тогда сумма их $\mathcal{H}^N$-мер не будет превосходить $K_2\varepsilon$, где K_2 зависит только от структуры группы Карно).

Так как значение
$$\mathcal{H}^N\bigl(\mathrm{Box}_2(y, r)\bigr) = \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot r^\nu \cdot \sqrt{\det(g(y))} \cdot (1 + o(1)), \tag{2}$$
где g — риманов тензор на $\mathbb{G}$ (напомним, что $\mathbb{G}$ мы можем рассматривать, как риманово многообразие), а $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно на компактных окрестностях, то мы получили покрытие множества нулевой $\mathcal{H}^N$-меры набором шаров из определения $\mathcal{H}^\nu$, соответствующая которому сумма $\prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu$ не превосходит некоторой константы, зависящей от группы $\mathbb{G}$, умноженной на ε. Таким образом, функция множества $\mathcal{H}^\nu$ является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathcal{H}^N$.

Замечание 1.13. Из (2) для каждого $\mathrm{Box}_2(y_i, r_i)$ из определения 1.11 следует
$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot r_i^\nu = \frac{\mathcal{H}^N\bigl(\mathrm{Box}_2(y_i, r_i)\bigr)}{\sqrt{\det(g(y_i))}} \cdot (1 + o(1)),$$
откуда (снова применяя теорему Витали для покрытия $\mathrm{Box}_2(y, r)$ множествами $\bigl\{\mathrm{Box}_2(w, \rho)\bigr\}_{w\in\mathrm{Box}_2(y,r), \rho>0}$ и объединяя выбранное покрытие с покрытием оставшегося множества нулевой меры) выводим, что
$$\mathcal{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y, r)) = \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot r_i^\nu \cdot (1 + o(1)),$$
где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ равномерно на компактных окрестностях (см. аналогичные аргументы в [2]). Таким образом, функция множества $\mathcal{H}^\nu$ удовлетворяет условию удвоения.

Так как функция множества $\mathcal{H}^\nu$ является аддитивной на удаленных шарах, выводим [29, 30]

Свойство 1.14. Функция множества $\mathcal{H}^\nu$ дифференцируема по мере $\mathcal{H}^N$ и восстанавливается по своей производной. Таким образом, $\mathcal{H}^\nu$ обладает свойством счетной аддитивности и является мерой.

Определение 1.15. Функция множества $\mathcal{H}^\nu$ называется *субримановой мерой.*

Рассмотрим теперь еще одну группу Карно $\widetilde{\mathbb{G}}$ с алгеброй Ли $\widetilde{V} = \bigoplus\limits_{k=1}^{\widetilde{M}} \widetilde{V}_k$ и базисными полями $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_{\widetilde{N}}$ такую, что $\widetilde{M} \geq M$, и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$. Тогда и топологическая размерность $\widetilde{N}$ группы $\widetilde{\mathbb{G}}$ строго больше, чем N. Квазиметрику, построенную на $\widetilde{\mathbb{G}}$ так же, как описано в определении 1.6, обозначим символом $\widetilde{d}_2$.

Определим сублоренцеву структуру на $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Обозначение 1.16. Для каждого $k = 1, \ldots, M$ выберем целые числа $\dim \widetilde{V}_k^- \in \overline{[0, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k]}$.

Кроме того, положим $\widetilde{n}_0 = 0$ и $\widetilde{n}_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \dim \widetilde{V}_k$.

Определение 1.17. Пусть $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{N}} w_i \widetilde{X}_i\Bigr)(v)$, $v, w \in \widetilde{\mathbb{G}}$. Положим величину $\mathfrak{d}_2^2(v, w)$ равной

$$\max_{k=1,\ldots,\widetilde{M}} \biggl\{ \Bigl| \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^- +1}^{\widetilde{n}_k} w_j^2 - \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+1}^{\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_1^-} w_j^2 \Bigr|^{1/k} \times$$
$$\times \operatorname{sgn}\Bigl(\sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^- +1}^{\widetilde{n}_k} w_j^2 - \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+1}^{\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_1^-} w_j^2 \Bigr) \biggr\}.$$

Множество $\{w \in \widetilde{\mathbb{G}} : \mathfrak{d}_2^2(v, w) < r^2\}$ называется *шаром относительно* $\mathfrak{d}_2^2$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(v, r)$.

Для исследования метрических свойств лежащих в $\widetilde{\mathbb{G}}$ поверхностей достаточно рассматривать приведенный выше аналог квадрата расстояния $\mathfrak{d}_2^2$, без перехода к корням из участвующих в определении величин. Опишем меру на образе, построенную с помощью такой системы шаров.

Определение 1.18. Пусть $B \subset \widetilde{\mathbb{G}}$. Определим функцию множества $\mathcal{H}^{\mu}_{\mathfrak{d}}$ следующим образом:

$$\omega_{\mathfrak{d}} \cdot \lim_{\delta \to 0} \inf \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{\mu} : \ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B \big) \supset B, \ x_i \in B, \ r_i < \delta \Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества B, $\omega_{\mathfrak{d}}$ — заранее выбранный нормировочный коэффициент, кроме того, символ $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B$ означает компоненту связности множества $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap B$, содержащую точку x_i.

