УДК 517.93, 517.937 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.208 2023, том 26, № 2,162 - 176

ОПЕРАТОР РЕЛЕЯ–РИТЦА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А. В. Лакеев, Ю. Э. Линке, В. А. Русанов

На основе анализа свойств полуаддитивности и непрерывности нелинейного функционального оператора Релея–Ритца исследована разрешимость задачи реализации оператор-функций инвариантного полилинейного регулятора (IPL-регулятора) дифференциальной системы (D-системы) высшего порядка в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве. Аналитическая модель IPL-регулятора позволяет для двух пучков траекторных кривых, индуцированных в D-системе двумя разными полилинейными регуляторами, объединить эти пучки через IPL-воздействие в подсемейство допустимых решений данной D-системы. Рассматриваемая задача относится к типу нестационарных коэффициентно-операторных обратных задач для полилинейных эволюционных уравнений с динамическим порядком выше первого, в том числе неавтономных гиперболических систем. Полученные результаты имеют приложение в общей качественной теории нелинейных бесконечномерных адаптивных систем управления, описываемых полилинейными неавтономными D-системами высших порядков (в том числе в области нелинейного нейромоделирования

Ключевые слова и фразы: функциональный оператор Релея–Ритца, обратные задачи бесконечномерных полилинейных эволюционных уравнений, неавтономная дифференциальная реализация высшего порядка, инвариантный полилинейный регулятор.

Введение

Общая теория реализации динамических систем (см. гл. III, VIII [11]), как раздел обратных задач эволюционных уравнений [6, 22], в настоящее время представляет довольно обширную область исследований [1, 8, 9, 12, 19, 20, 25] (в [8, 9, 12, 20, 25] одним из основных инструментов является оператор Релея–Ритца [10]); Калман считал, что “в теории систем задача реализации играет центральную роль” [7, с. 267]. В данном контексте предлагаемая работа продолжает изыскания раздела 3 [8], при этом понимание

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7)

природы гиперболических систем (в техническом смысле) способствует прояснению и мотивировке всего обсуждения. Её основная цель — исследовать проблему существования коэффициентных оператор-функций инвариантного полилинейного регулятора (IPL-регулятора) дифференциальной системы (D-системы) высшего порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве на базе анализа метрических свойств оператора Релея–Ритца [10]. Функциональный концепт IPL-регулятора предполагает, что моделируемая D-система должна содержать в классе допустимых решений объединение двух фиксированных траекторных пучков, при этом данные пучки не ограничены по мощности (конечные/счетные/континуальные) и индуцированы в означенной D-системе управляющими воздействиями разных полилинейных регуляторов. Ниже в приемах бесконечномерных D-систем высших порядков в гильбертовом пространстве следуем функциональным построениям [23].

§1. Постановка задачи *IPL*-регулятора

Далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z_i, \|\cdot\|_{Z_i})$, $i = 1, \ldots, n$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (предгильбертовость определяют нормы $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_{Z_i}$), $U := Y \times Z_1 \times \ldots \times Z_n$ — гильбертово пространство-произведение с нормой

$$\|(y, z_1, \ldots, z_n)\|_U := \left(\|y\|_Y^2 + \sum_{i=1}^{n} \|z_i\|_{Z_i}^2\right)^{1/2},$$

$L(Y, X)$ — банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y,X)}$ линейных непрерывных операторов, действующих из Y в X (аналогично $(L(X, X), \|\cdot\|_{L(X,X)})$ и $(L(Z_i, X), \|\cdot\|_{L(Z_i,X)})$, X^i — i-ая декартова степень пространства X, $\mathfrak{L}(X^i, Z_i)$ — пространство всех непрерывных i-линейных (полилинейных) отображений из X в Z_i.

Пусть $T := [t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и $\mathfrak{S}_\mu$ — σ-алгебра всех μ-измеримых подмножеств из T. Если $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — некоторое банахово пространство, то через $\mathrm{L}_p(T, \mathcal{B}), p \in [1, \infty)$ будем обозначать банахово фактор-пространство классов μ-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру отображений $f \colon T \in \mathcal{B}$ с нормой

$$\left(\int_T \|f(\tau)\|^p \, \mu(d\tau)\right)^{1/p} < \infty,$$

через $\mathrm{L}_\infty(T, \mathcal{B})$ — пространство всех (эквивалентных классов) μ-измеримых и ограниченных по мере μ функций из T в $\mathcal{B}$. Кроме того, для некоторого (фиксированного) целого числа $r \geq 2$ через $AC^{(r-1)}(T, X)$ будем обозначать множество всех функций $g\colon T \to X$, для которых $(r-1)$-ая производная, далее обозначаемая как $g^{(r-1)}$, является абсолютно непрерывной на T функцией относительно меры μ.

Теперь введем вспомогательные конструкции, связанные с системой обозначений. Через

$$H_2 := \mathrm{L}_2(T, Y) \times \mathrm{L}_2(T, Z_1) \times \ldots \times \mathrm{L}_2(T, Z_n)$$

обозначим произведение пространств с топологией, индуцированной нормой

$$\|(h_0, \ldots, h_n)\|_{H_2} := \left(\int\limits_T \|(h_0(t), \ldots, h_n(t))\, \mu(dt) \right)^{1/2}, \quad (h_0, \ldots, h_n) \in H_2;$$

ясно, что H_2 — гильбертово пространство (в силу конструкции нормы $\|\cdot\|_{H_2}$).