Замечание 1.19. Требование использовать пересечение $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B$ вместо $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap B$ связано со спецификой структуры, а именно, с неограниченностью шаров; см. подробности и комментарии в [5, 4].

Заметим, что функция множества $\mathcal{H}^{\mu}_{\mathfrak{d}}$ является мерой, если ее рассматривать на образах классов липшицевых во внутреннем смысле отображений. Это будет доказано далее; см. теоремы 2.28 и 3.31.

Мы будем рассматривать случай $\mu = \nu$ и $\omega_{\mathfrak{d}} = \prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k}$. А в качестве B мы исследуем образы классов липшицевых во внутреннем смысле отображений $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество.

Заметим, что функции множества, описываемые в определениях 1.11 и 1.18, зависят от наборов векторных полей из определений 1.6 и 1.17 функций расстояния и аналога квадрата расстояния.

Далее мы, в частности, опишем условия, при которых пересечение образа $\varphi(\Omega)$ с шарами $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r)$, $x \in \varphi(\Omega)$, ограничено.

Приведем определение субриманова аналога дифференцируемости для рассматриваемого случая и некоторые важные результаты.

Определение 1.20 ([28]; см. также [31])**.** Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(y), \mathcal{L}_x\langle y \rangle) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \to 0 \text{ при } \Omega \ni y \to x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathcal{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Определение 1.21. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Если φ является липшицевым относистельно квазиметрик d_2 и $\widetilde{d}_2$, то будем говорить, что φ *липшицево во внутреннем смысле.*

Следующий результат установлен в P. Pansu [28] для открытых множеств, и С.К. Водопьяновым ([32]; см. также, например, [31], где этот результат доказан для более общего случая пространств Карно — Каратеодори) для измеримых множеств.

Теорема 1.22. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда оно hc-дифференцируемо почти всюду.*

Обозначение 1.23. Здесь и далее символ $V_1\varphi$ обозначает множество

$$\operatorname{span}\{X_1\varphi, \dots, X_{\dim V_1}\varphi\}.$$

Сформулируем еще один результат, представляющий независимый интерес.

Теорема 1.24 ([31]). *Если $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, принадлежит классу C_H^1, то есть, оно непрерывно дифференцируемо вдоль полей $X_1, \dots, X_{\dim V_1}$ и $V_1\varphi \subseteq \widetilde{V}_1$, то оно непрерывно hc-дифференцируемо всюду на Ω. Если, дополнительно, φ принадлежит классу C^1, то матрица его hc-дифференциала (или, субриманова дифференциала) $\widehat{D}\varphi$ состоит из «диагональных» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоков матрицы классического дифференциала $D\varphi$ всюду на Ω, а остальные элементы нулевые, тогда как матрица классического дифференциала имеет блочно-верхнетреугольный вид.*

Здесь и далее под «диагональными» блоками понимаются блоки, состоящие из элементов, номер строки которых соответствует полям из $\widetilde{V}_k$, а номер столбца — полям из V_k, $k = 1, \dots, M$. Таким образом, размерность этих блоков равна $\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k$. Обозначим «диагональные» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоки матрицы классического дифференциала $D\varphi$, из которых составлена матрица $\widehat{D}\varphi$, символами $\widehat{D}_k\varphi$, $k = 1, \dots, M$.

Далее мы будем рассматривать отображения класса C_H^1, определенные на открытых подмножествах групп Карно.

§ 2. Основные результаты для горизонтальных гомоморфизмов

Так как субриманов дифференциал — это горизонтальный гомоморфизм, сформулируем сначала результаты для этих классов отображений. По определению, такое отображение является контактным, и оно определено на открытом множестве. Рассмотрим в качестве основного случай, когда горизонтальный гомоморфизм невырожден. Обозначим его символом L; без ограничения общности в силу левоинвариантности базисных полей можем считать, что он устроен следующим образом:

$$\exp\Big(\sum_{i=1}^{N} w_i X_i\Big)(\mathbf{0}) = w \mapsto L\langle w\rangle = \exp\Big(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\Big(\sum_{k=1}^{N} L_{jk} w_k\Big)\widetilde{X}_j\Big)(\widetilde{\mathbf{0}}).$$

Обозначим каждый «диагональный» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блок символом L_k, $k = 1, \ldots, M$. В каждом из этих блоков часть, состоящую из первых $\dim V_k^-$ строк, обозначим, как L_k^-, а оставшуюся — символом L_k^+.

Верно следующее свойство.

Теорема 2.25. *Пусть L — невырожденный горизонтальный гомоморфизм. Необходимым условием пересечения множества* $\operatorname{Im} L$ *и*

$$\Big\{w \in \widetilde{\mathbb{G}} :\ \mathfrak{d}_2^2(\widetilde{\mathbf{0}}, w) \le 0\Big\} \tag{3}$$

в единственной точке $\widetilde{\mathbf{0}}$ является невырожденность всех матриц L_k^+, $k = 1, \ldots, M$.

Если еще в каждом L_k^+ найдутся $\dim V_k$ строк, составленная из которых матрица $\widehat{L}_k^+$ такова, что длины столбцов $L_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}$ не превосходят $\frac{1}{\dim V_k} - c$, где $c > 0$, $k = 1, \ldots, M$, то верны следующие утверждения.

1. *Пересечение множества (3) с* $\operatorname{Im} L$ *будет состоять из единственной точки $\widetilde{\mathbf{0}}$.*

2. *Пересечение шара $\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(\widetilde{\mathbf{0}}, r)$ с множеством* $\operatorname{Im} L$ *будет ограниченным.*

3. *На* $\operatorname{Im} L$ *значения $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ локально билипшицево эквивалентны.*

4. *Матрица $\widehat{L}_k^+$ определяется единственным образом с точностью до перестановок строк внутри нее, $k = 1, \ldots, M$.*

Доказательство. Необходимое условие невырожденности всех матриц L_k^+, $k = 1, \ldots, M$, доказывается почти дословно [5, Теорема 9, Шаг 1] с очевидными изменениями.

Кроме того, пп 1 и 2 также доказываются аналогично [5, Теорема 9, Шаг 2] с очевидными изменениями. Доказательство п. 3 для величин $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$, посчитанных относительно $\widetilde{\mathbf{0}}$, также следует схеме [5, Теорема 9, Шаг 2]. Если же $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ считаются относительно $\operatorname{Im} L \ni x \neq \widetilde{\mathbf{0}}$, то достаточно использовать сдвиг на элемент, обратный элементу x, и применить свойство левоинвариантности L.

Установим п. 4. Фиксируем $k \in \overline{[1, M]}$ и рассмотрим $(\dim V_k \times \dim \widetilde{V}_k)$-матрицу $\widetilde{L} = (L_k)^T$. Обозначим $(L_k^+)^T$ символом $\widetilde{L}^+$, $(L_k^-)^T$ — символом $\widetilde{L}^-$, а $(\widehat{L}_k^+)^T$ — символом $\widetilde{L}_0$. Для нее условие п. 4 имеет следующий вид. *Матрица $\widetilde{L}_0$, составленная из $\dim V_k$ столбцов $\widetilde{L}^+$, такая, что длины строк $\widetilde{L}_0^{-1}\widetilde{L}^-$ не превосходят $\frac{1}{\dim V_k} - c$, где $c > 0$, если существует, то определяется единственным образом.* Такое утверждение установлено в [7, Лемма 2.12]. Заметим, что принадлежность столбцов, из которых составлена $\widetilde{L}_0$, части $\widetilde{L}^+$ не влияет на ее единственность (как и в [7]: там достаточно выполнения п. 3 Предположения 2.7 той статьи). Теорема доказана. □

Предположение 2.26. Далее без ограничения общности будем считать, что $\widehat{L}_k^+$ состоит из строк блока L_k, имеющих в этом блоке номера $\dim \widetilde{V}_k - \dim V_k + 1, \ldots, \dim \widetilde{V}_k$ для всех $k = 1, \ldots, M$.

Обозначение 2.27. Обозначим блок, состоящий из строк L_k, имеющих в этом блоке номера $\dim \widetilde{V}_k^- + 1, \ldots, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k$, символом $\bar{L}_k^+$ для всех $k = 1, \ldots, M$.

Сформулируем и выведем еще одно утверждение для горизонтальных гомоморфизмов.

Теорема 2.28. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — двухступенчатые группы Карно, и $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество. Для горизонтального гомоморфизма L, удовлетворяющего условиям теоремы 2.25, справедлива формула площади*

$$\prod_{k=1}^{M} \sqrt{\det\bigl((L_k^+)^* L_k^+ - (L_k^-)^* L_k^-\bigr)} \cdot \mathcal{H}^\nu(\Omega) = \mathcal{H}^\nu_{\mathfrak{d}}\bigl(L(\Omega)\bigr). \tag{4}$$

Доказательство. Первым шагом доказательства будет вычисление меры $\mathcal{H}^N(\operatorname{Im} L \cap^x \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r))$, где $x \in \operatorname{Im} L$, вторым — вычисление $\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\operatorname{Im} L \cap^x \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r))$, а третьим — вывод (4).

Шаг 1. Перейдем в нормальные координаты в образе и прообразе и рассмотрим отображение

$$\mathcal{L} = \theta_{\widetilde{\mathbf{0}}}^{-1} \circ L : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^{\widetilde{N}}.$$

Применим для $\mathcal{L}$ идеи [5], согласно которым образ $\mathcal{L}$ представлен в виде графика, построенного по отображению

$$\big(\theta_{\widetilde{\mathbf{0}}}^{-1} \circ L_0\big)\langle w \rangle \mapsto \mathcal{L}\langle w \rangle, \tag{5}$$

где L_0 — такое отображение, что матрица отображения $L_0 \circ \theta_{\mathbf{0}}$ является квадратной и невырожденной размерности N, в нормальных координатах имеющей вид

$$\begin{pmatrix} \widehat{L}_1^+ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{L}_2^+ & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{L}_M^+ \end{pmatrix}.$$

Следовательно, дифференциал отображения-графика имеет вид

$$\begin{pmatrix} L_1^-(\widehat{L}_1^+)^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{L}_1^+(\widehat{L}_1^+)^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E_{\dim V_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & L_2^-(\widehat{L}_2^+)^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_2^+(\widehat{L}_2^+)^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E_{\dim V_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & L_M^-(\widehat{L}_M^+)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{L}_M^+(\widehat{L}_M^+)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_{\dim V_M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим, что коэффициент искажения $\mathcal{H}^N$-меры в $\mathbf{0}$ при параметризации (5) равен значению

$$\prod_{k=1}^{M}\det\big(E_{\dim V_k}+\big(L_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)^*\big(L_k^-(\widehat{L}_1^+)^{-1}\big)+\big(\bar{L}_k^+(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)^*\big(\bar{L}_k^+(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)\big)^{1/2}.$$