Нам также понадобится банахово пространство-произведение

$$\mathbb{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(Y, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z_1, X)) \times \ldots \times \mathrm{L}_2(T, L(Z_n, X))$$

классов μ-эквивалентности упорядоченных систем оператор-функций с нормой

$$\|(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)\|_{\mathbb{L}_2} := \left(\int\limits_T \left(\|\mathcal{B}_0(\tau)\|^2_{L(Y,X)} + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{B}_i(\tau)\|^2_{L(Z_i,X)} \right) \mu(d\tau) \right)^{1/2}.$$

Теперь примем, что заданы оператор-функции

$$A_0, A_1 \in \mathrm{L}_1(T, L(X, X)), \quad A_2 \in \mathrm{L}_\infty(T, L(X, X)),$$

$$\mu\{t \in T\colon A_2(t) = 0 \in L(X, X)\} = 0,$$

и связанный с ними линейный оператор $\mathbb{D}\colon AC^{(r-1)}(T, X) \to \mathrm{L}_1(T, X)$ вида:

$$g \mapsto \mathbb{D}(g) := A_2 g^{(r)} + A_1 g^{(1)} + A_0 g.$$

Далее считаем, что посредством фиксации

$$(\mathcal{B}_{01}, \ldots, \mathcal{B}_{n1}), (\mathcal{B}_{02}, \ldots, \mathcal{B}_{n2}) \in \mathbb{L}_2, \quad \mathrm{D}_i \in \mathfrak{L}(X^i, Z_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

заданы полилинейные регуляторы

$$\mathbb{PL}_j\colon AC^{(r-1)}(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, Y) \to \mathrm{L}_1(T, X), \quad j = 1, 2$$

вида:

$$g_j(u) \mapsto \mathbb{PL}_j(g,u) := \mathcal{B}_{0j}u + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{ij}\mathrm{D}_i(g,\ldots,g), \quad j = 1,2,$$

$$(\mathcal{B}_{01},\ldots,\mathcal{B}_{n1}) \neq (\mathcal{B}_{02},\ldots,\mathcal{B}_{n2}).$$

Сверх того, примем (при прочих равных условиях) “бихевиористическое” соглашение, что

$$N_1 \subset \{(x,u,\mathrm{D}_1(x),\ldots,\mathrm{D}_n(x,\ldots,x)) \in AC^{(r-1)}(T,X){\times}H_2\}, \quad \mathrm{Card}\, N_1 \leq \exp\aleph_0,$$

$$N_2 \subset \{(x,u,\mathrm{D}_1(x),\ldots,\mathrm{D}_n(x,\ldots,x)) \in AC^{(r-1)}(T,X){\times}H_2\}, \quad \mathrm{Card}\, N_2 \leq \exp\aleph_0,$$

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset,$$

суть некоторые заданные динамические пучки (иногда, допуская вольность речи, будем говорить “множества решений” D-системы), индуцированные от двух D-систем, имеющих представление:

$$\mathbb{D}(x) = \mathbb{PL}_1(x,u), \quad (x,u,\mathrm{D}_1(x),\ldots,\mathrm{D}_n(x,\ldots,x)) \in N_1,$$

$$\mathbb{D}(x) = \mathbb{PL}_2(x,u), \quad (x,u,\mathrm{D}_1(x),\ldots,\mathrm{D}_n(x,\ldots,x)) \in N_2; \qquad (1)$$

здесь (и ниже в уравнении (2)) равенства рассматриваются как тождества в $\mathrm{L}_1(T,X)$, при этом учли (см. лемму [23, с. 505], что каждая функция из $AC^{(r-1)}(T,X)$ имеет r-ую производную класса $\mathrm{L}_1(T,X)$.

Условимся далее отличать в обозначениях класс эквивалентности $(\mathrm{mod}\,\mu)$

$$\phi(x,h) := (x,u,\mathrm{D}_1(x),\ldots,\mathrm{D}_n(x,\ldots,x)) \in AC^{(r-1)}(T,X) \times H_2$$

от конкретного представителя из этого класса, а именно, — “индивидуальной” вектор-функции

$$t \mapsto \phi(x(t),h(t)) := (x(t),u(t),\mathrm{D}_1(x(t)),\ldots,\mathrm{D}_n(x(t),\ldots,x(t))).$$

Будем рассматривать задачу определения в терминах геометрических свойств динамического пучка $\widetilde{N} := N_1 \cup N_2$ условия существования кортежа $\left(\widetilde{\mathcal{B}_0},\widetilde{\mathcal{B}_1}\ldots,\widetilde{\mathcal{B}_n}\right) \in \mathbb{L}_2$ (это далее операторные коэффициенты IPL-регулятора), для которого будет

$$\mathbb{D}(x) = \mathbb{IPL}\left(x,u,\widetilde{\mathcal{B}_0},\widetilde{\mathcal{B}_1}\ldots,\widetilde{\mathcal{B}_n}\right) \quad \forall\ (x,u,\mathrm{D}_1(x),\ldots,\mathrm{D}_n(x,\ldots,x)) \in \widetilde{N} \quad (2)$$

$$\mathbb{IPL}\left(x,u,\widetilde{\mathcal{B}_0},\widetilde{\mathcal{B}_1}\ldots,\widetilde{\mathcal{B}_n}\right) := \widetilde{\mathcal{B}_0}u + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathcal{B}}_i\mathrm{D}i(x,\ldots,x),$$

т. е. $\widetilde{N}$ — множество решений D-системы $\mathbb{D}(x)$ с IPL-регулятором $\mathbb{IPL}\left(x, u, \widetilde{\mathcal{B}_0}, \widetilde{\mathcal{B}_1} \ldots, \widetilde{\mathcal{B}_n}\right)$.