Так как L — горизонтальный гомоморфизм, то непосредственными вычислениями проверяется, что если рассмотреть композицию L с θ_x^{-1}, $x\in\operatorname{Im}L$, вместо композиции с $\theta_{\widetilde{\mathbf{0}}}^{-1}$, а на прообразе координаты элементов считать относительно $L^{-1}\langle x\rangle$, то матрицы дифференциалов всех перечисленных выше отображений будут иметь такой же вид. Поэтому коэффициент искажения во всех точках один и тот же.

Далее остается почти дословно с очевидными изменениями применить аргументы [5, Доказательство теоремы 13] и [7, Доказательство теоремы 3.2, Шаг 3]; см. также [2, 6]. Из них следует, что

$$\mathcal{H}^N\big(\operatorname{Im}\mathcal{L}\cap^0\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(0,r)\big)=\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot r^{\nu}\times$$
$$\times\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big(E_{\dim V_k}+\big(L_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)^*\big(L_k^-(\widehat{L}_1^+)^{-1}\big)+\big(\bar{L}_k^+(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)^*\big(\bar{L}_k^+(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)\big)^{1/2}}{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big(E_{\dim V_k}-\big(L_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)^*\big(L_k^-(\widehat{L}_1^+)^{-1}\big)+\big(\bar{L}_k^+(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)^*\big(\bar{L}_k^+(\widehat{L}_k^+)^{-1}\big)\big)^{1/2}}.$$

Третий множитель этого выражения преобразуется в вид

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big((\widehat{L}_k^+)^*\widehat{L}_k^++(L_k^-)^*L_k^-+(\bar{L}_k^+)^*\bar{L}_k^+\big)^{1/2}}{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big((\widehat{L}_k^+)^*\widehat{L}_k^++(\bar{L}_k^+)^*\bar{L}_k^+-(L_k^-)^*L_k^-\big)^{1/2}}$$
$$=\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big(L_k^*L_k\big)^{1/2}}{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big((L_k^+)^*L_k^+-(L_k^-)^*L_k^-\big)^{1/2}}.\qquad(6)$$

Таким образом,

$$\mathcal{H}^N\big(\operatorname{Im}\mathcal{L}\cap^0 \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(0,r)\big)=\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot r^{\nu}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big(L_k^*L_k\big)^{1/2}}{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big((L_k^+)^*L_k^+-(L_k^-)^*L_k^-\big)^{1/2}}.$$

Заметим, что аналогичный результат справедлив и для $\mathcal{L}_x=\theta_x^{-1}\circ L$, где $x\in\operatorname{Im}L$. Следовательно,

$$\mathcal{H}^N\big(\operatorname{Im}L\cap^x \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r)\big)=\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot r^{\nu}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big(L_k^*L_k\big)^{1/2}\det\big(\widetilde{g}|_{\operatorname{Im}L}(x)\big)^{1/2}}{\prod\limits_{k=1}^{M}\det\big((L_k^+)^*L_k^+-(L_k^-)^*L_k^-\big)^{1/2}}$$

с точностью до множителя $1+o(1)$, где $\widetilde{g}|_{\operatorname{Im}L}$ — ограничение риманова тензора в образе на $\operatorname{Im}L$, а $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на компактных окрестностях.

Шаг 2. Покажем теперь, что

$$\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}\big(\operatorname{Im}L\cap^x \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r)\big)=\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot r^{\nu}\cdot(1+o(1)),\tag{7}$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на компактных окрестностях.

Согласно теореме 2.25, обе части выражения (6) ограничены и строго отделены от нуля. Поэтому достаточно применить схему доказательства [23], как и в работе [5], чтобы убедиться в справедливости соотношения (7). Основная идея описана в замечании 1.13.

Шаг 3. Чтобы вывести (4), осталось установить, что $\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ является мерой на подмножествах $\operatorname{Im}L$. Рассмотрим функцию множества

$$\Omega\supset A\mapsto\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}\big(L(A)\big).$$

Так как на $\operatorname{Im}L$ значения $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ локально билипшицево эквивалентны, и, кроме того, отображение L является билипшицевым относительно d_2 и $\widetilde{d}_2$ на свой образ (это следует из определения горизонтального гомоморфизма), то мы можем рассмотреть на Ω систему шаров

$$\big\{L^{-1}(\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r))\big\}_{x\in\operatorname{Im}L,r>0}.$$

Из (7) выводим, что на такой системе L удовлетворяет условию удвоения (следовательно, условие удвоения выполняется и для системы шаров $\{\mathrm{Box}_2(y,r)\}_{y\in\Omega, r>0}$).

Абсолютная непрерывность относительно $\mathcal{H}^N$ доказывается теми же аргументами, что и абсолютная непрерывность $\mathcal{H}^\nu$ относительно $\mathcal{H}^N$ (см. замечание 1.12), где при переходе от прообраза к образу используется билипшицевость L на свой образ и билипшицевая эквивалентность величин $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$.

Из билипшицевости L на свой образ и билипшицевой эквивалентности величин $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ вытекает и аддитивность на удаленных шарах.

Отсюда следует, что функция множества $\mathcal{H}^\nu_{\mathfrak{d}}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathcal{H}^N$ на $\operatorname{Im} L$; кроме того, она восстанавливается по своей производной, поэтому обладает свойством аддитивности и, таким образом, является мерой. Мы получаем

$$D_{\mathcal{H}^N}\mathcal{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(x) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{M} \det\big((L_k^+)^*L_k^+ - (L_k^-)^*L_k^-\big)^{1/2}}{\prod\limits_{k=1}^{M} \det\big(L_k^*L_k\big)^{1/2} \det\big(\widetilde{g}|_{\operatorname{Im} L}(x)\big)^{1/2}}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось вывести (4) из классической формулы площади. Имеем

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{M} \sqrt{\det\big((L_k^+)^*L_k^+ - (L_k^-)^*L_k^-\big)} \cdot \mathcal{H}^\nu(\Omega) \\
&\qquad = \int\limits_{\Omega} \prod_{k=1}^{M} \sqrt{\det\big((L_k^+)^*L_k^+ - (L_k^-)^*L_k^-\big)}\, d\mathcal{H}^\nu(y) \\
&\qquad = \int\limits_{\Omega} \frac{\prod\limits_{k=1}^{M} \sqrt{\det\big((L_k^+)^*L_k^+ - (L_k^-)^*L_k^-\big)}}{\sqrt{\det g(y)}}\, d\mathcal{H}^N(y) \\
&\qquad = \int\limits_{L(\Omega)} \frac{\prod\limits_{k=1}^{M} \sqrt{\det\big((L_k^+)^*L_k^+ - (L_k^-)^*L_k^-\big)}}{\sqrt{\det g(L^{-1}(x))}\mathcal{J}(L, L^{-1}(x))}\, d\mathcal{H}^N(x)
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{L(\Omega)} \frac{\sqrt{\det g(L^{-1}(x))}\prod\limits_{k=1}^{M}\sqrt{\det\bigl((L_k^+)^*L_k^+ - (L_k^-)^*L_k^-\bigr)}}{\sqrt{\det g(L^{-1}(x))}\prod\limits_{k=1}^{M}\sqrt{\det\bigl(L_k^*L_k\bigr)}\sqrt{\det\bigl(\widetilde{g}|_{\operatorname{Im} L}(x)\bigr)}}\,d\mathcal{H}^N(x)$$

$$= \int\limits_{L(\Omega)} D_{\mathcal{H}^N}\mathcal{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(x)\,d\mathcal{H}^N(x) = \int\limits_{L(\Omega)} d\mathcal{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(x) = \mathcal{H}^\nu_{\mathfrak{d}}\bigl(L(\Omega)\bigr).$$

Следовательно, выражение (4) справедливо, и теорема доказана. $\square$

Таким образом, мы установили вспомогательные результаты, которые применим далее для общего случая.

§ 3. Площадь поверхности-образа

Перейдем теперь к исследованию образов открытых множеств при отображениях $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ класса C^1_H, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество. Сначала будем считать, что hc-дифференциал $\widehat{D}\varphi$ отображения невырожден, кроме того, для него в каждой точке выполнены условия теоремы 2.25.

Напомним, что hc-дифференциал отображения класса C^1_H является горизонтальным гомоморфизмом (см. определение 1.20).

Обозначение 3.29. Обозначим каждый «диагональный» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блок $\widehat{D}\varphi$ символом $\widehat{D}_k$, $k = 1, \dots, M$. В каждом из этих блоков часть, состоящую из первых $\dim V_k^-$ строк, обозначим, как $\widehat{D}_k^-$, а оставшуюся — символом $\widehat{D}_k^+$.

Из [7, Лемма 2.12] следует

Свойство 3.30. Если обозначить $\widehat{D}\varphi(y)$ символом $L(y)$, то в терминах теоремы 2.25 блок, обладающий свойствами $\widehat{L}_k^+$ на каждой компоненте связности Ω, определяется единственным образом для всех $k = 1, \dots, M$.

Основной результат данного раздела — следующая

Теорема 3.31. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, где $\widetilde{M} \geq M$, и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, и $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество. Пусть еще $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — отображение класса C^1_H, для hc-дифференциала которого* *всюду выполнены условия теоремы* 2.25 *с некоторым постоянным* $c > 0$. *Тогда справедлива формула площади*

$$\int\limits_{\Omega} \prod_{k=1}^{M} \sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^+\varphi(y)^*\widehat{D}_k^+\varphi(y) - \widehat{D}_k^-\varphi(y)^*\widehat{D}_k^-\varphi(y)\bigr)}\, d\mathcal{H}^\nu(y)$$
$$= \int\limits_{\widetilde{\mathbb{G}}} \sum_{y:\, y\in\varphi^{-1}(x)} 1\, d\mathcal{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(x). \quad (8)$$

Замечание 3.32. Если рассмотреть ограничение $\varphi|_U$, где $U \Subset \Omega$, то требование выполнения для hc-дифференциала условий теоремы 2.25 с некоторым постоянным $c > 0$ можно заменить на более слабое: длины описываемых столбцов должны быть строго меньше, чем $1/\dim V_k$, $k = 1, \ldots, M$. Действительно, тогда в каждой точке $y \in \overline{U}$ длины столбцов не превосходят $1/\dim V_k - c_y$, $c_y > 0$, $k = 1, \ldots, M$, поэтому в силу непрерывности найдется окрестность $W(y)$ этой точки, на которой данное условие выполнено для $c_y/2 > 0$. Далее остается выбрать конечное покрытие $\{W(y_l)\}_{l=1}^L$, $L < \infty$, множества $\overline{U} \supset U$, и выбрать наименьшее значение из всех величин $\{c_{y_l}\}_{l=1}^L$.