Замечание 1. Обратная задача (2) и её решение, предлагаемое ниже, легко модифицируется на конечное число пучков, приводя к теоретическим схемам (см. ниже заключение), развивающих (включая энтропийный подход [25]) методы моделирования нелинейных систем высших порядков [1] в адаптивной постановке; в теории систем *адаптация* — это метод моделирования/проектирования систем управления, основанный на оценивании (идентификации) в реальном времени существенных параметров для коррекции неизвестных/меняющихся характеристик объекта управления [7, p. 64]. Попутно, обобщая известный (теорема 3 [8]) и предлагая новый математический аппарат в апостериорном моделировании гиперболических систем [6], в том числе, предполагая качественное развитие теоретико-прикладной методологии идентификации дифференциальных систем [22], обладающих (по образцу [2]) минимальной операторной нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2}$.

§2. Вокруг аналитических условий существования *IPL*-регулятора

Обозначим через $\mathrm{L}(T, R)$ пространство классов μ-эквивалентности всех вещественных μ-измеримых на T функций и пусть $\leq_{\mathrm{L}}$ — квазиупорядочение в $\mathrm{L}(T, R)$ такое, что $f_1 \leq_{\mathrm{L}} f_2$, если $f_1(t) \leq f_2(t)$ μ-почти всюду в T. Наименьшую верхнюю грань для подмножества $W \subset \mathrm{L}(T, R)$ обозначим через $\sup_{\mathrm{L}} W$, если эта грань существует для подмножества W в структуре частичного упорядочения $\leq_{\mathrm{L}}$.

Определение 1 [8]. Рассмотрим на $\mathbf{\Pi} := AC^{(r-1)}(T, X) \times H_2$ нелинейный оператор $\Psi\colon \mathbf{\Pi} \to \mathrm{L}(T, R)$, построенный согласно следующего функционального правила:

$$t \mapsto \Psi(x, h)(t) := \begin{cases} \|\mathbb{D}(x)(t)\|_X \times \|h(t)\|_U^{-1}, & \text{если } h(t) \neq 0 \in U; \\ 0, & \text{если } h(t) = 0 \in U. \end{cases} \tag{3}$$

где $x \in AC^{(r-1)}(T, X)$, $h \in H_2$. Следуя [10], оператор Ψ будем называть *оператором Релея–Ритца.*

Из конструкции (3) следует, что оператор Релея-Ритца удовлетворяет соотношениям

$$\chi_{\emptyset} \leq_{\mathrm{L}} \Psi(\phi), \quad \Psi(r\phi) = \Psi(\phi), \tag{4}$$
$$\phi \in \mathbf{\Pi}, \quad 0 \neq r \in R,$$

где $\chi_\emptyset \in \mathrm{L}(T,R)$ — характеристическая функция пустого множества $\emptyset \in \mathfrak{S}_\mu$.

Определение 2 [8]. Пусть задан некоторый динамический пучок вида:

$$N \subset \{(x,u,\mathrm{D}_1(x),\ldots,\mathrm{D}_n(x,\ldots,x)) \in \mathbf{\Pi}:$$

$$(x,u) \in AC^{(r-1)}(T,X) \times \mathrm{L}_2(T,Y)\}, \mathrm{Card}\, N \le \exp \aleph_0,$$

и пусть Q — поглощающее множество в $\mathrm{Span}\, N$, т.е. $\bigcup_{r>0} rQ = \mathrm{Span}\, N$. Тогда пучок N назовем *для оператор-функций* A_0, A_1, A_2 из конструкции оператора $\mathbb{D}$, если для любой пары $(q,w) \in Q$ имеет место следующее положение:

$$\mathrm{supp}\, \left\| A_2 q^{(r)} + A_1 q^{(1)} + A_0 q \right\|_X \subset \mathrm{supp}\, \|w\|_U \,(\mathrm{mod}\, \mu).$$

Здесь, и далее, “supp-носитель” функции определен с точностью до множества меры нуль.

Лемма 1. (i) *Если динамический пучок N регулярный, то сужение $\Psi \big| \mathit{Span}\, N$ имеет (для любой вектор-функции $(q,w) \in \mathit{Span}\, N$) аналитическое представление*

$$\Psi(q,w) = \frac{\left\| A_2 q^{(r)} + A_1 q^{(1)} + A_0 q \right\|_X}{\|w\|_U + \chi_{S_w}},$$

где χ_{S_w} — индикатор множества $S_w := T \backslash \mathit{supp} \|w\|_U \in \mathfrak{S}_\mu$;

(ii) в обратной задаче (2) объединенный динамический пучок $\widetilde{N}$ — регулярный.

Здесь, и далее, χ_S — характеристическая функция некоторого множества $S \in \mathfrak{S}_\mu$.

Теперь, прежде чем идти дальше, введем еще одну дополнительную конструкцию.