В общем же случае, если $c = 0$, то при исчерпании области определения множествами, на которых условия теоремы 2.25 верны для $1/n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, требуются дополнительные исследования поведения меры $\mathcal{H}^\nu_{\mathfrak{d}}$ на счетных объединениях образов таких множеств, что не ставится целью данной статьи.

Идея доказательства использует подходы и результаты [5]. Поэтому сделаем акцент здесь на аргументах, отличающихся от примененных в [5].

Доказательство теоремы 3.31. Прежде всего, разобьем область определения на подмножества, где φ является биективным на свой образ. Без ограничения общности в дальнейших рассуждениях обозначим одно из таких подмножеств также символом Ω. Кроме того, без ограничения общности мы можем полагать, что Ω является компактной окрестностью, и величина $o(1)$ из определения субримановой дифференцируемости на ней равномерна [31].

Воспользуемся идеей работы [8]. Фиксируем $y \in \Omega$, и рассмотрим шар $\mathrm{Box}_2(y, r)$ и его образ $\varphi(\mathrm{Box}_2(y, r))$. Наша задача — во-первых, вычислить значение $\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}\big(\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))\big)$ и, во-вторых, показать, что $\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ является мерой на $\varphi(\Omega)$.

Фиксируем $\delta>0$ и рассмотрим покрытие $\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ из определения 1.18, где $x_i\in\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))$, $r_i<\delta$, $i\in\mathbb{N}$, множества $\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))$. Тогда имеем (см. теорему 2.28)

$$\prod_{k=1}^{M}\omega_k\sum_{i\in\mathbb{N}}r_i^{\nu}=(1+o(1))\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}\big(\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(y_i)\cap^{x_i}\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r)\big),\tag{9}$$

где $y_i=\varphi^{-1}(x_i)$, $i\in\mathbb{N}$. Полагая

$$\psi_i:w\mapsto\widehat{D}\varphi(y_i)\langle w\rangle,$$

выводим, что правая часть (9) с точностью до множителя $1+o(1)$ совпадает со значением

$$\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\big(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)\big)}\times$$
$$\times\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\nu}\big(\psi_i^{-1}\big(\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(y_i)\cap^{x_i}\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r)\big)\big).\tag{10}$$

Заметим, что по выбору Ω координаты, посчитанные относительно x_i, точки $\psi_i(w)$ при полях степени k отличаются от соответствующих координат точки $\varphi(w)$ на величину $\varepsilon(d_2(y_i,w))^k$ (см. также (1)), если $d_2(y_i,w)<\delta$, для всех $y_i\in\Omega$, $k=1,\dots,M$. Здесь ε задано произвольным образом, а δ определяется по ε на всем Ω в силу равномерности величины $o(1)$ из определения субримановой дифференцируемости. Тогда, чтобы показать, что, во-первых, на $\varphi(\Omega)$ величины $(\widetilde{d_2})^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ локально билипшицево эквивалентны, и, во-вторых,

$$\psi_y^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r-\varepsilon r))\subset\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r)\cap^{x}\varphi(\Omega))\subset\psi_y^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r+\varepsilon r)),$$

достаточно использовать аргументы [5, Теорема 9, Шаг 3; Лемма 14] с очевидными изменениями.

В силу справедливости данных включений выводим, что (10) с точностью до множителя $1+o(1)$ совпадает с

$$\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\big(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)\big)}\times$$
$$\times\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^{\nu}\big(\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r)\cap^{x_i}\varphi(\Omega))\big).\tag{11}$$

Следовательно, точная нижняя грань значений левой части (9) достигается тогда и только тогда, когда значение (11) с точностью до множителя $1+o(1)$ близко с точной нижней грани.

Напомним, что второй множитель выражения (11) — это сумма мер прообразов пересечений $\varphi(\Omega)$ с шарами, построеннными относительно $\mathfrak{d}$, где эти прообразы покрывают множество

$$\varphi^{-1}\big(\varphi\big(\mathrm{Box}_2(y,r)\big)\big)=\mathrm{Box}_2(y,r).$$

В силу билипшицевости φ на свой образ и локальной билипшицевой эквивалентности $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ для каждого прообраза верно

$$\mathrm{Box}_2(y_i,r/K)\subset\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r)\cap^{x_i}\varphi(\Omega))\subset\mathrm{Box}_2(y_i,rK),$$