Определение 3 [12]. Оператор Релея–Ритца назовем *полуаддитивным с весом* $p \in R$ на множестве $E \subset \mathbf{\Pi}$, если для любой пары $(\phi', \phi'') \in E \times E$ справедливо

$$\Psi(\phi' + \phi'') \le_{\mathrm{L}} p\Psi(\phi') + p\Psi(\phi'').$$

Лемма 2. *Полуаддитивность с фиксированным весом оператора Релея–Ритца есть свойство конечного характера [16, с. 28] для подмножеств множества* $\mathbf{\Pi}$.

Доказательство. Пусть на некотором множестве $E \subset \mathbf{\Pi}$ оператор Ψ полуаддитивен с некоторым весом p, тогда данный оператор будет полуаддитивен с этим весом на любом конечном подмножестве из E. С другой стороны, если Ψ полуаддитивен с тем же весом p на любом конечном подмножестве множества E, то для любой пары вектор-функций $(\phi_1, \phi_2) \in E \times E$ будет выполняться

$$\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\Psi(\phi_1) + p\Psi(\phi_2),$$

поскольку на подмножестве $\{\phi_1, \phi_2\} \subset E$ оператор Ψ полуаддитивен с весом p. $\square$

Замечание 2. Если связать лемму 2 с классической леммой Тейхмюллера–Тьюки[1] [16, с. 28], то приходим к важной геометрической характеристике полуаддитивности оператора Релея–Ритца, а именно: в $\mathbf{\Pi}$ существуют максимальные множества, на которых оператор (3) полуаддитивен с некоторым весом $p > 0$, при этом данные множества не могут быть *линейными* в случае $p \in (0, 1)$; чтобы убедиться, достаточно рассмотреть (когда $E \subset \mathbf{\Pi}$ — линейное множество, т. е. $\operatorname{Span} E = E$) действие Ψ на паре $(\phi, \mathbf{0}) \in E \times E, \phi \neq \mathbf{0}$ (здесь и далее $\mathbf{0}$ — нулевой вектор из $\mathbf{\Pi}$) за исключением тривиального варианта $E = \{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{\Pi}$. Именно поэтому ниже по умолчанию в теореме 2 предполагается, что вес полуаддитивности оператора Ψ — некоторое фиксированное число $p \in [1, \infty)$.

Лемма 3. *Пусть $\phi \in \mathbf{\Pi}$, $\phi \neq \mathbf{0}$ и $p \in [1, \infty)$. Тогда существует максимальное относительно теоретико-множественного включения линейное множество $E \subset \mathbf{\Pi}$, $\phi \in E$, на котором оператор Релея–Ритца полуаддитивен с весом p.*

Набросок доказательства. Пусть ϕ_1 — ненулевой элемент в $\mathbf{\Pi}$. Тогда в силу (4) оператор Ψ полуаддитивен с весом p на линейной оболочке $E_1 := \{r\phi_1 \colon r \in R\}$. Далее, пусть $\phi_2 \in \mathbf{\Pi}$, $\phi_2 \notin E_1$ и Ψ полуаддитивен на объединении $E_1 \cup \{\phi_2\}$ с весом p; не трудно установить[2], что такая вектор-функция ϕ_2 существует для любого веса $p \in [1, \infty)$. Выберем в $E_1 + E_2$, где E_2 — линейная оболочка над ϕ_2, произвольный элемент

$$r_1\phi_1 + r_2\phi_2,$$

где $r_1, r_2 \in R$, $r_2 \neq 0$. В такой постановке в соответствии с (4) будут выполняться соотношения:

$$\Psi(r_1\phi_1 + r_2\phi_2) = \Psi(r_1 r_2^{-1}\phi_1 + \phi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\Psi(r_1 r_2^{-1}\phi_1) + \Psi(\phi_2) =$$

$$p\Psi(r_1\phi_1) + p\Psi(r_2\phi_2),$$

[1]Напомним, что лемма Тейхмюллера–Тьюки является альтернативной формой аксиомы выбора [16, с. 28].

[2]Пусть $\phi_1 = (q_1, w_1)$. Тогда достаточно взять вектор-функцию $\phi_2 = (q_2, w_2)$, для которой $t \mapsto \langle w_1(t), w_2(t)\rangle_U = \chi_\emptyset$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве U.

откуда следует, что оператор Ψ полуаддитивен на линейном многообразии E_1+E_2 с весом p. Рассуждая аналогично, можно показать, что в предыдущих выкладках E_1 можно заменить на любое не максимальное линейное подмножество из $\mathbf{\Pi}$, на котором Ψ полуаддитивен с весом p.

Остальные построения будут касаться построения цепей одним из методов трансфинитной индукции. Поэтому пусть P — семейство всех упорядоченных пар $(E', p') \in \mathbf{\Pi}\times[1,\infty)$, где E' — ненулевое линейное множество, на котором оператор Релея–Ритца полуаддитивен на E' с весом p'. Введем в P частичное упорядочение $\prec$, считая

$$(E', p') \prec (E'', p'') \Leftrightarrow E' \subset E'', p' = p''.$$

По теореме Хаусдорфа (о существовании максимальных линейно упорядоченных множеств) в семействе P существует Ω — максимальная цепь (максимальное линейно упорядоченное множество), содержащая цепь $(E_1, p) \prec (E_1 + E_2, p)$. Пусть $\mathcal{Z}$ — множество всех линейных множеств E_γ в $\mathbf{\Pi}$, таких, что $(E_\gamma, p) \in \Omega$. Тогда $\mathcal{Z}$ будет линейно упорядочено относительно теоретико-множественного включения, следовательно, объединение $E := \cup\{E_\gamma\colon E_\gamma \in \mathcal{Z}\}$ образует (тривиальным образом) линейное многообразие в $\mathbf{\Pi}$.