где начение $1\leq K<\infty$ одно и тоже, $y_i=\varphi^{-1}(x_i)$, $i\in\mathbb{N}$. Тогда для доказательства того, что

$$\inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^\nu\big(\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r)\cap^{x_i}\varphi(\Omega))\big)\Big\}=\mathcal{H}^\nu\big(\mathrm{Box}_2(y,r)\big),$$

достаточно

- по теореме Витали выбрать набор $\big\{\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)\cap^{x_i}\varphi(\Omega))\big\}_{i\in\mathbb{N}}$, покрывающий $\mathrm{Box}_2(y,r)$ с точностью до множества $\mathcal{H}^\nu$-меры нуль;
- для оставшегося множества $\mathcal{H}^\nu$-меры нуль выбрать покрытие шарами $\{\mathrm{Box}_2(y_j,r_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, сумма $\mathcal{H}^\nu$-мер которых не превосходит заранее заданного $\widehat{\varepsilon}>0$;
- этот набор шаров заменить на набор $\big\{\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,Kr_j)\cap^{x_j}\varphi(\Omega))\big\}_{j\in\mathbb{N}}$, $x_j=\varphi(y_j)$, $j\in\mathbb{N}$; тогда сумма мер элементов этого набора не будет превосходить $\widehat{K}\widehat{\varepsilon}$, $\widehat{K}<\infty$.

Так как сумма $\mathcal{H}^\nu$-мер набора $\big\{\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)\cap^{x_i}\varphi(\Omega))\big\}_{i\in\mathbb{N}}$ не превосходит $\mathcal{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))\cdot(1+o(1))$, где $o(1)\to 0$ при $\delta\to 0$ (множества покрытия не обязательно лежат полностью в $\mathrm{Box}_2(y,r)$), то отсюда мы получим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\nu\big(\mathrm{Box}_2(y,r)\big)\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}&\mathcal{H}^\nu\big(\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)\cap^{x_i}\varphi(\Omega))\big)\\&+\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^\nu\big(\varphi^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,Kr_j)\cap^{x_j}\varphi(\Omega))\big)\\&\qquad\qquad\leq\mathcal{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))\cdot(1+o(1))+\widehat{K}\widehat{\varepsilon},\end{aligned}$$

где $o(1)\to 0$ при $\delta\to 0$ (см. также замечания 1.12 и 1.13, и подробности в [8]). Таким образом, значение $\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}\big(\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))\big)$ равно

$$\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\big(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)\big)}\cdot\mathcal{H}^{\nu}\big(\mathrm{Box}_2(y,r)\big)\cdot(1+o(1)),$$

где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$ равномерно на Ω. Отсюда следует абсолютная непрерывность функции множества

$$A\mapsto\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(A)) \tag{12}$$

относительно $\mathcal{H}^{\nu}$, а также, то, что она удовлетворяет условию удвоения. А из локальной билипшицевой эквивалентности на $\varphi(\Omega)$ величин $(\widetilde{d_2})^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ вытекает аддитивность на удаленных шарах; см. замечание 1.12 и теорему 2.28.

Следовательно, применим [29, 30] и получим, что производная $D_{\mathcal{H}^{\nu}}\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ существует и равна

$$\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\big(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)\big)},$$

и функция множества (12) восстанавливается по этой производной и является мерой. Таким образом, верно

$$\int\limits_{\Omega}\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\big(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)\big)}\,d\mathcal{H}^{\nu}(y)=\int\limits_{\widetilde{\mathbb{G}}}d\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(x). \tag{13}$$

Далее остается исчерпать область определения наборами компактно вложенных открытых множеств, на каждом из которых φ билипшицево на свой образ, применить к каждому из них (13), и далее следовать схеме доказательства, изложенной в [8]. Заметим, что образ множества нулевой $\mathcal{H}^{\nu}$-меры, оставшегося после исчерпания, будет также иметь нулевую $\mathcal{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$-меру, так как $\mathfrak{d}_2^2\le(\widetilde{d_2})^2$. Поэтому в общем случае будет справедлива формула (8). Теорема доказана. □

Предположим теперь, что множество Ω_0, на котором ранг матрицы субриманова дифференциала не является максимальным, непусто. Тогда оно не повлияет на обе части формулы площади [5] при выполнении следующих ограничений: если L — hc-дифференциал в точке $y \in \Omega_0$, то ранг L_k^+ должен быть равен рангу $r_k \le \dim V_k$ блока L_k, и в формулировке теоремы 2.25 блок $\widehat{L}_k^+$ необходимо заменить на блок $\widehat{L}_{r_k}^+$, полученный поворотом r_k линейно независимых строк L_k^+ в пространство $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$, $k = 1, \ldots, M$ (это гарантирует аддитивность на удаленных шарах). Кроме того, в определении 1.18 для случая Ω_0 термин «компонента связности» меняется на «прообраз множества $\operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_i) \cap^{x_i} \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)$ при проекции $\varphi(U(y_i))$ на $\operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_i)$, где $y_i \in \Omega_0$, а $U(y_i)$ — окрестность этой точки».

Окончательно, с учетом результата о множестве вырождения субриманова дифференциала, выводим результат.