Далее, если $(\phi_1, \phi_2) \in E \times E$, то $(\phi_1, \phi_2) \in E_\gamma \times E_\gamma$ для некоторого множества $E_\gamma \in \mathcal{Z}$, откуда приходим к $\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\Psi(\phi_1) + p\Psi(\phi_2)$ и значит $(E, p) \in \Omega$. При этом если бы многообразие E не оказалось максимальным в $\mathbf{\Pi}$, на котором наш оператор Ψ полуаддитивен с весом p, то конструкция линейного расширения, указанная выше, позволила бы получить в семействе P элемент $(E^\star, p)$, для которого $E^\star$ строго содержит E, но это противоречило бы максимальности цепи Ω в семействе P. $\square$

Теперь рассмотрим свойство *непрерывности* оператора Релея – Ритца [10]. Для этого введем на $\mathrm{L}(T, R)$ векторную топологию, порождаемую сходимостью по мере μ. Хорошо известно (см. [10]), что эта топология порождается метрикой $\rho(\cdot,\cdot)\colon \mathrm{L}(T,R) \times \mathrm{L}(T,R) \to [0,\infty)$ вида:

$$\rho(f_1, f_2) := \int\limits_T \frac{|f_1(t) - f_2(t)|}{1 + |f_1(t) - f_2(t)|}\, \mu(dt);$$

в данном контексте $(\mathrm{L}(T,R), \rho)$ — полное квазинормированное пространство.

Необходимо отметить, что общая теория непрерывности операторов Релея–Ритца, развитая в [10] представлена в этой работе в контексте её возникновении из специальных проблем теории дифференциальной реализации, анализ которых приводит к этой теории как действенному инструменту решения задач реализации, с почти принудительной необходимостью; но однажды появившись, эта теория освещает широкую область за пределами ограниченного участка её возникновения.

Далее для функции $f \in \mathrm{L}(T, R)$ через $\operatorname{supp} f := \{x \in X \colon f(x) \neq 0\}$ будем обозначать ее носитель, определяемый с точностью до множества меры нуль; ниже при формулировке (и очевидности сопутствующих выводов) леммы 4 и следствия 1 прибегли к следствию 3 и теореме 4 из [10].

Лемма 4. *Пусть* $(\mathbf{\Pi}, \rho^*)$ *— метрическое пространство с метрикой* $\rho^* \colon \mathbf{\Pi} \times \mathbf{\Pi} \to R$ *вида:*

$$\rho^*((g,h),(\widehat{g},\widehat{h})) := \rho(\|g\|_X, \|\widehat{g}\|_X) + \rho(\|h\|_U, \|\widehat{h}\|_U) + \mu(supp\,\|h\|_U \Delta supp\,\|\widehat{h}\|_U),$$

$$g, \widehat{g} \in AC^{(r-1)}(T, X), \quad h, \widehat{h} \in H_2,$$

где $supp\,\|h\|_U \Delta supp\,\|\widehat{h}\|_U$ *— симметрическая разность носителей* $supp\,\|h\|_U$, $supp\,\|\widehat{h}\|_U$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) метрика ρ^* *не является квазинормой, при этом порождаемая* ρ^* *топология не будет векторной (операции векторного пространства* $\mathbf{\Pi}$ *не являются непрерывными в данной топологии);*

(ii) оператор Релея–Ритца $\Psi \colon (\mathbf{\Pi}, \mathbf{\Pi}) \to (L(T,R), \rho)$ *является непрерывным.*

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{\Pi}^*$ *— конечномерное линейное многообразие в* $\mathbf{\Pi}$. *Тогда:*

(i) метрическое пространство $(\mathbf{\Pi}^*, \rho^*)$ *— является неполным, при этом фундаментальные последовательности из* $(\mathbf{\Pi}^*, \rho^*)$ *содержатся в классе последовательностей Коши пространства* $(\mathbf{\Pi}^*, \mathfrak{T})$*, где* $\mathfrak{T}$ *— топология, индуцированная в* $\mathbf{\Pi}^*$ *из пространства* $(L_2(T,X), \|\cdot\|_{L_2(T,X)}) \times (H_2, \|\cdot\|_{H_2})$*;*

(ii) метрика ρ^* *будет квазинормой, а топология* $\mathfrak{T}^*$*, порождаемая* ρ^**, — векторной, если*

$$\forall f \in \mathbf{\Pi}^* \backslash \{\mathbf{0}\} \colon supp\,\|f\|_U := T \ (mod\, \mu),$$

при этом $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$*, а образ оператора Релея–Ритца* $\Psi[\mathbf{\Pi}^*]$ *—* ρ*-квазинормированный компакт.*

Далее в конструкции i^{-1}-плотного $(i = 1, 2, \ldots)$ подмножества в $(\mathbf{\Pi}^*, \rho^*)$ следуем [16, с. 395].

Необходимое условие существования IPL-регулятора.

Теорема 1. *Если* $Card\, N_j < \aleph_0$, $j = 1, 2$ *и* $supp\,\|f\|_U := T \ (mod\, \mu)$ $\forall f \in Span\, \widehat{N} \backslash \{\{\mathbf{0}\}$*, то обратная задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\exists \left(\widetilde{\mathcal{B}_0}, \widetilde{\mathcal{B}_1}, \ldots, \widetilde{\mathcal{B}_n}\right) \in \mathbb{L}_2 \colon \mathbb{D}(x) = \mathbb{IPL}\left(x, u, \widetilde{\mathcal{B}_0}, \widetilde{\mathcal{B}_1}, \ldots, \widetilde{\mathcal{B}_n}\right)$$

$$\forall (x, u, \mathrm{D}_1(x), \ldots, \mathrm{D}_n(x, \ldots, x)) \in \widetilde{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \sup\nolimits_{\mathrm{L}} \Psi[\mathrm{Span}\,\widehat{N}] \Leftrightarrow \lim_{k,m\to\infty} \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_k, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_m) = 0.$$

где $W_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *— конечное* i^{-1}*-плотное подмножество в* $(\Psi\,[\mathrm{Span}\,\widehat{N}], \rho^*)$. *Доказательство.* Пусть $\mathbf{\Pi}^* = \mathrm{Span}\,\widetilde{N}$ Ясно, что множество $W_\infty := \cup\{V_j : j = 1, 2, \ldots\}$ всюду плотно в $\Psi[\mathbf{\Pi}^*]$, причем, как несложно установить (в силу пункта (ii) следствия 1 и теоремы 2 [8]) существует $\sup_{\mathrm{L}} W_\infty \in \mathrm{L}(T, R)$. Таким образом, достаточно показать, что

$$\rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_m) \le \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty) + \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_m, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty),$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty) + \lim_{n\to\infty} \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_m, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty) = 0.$$

Рассуждаем от противного: пусть в $\{W_n\}, n = 1, 2, \ldots$ найдется счетное подсемейство $\{W_k\}, k \in K$, для которого $\exists\, d_+ > 0, \forall k \in K :$
$\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \sup_{\mathrm{L}} W_m) \ge d_+$ Тогда, поскольку имеется монотонная цепь

$$\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_1 \le_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_2 \le_{\mathrm{L}} \ldots \le_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_n \le_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_{n+1} \le_{\mathrm{L}} \ldots \le_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty,$$

то монотонность данной цепи влечет $\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \chi_\emptyset) \le \rho(\sup_{\mathrm{L}} W_{n+1}, \chi_\emptyset)$, откуда приходим к

$$\exists\, d \in (0, d_+] \colon \lim_{k\in K, k\to\infty} \rho(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_k, \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty) = d,$$

что противоречит следующему равенству:

$$t \mapsto \sup\{\sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_i(t) \colon i = 1, 2, \ldots\} = \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W_\infty.$$

Данное равенство означает поточечную сходимость $\{\sup_{\mathrm{L}} W_n\}$ к $\sup_{\mathrm{L}} W_\infty$, а значит и сходимость по мере μ, что, в свою очередь, равносильно сходимости $\rho(\sup_{\mathrm{L}} W_n, \sup_{\mathrm{L}} W_\infty) \to 0$ при $n \to \infty$. □

Несложно показать, что функциональная грань $\sup_{\mathrm{L}} W_k$ для $W_k = \{w_1, \ldots, w_q\} \in \mathrm{L}(T, R)$ равна функции $w_{(q)}$, которую можно вычислить, прибегнув к следующему рекуррентному правилу:

$$w_{(1)} := w_1,$$

$$w_{(j+1)} := \frac{w_{(j)} + w_{j+1} + |w_{(j)} - w_{j+1}|}{2}, \quad j = 2, \ldots, q - 1.$$

Достаточное условие существования IPL-регулятора:

Теорема 2. *D-система (2) существует, если оператор Релея–Ритца полуаддитивен с некоторым весом на линейном многообразии* $\mathrm{Span}\,\widehat{N}$.

Доказательство. Поскольку линейные оболочки $\mathrm{Span}\,N_1$ и $\mathrm{Span}\,N_2$ — поглощающие множества в себе, то в силу системы модификации теоремы

2 [8] найдутся две функции $f_1, f_2 \in \mathrm{L}_2(T, R)$, для которых будут выполняться следующие два функциональных неравенства

$$\sup\nolimits_{\mathrm{L}} \Psi[\operatorname{Span} N_1] \leq_{\mathrm{L}} f_1 \qquad \sup\nolimits_{\mathrm{L}} \Psi[\operatorname{Span} N_2] \leq_{\mathrm{L}} f_2.$$

Выберем в многообразии $\operatorname{Span} N_1 + \operatorname{Span} N_2$ в качестве его поглощающего множества само это многообразие. Тогда в силу полуаддитивности Ψ (с весом p) на $\operatorname{Span} N_1 + \operatorname{Span} N_2$ получаем

$$\sup\nolimits_{\mathrm{L}} \Psi[\operatorname{Span} N_1 + \operatorname{Span} N_2] \leq_{\mathrm{L}}$$

$$\leq_{\mathrm{L}} p \sup\nolimits_{\mathrm{L}} \Psi[\operatorname{Span} N_1] + p \sup\nolimits_{\mathrm{L}} \Psi[\operatorname{Span} N_2] \leq_{\mathrm{L}} p(f_1 + f_2),$$