Теорема 3.33. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, где $\widetilde{M} \ge M$, и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \ge \dim V_k$ для всех остальных $k \ne k_0$, и $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество. Пусть еще $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — отображение класса C_H^1, такое, что в точках, где ранг hc-дифференциала максимален, для него всюду выполнены условия теоремы 2.25 с некоторым постоянным $c > 0$, а для точек Ω_0 выполнены описанные выше ограничения с тем же постоянным $c > 0$. Тогда справедлива формула (8).*

Список литературы

1. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // *Алгебра и анализ.* 1999. Т. 11, №. 4. С. 1–34.

2. *Карманова М. Б.* Двуступенчатые сублоренцевы структуры и поверхности-графики // *Изв. РАН. Серия Математика.* 2020. Т. 84, № 1. С. 60–104.

3. *Карманова М. Б.* Мера образов контактных отображений на двухступенчатых сублоренцевых структурах // *Матем. заметки.* 2023. Т. 113, № 1. С. 149–153.

4. *Карманова М. Б.* Об аппроксимируемости и параметризации прообразов элементов групп Карно на сублоренцевых структурах // *Матем. заметки.* 2022. Т. 111, № 1. С. 140–144.

5. *Карманова М. Б.* Площадь поверхностей на сублоренцевых структурах глубины два // *Матем. тр.* 2023. Т. 26, № 1. С. 93–119.

6. *Карманова М. Б.* Площадь графиков на произвольных группах Карно с сублоренцевой структурой // *Сиб. матем. журн.* 2020. Т. 61, № 4. С. 823–848.

7. *Карманова М. Б.* Формула коплощади на группах Карно с сублоренцевой структурой для вектор-функций // *Сиб. матем. журн.* 2021. Т. 62, № 2. С. 298–325.

8. *Карманова М. Б.* Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

9. *Крым В.Р., Петров Н.Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2007. Вып. 1. С. 62–70.

10. *Крым В.Р., Петров Н.Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* 2008. Вып. 3. С. 68–80.

11. *Миклюков В.М., Клячин А.А., Клячин В.А. Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского* // http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf (2011)

12. *Bars I., Terning J. Extra dimensions in space and time.* New York: Springer, 2010.

13. *Craig W., Weinstein S.* On Determinism and Well-Posedness in Multiple Time Dimensions' // *Proc. R. Soc. A.* 2008. V. 465, № 2110. P. 3023–3046.

14. *Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous group.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.

15. *Grochowski M.* Remarks on the global sub-Lorentzian geometry // *Anal. Math. Phys.* 2013. V. 3, № 4. P. 295–309.

16. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // *J. Dyn. Control Syst.* 2006. V. 12, № 2. P. 145–160.

17. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // *J. Geom. Phys.* 2009. V. 59, № 7. P. 885–900.

18. *Grochowski M.* Normal forms and reachable sets for analytic Martinet sub-Lorentzian structures of Hamiltonian type // *J. Dyn. Control Syst.* 2011. V. 17, № 1. P. 49–75.

19. *Grochowski M.* Reachable Sets For Contact sub-Lorentzian Metrics on R3. Application to control Affine Systems with the Scalar Input // *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2011. V. 177, Issue 3. P. 383–394.

20. *Grochowski M.* The structure of reachable sets for affine control systems induced by generalized Martinet sub-Lorentzian metrics // *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 2012. V. 18, № 4. P. 1150–1177.

21. *Grochowski M.* The structure of reachable sets and geometric optimality of singular trajectories for certain affine control systems in R3. The sub-Lorentzian approach // *J. Dyn. Control Syst.* 2014. V. 20. P. 59–89.

22. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.* 2002. V. 50, № 2. P. 161–178.

23. *Karmanova M., Vodopyanov S.* An area formla for contact C^1-mappings of Carnot manifolds // *Complex Var. Elliptic Equ.* 2010. V. 55, №№ 1–3. P. 317–329.

24. *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // *J. Geom. Anal.* 2009. V. 19, № 4. P. 864–889.

25. *Korolko A., Markina I.* Geodesics on H-type quaternion groups with sub-Lorentzian metric and their physical interpretation // *Complex Anal. Oper. Theory.* 2010. V. 4, № 3. P. 589–618.

26. *Naber G. L. The Geometry of Minkowski Spacetime. An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity. Appl. Math. Sci.* V. 92. Berlin: Springer–Verlag, 1992.

27. *Nielsen B.* Minimal immersion, Einstein's equations and Mach's principle. // *J. Geom. Phys.* 1987. V. 4. P. 1–20.

28. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // *Math. Ann.* 1989. V. 129, № 1. P. 1–60.

29. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // *Siberian Adv. Math.* 2004. V. 14, № 4. P. 78–125.

30. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // *Siberian Adv. Math.* 2005. V. 15, № 1. P. 91–125.

31. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings // In: *Contemporary Mathematics.* V. 424. Providence, RI: AMS, 2007. P. 247–301.

32. Vodopyanov S. K. $\mathcal{P}$-Differentiability on Carnot Groups in Different Topologies and Related Topics // *Труды по анализу и геометрии.* Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2000. С. 603–670.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики
им. С.Л.Соболева СОРАН,
просп. Академика Коптюга, 4,
Новосибирск, 630090, РОССИЯ.
E-mail: `maryka@math.nsc.ru`
E-mail: `maryka84@gmail.com`

Поступила в редакцию
5 августа 2023 г.
Получена после доработки
28 сентября 2023 г.
Принята к публикации
5 октября 2023 г.