откуда, исходя из теоремы 2 [8], следует (с учетом)

$$\operatorname{Span} N_1 \cup N_2 = \operatorname{Span} N_1 + \operatorname{Span} N_2,$$

что множество процессов $N_1 \cup N_2$ обладает D-реализацией (2). $\square$

Следствие 2. *Пусть $N_1, \ldots, N_k \subset \mathbf{\Pi}$, $\operatorname{Card} N_j \leq \aleph_0$, $j = 1, \ldots, k$ и для каждого индекса j множество динамических процессов N_j $(j = 1, \ldots, k)$ имеет дифференциальную реализацию вида:*

$$\exists\ (\mathcal{B}_{0j}, \mathcal{B}_{1j}, \ldots, \mathcal{B}_{nj}) \in \mathbb{L}_2 \,\forall\ (x, u, D_1(x), \ldots, D_n(x, \ldots, x)) \in N_j :$$

$$\mathbb{D}(x) = \mathbb{PL}_j(x, u) = \mathcal{B}_{0j} u + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{ij} D_i(x, \ldots, x),$$

$$(\mathcal{B}_{0j}, \mathcal{B}_{1j}, \ldots, \mathcal{B}_{nj}) \neq (\mathcal{B}_{0l}, \mathcal{B}_{1l}, \ldots, \mathcal{B}_{nl}), \quad j \neq l \quad (j, l \in \{1, \ldots, k\}).$$

Тогда $\overline{N} := \bigcup\limits_{j=1}^{k} N_j$ — семейство решений D-системы (2) для некоторого кортежа оператор-функций $\left(\widetilde{\mathcal{B}}_0, \widetilde{\mathcal{B}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{B}}_n\right) \in \mathbb{L}_2$, если оператор Ψ полуаддитивен на $\operatorname{Span} \overline{N}$.

§3. Заключение

К 1970-м годам сложилось положение, когда та часть качественной теории обратных задач системного анализа, которую принято называть теорией *линейной конечномерной* реализации динамических систем с непрерывным временем, в целом завершена и стоит ожидать лишь относительно второстепенных улучшений (см., например, [3–5, 26]); это положение усиливалось заявлениями основателей теории дифференциальной реализации: 1969 г., Р. Калман [7, с.268]: “ ... в § 10.13 мы дадим новое и (надеемся) *исчерпывающее* изложение теории реализации линейных систем с непрерывным временем” (курсив наш). Таким образом, в определенном смысле алгебраическая теория [7, с. 266] реализации конечномерных линейных стационарных систем второй половины 20-го века занимала в общей теории систем место, аналогичное месту теоретической механики в физике, когда и там, и там создалось впечатление полной и окончательной завершенности и логической строгости.

В настоящее время теория дифференциальной реализации полилинейных эволюционных уравнений изучает вопросы существования динамического представления для надлежащим образом определенной *бесконечномерной* бихевиористической временной системы в гильбертовом пространстве (на базе теории расширения M_2-операторов [25] в конструкциях нелинейного оператора Релея-Ритца [10]). При этом обычно временная система задается своим пучком (конечным, счетным или даже континуальным) бесконечномерных управляемых траекторных кривых и задача теории реализации состоит в том [8, 9, 12, 20, 25], чтобы выяснить существует ли (возможно с процедурой “оптимизации” динамического порядка [13, 17]) такое полилинейное эволюционное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, что оно будет служить для данного траекторного пучка его дифференциальной реализацией (т. е. содержать этот пучок в семействе своих допустимых решений).

Нет структурных препятствий для распространения полученных выше результатов на IPL-регуляторы, включающие в свой состав полилинейные операторы из $\mathfrak{L}(X^i \times Y, Z_i)$ и содержащие в качестве дополнительных переменных k-раз ($k \leq i$) производную $\frac{dx}{dt}$ и 1-раз программное управление u; ясно, что в данной постановке $\mathrm{D}(x, \ldots, \frac{dx}{dt}, \ldots, u) \in \mathrm{L}_2(T, Z_i)$ для любого $\mathrm{D} \in \mathfrak{L}(X^i \times Y, Z_i)$. При этом, если для обратной задачи (2) ставить задачу разрешимости реализации непосредственно самих полилинейных операторов из $\mathfrak{L}(X^i \times Y, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, то основой математического аппарата может служить тензорное произведение гильбертовых пространств [9,20], т. к. его структура сводит изучение полилинейных отображений к изучению линейных отображений путем введения операции M_2-продолжимости [25] на категории специальных линейных функциональных пространств.

Если смотреть на перспективное прикладное развитие теории IPL-моделирования, при котором определяется разрешимость структуры обратных задач полилинейных регуляторов уравнений (2), то можно заключить, что эта бесконечномерная адаптивно-системная постановка расширяет нелинейную теорию апостериорного моделирования квазилинейных уравнений неавтономной динамики наблюдаемых нейропроцессов порядка 2 (и выше). При этом важны нейроморфные модели [14, 15, 18], обуславливающие осцилляцию нейропроцессов с фактором задержки нейроимпульсов [21] в кибернетической постановке “черного ящика” [11, с. 21] для алгоритмических разработок антропоморфных полилинейных многоканальных интерфейс-платформ “мозг-машина” типа Neuralink [24].

Список литературы

1. *Ван дер Шафт А.* К теории реализации нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высшего порядка // *Теория систем. Математические методы и моделирование* / Пер. с англ. сб. статей (ред. А. Н. Колмогоров, С. П. Новиков). М.: Мир, 1989. С. 192–237.

2. *Данеев А. В., Русанов В. А.* К проблеме построения сильных дифференциальных моделей с минимальной операторной нормой. I, II // *Кибернетика и системный анализ.* 2004. № 1. С. 144–153; № 2. С. 170–178.

3. *Данеев А. В., Куменко А. Е., Русанов В. А.* Задача спектральной идентификации математической модели линейной динамической системы управления ЛА // *Изв. вузов. Авиационная техника.* 1999. № 1. С. 20–24.

4. *Дмитриев А. В., Дружинин Э. И.* Идентификация динамических характеристик непрерывных линейных моделей в условиях полной параметрической неопределенности // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 1999. № 3. С. 44–52.

5. *Дружинин Э. И.* Построение структурно устойчивых моделей динамики больших космических конструкций по данным летных испытаний // *Док. РАН.* 2017. Т. 479. № 3. С. 285–288.

6. *Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 458 с.

7. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем.* М.: Мир, 1971. 400 с.

8. *Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А.* К реализации полилинейного регулятора дифференциальной системы второго порядка в гильбертовом пространстве // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 8. С. 1098–1109.

9. *Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А.* К дифференциальной реализации билинейной системы второго порядка в гильбертовом пространстве // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2019. Т. XXII. № 2. С. 27–36.

10. *Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А.* Метрические свойства оператора Релея–Ритца // *Изв. вузов. Математика.* 2022. № 9. С. 54–63.

11. *Месарович М., Такахара Я.* *Общая теория систем: Математические основы.* М., Мир, 1978. 312 с.

12. *Русанов В. А., Данеев А. В., Линке Ю. Э.* К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. 2017. Т. 53. № 4. С. 71–83.

13. *Русанов В. А., Лакеев А. В., Линке Ю. Э.* К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов “вход-выход” в гильбертовом пространстве // *Дифференц. уравнения.* 2015. Т. 51. № 4. С. 524–537.

14. *Савельев А. В.* Динамические модели нервной системы: идентификация и принципы организации нейросетей // *Материалы XI Всероссийского семинара “Нейроинформатика и ее приложения”*. Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН. 2003. С. 140–142.

15. *Савельев А. В.* Источники вариаций динамических свойств нервной системы на синаптическом уровне в нейрокомпьютинге // *Искусственный интеллект. НАН Украины.* 2006. № 4. С. 323–338.

16. *Энгелькинг Р.* *Общая топология.* М.: Мир, 1986.

17. *Юрко В. А.* Восстановление дифференциальных операторов переменных порядков на звездообразном графе по спектрам // *Дифференц. уравнения.* 2013. Т. 49. № 12. С. 1537–1548.

18. *Brzychczy S., Poznanski R.* *Mathematical Neuroscience.* Academic Press. 2013.

19. *Chen Y.* A new one-parameter inhomogeneous differential realization of the spl$(2,1)$ superalgebra // *Internat. J. Theoret. Phys.* 2012. V. 51. N 12. P. 3763–3768.

20. *Daneev A. V., Lakeyev A. V., Rusanov V. A.* Existence of a bilinear differential realization in the constructions of tensor product of Hilbert spaces // *WSEAS Transactions on Mathematics.* 2020. V. 19. P. 99–107.

21. *Daneev A. V., Lakeyev A. V., Rusanov V. A., Plesnyov P. A.* Differential non-autonomous representation of the integrative activity of a neural population by a bilinear second-order model with delay // Lecture Notes in Networks and Systems. 2022. V. 319. P. 191–199.

22. *Hasanov A. H., Romanov V. G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations.* Berlin: Springer International Publishing AG. 2017, 2021. 515 p.

23. *Kōmura Y.* Nonlinear semi-groups in Hilbert space // *J. Math. Soc. Japan.* 1967. V. 19. N 4. P. 493–507.

24. *Musk E.* An integrated brain-machine interface platform with thousands of channels // *J. Med. Internet Res.* 2019. V. 21. N 10: e16194. (doi: 10.2196/16194)

25. *Rusanov V. A., Lakeyev A. V., Banshchikov A. V., Daneev A. V.* On the bilinear second order differential realization of a infinite-dimensional dynamical system: An approach based on extensions to M_2-operators // *Fractal and Fractional (Special Issues: Nonlinear Functional Analysis and Applications).* 2023. V. 7. N 4. P. 1–18.

26. *Rusanov V. A., Lakeyev A. V., Linke Yu. É., Voronov V. A.* On realization of dynamic systems: Assessment of fiducial accuracy in the process of adjustment of the realization matrix // *Far East Journal of Dynamical Systems.* 2014. V. 25. N 1. P. 23–35.

Лакеев Анатолий Валентинович
Русанов Вячеслав Анатольевич
Институт динамики систем
и теории управления им. В.М. Матросова,
ул. Лермонтова, 134,
Иркутск, 664033, РОССИЯ.
Линке Юрий Эрниевич
Иркутский национальный исследовательский
технический университет,
ул. Лермонтова, 83,
Иркутск, 664074, РОССИЯ.
E-mail: `lakeyev@icc.ru`
E-mail: `v.rusanov@mail.ru`
E-mail: `linkeyurij@gmail.com`

Поступила в редакцию
3 февраля 2023 г.
Получена после доработки
30 августа 2023 г.
Принята к публикации
5 октября 2023 г. г.