Диофантовы уравнения и группы

Валерий Георгиевич Бардаков

Лекции состоятся 13, 20 и 27 мая в 19.30 по новосибирскому времени.
Лекции пройдут в дистанционном формате. Ссылка для подключения:

https://us02web.zoom.us/j/85875493603?pwd=aDFRL3JibnBYTzRJcVh5WnBNQitPQT09

Аннотация. Предлагаемый курс из 3-х лекций посвящен связи диофантовых уравнений с группами. Мы обсудим известные результаты, а также вопросы, ожидающие своего решения. Вначале сформулируем общую задачу об описании групп, действующих на решениях диофантовых уравнений и о продолжении действия этой группы до группы автоморфизмов кольца многочленов.

Обсудим два общих подхода к описанию групп: группы преобразований некоторого множества и группы, заданные порождающими и определяющими соотношениями. В качестве примера разберем уравнение Маркова. Покажем как получить все его решения из одного, действием некоторой группы. Продолжим действие этой группы на группу автоморфизмов кольца многочленов от трех переменных. Поймем связь уравнения Маркова с формулой Фрике, связывающей следы матриц из $SL_2(\mathbb{R})$. Разберем обобщение уравнения Маркова на случай большего числа неизвестных (уравнение Маркова-Гурвица).

В заключительной лекции поговорим про уравнение Пелля и покажем как можно получать его решения, используя группу.

Замечания. *1) Посмотрите на список упражнений, приложенный ниже. Если Вы не смогли решить какие-то упражнения, то ничего страшного. Я постараюсь объяснить как это сделать. Если Вы знаете решения этих упражнений, или они Вам неинтересны, то примите мои поздравления и сожаления по-поводу того, что вряд ли смогу сообщить Вам что-то новое и интересное.*

2) Во время лекций мне будет очень приятно видеть ваши прекрасные, умные лица. Ваши вопросы помогут лучше усвоить материал. Кроме того, меня будет согревать мысль о том, что я видел будущих звезд мировой математики.

Упражнения.

1) Найдите корни диофантова уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = axyz$ при а) $a = 1$; б) $a = 3$; в) $a = 6$.

2) На множестве троек целых чисел $\mathbb{Z}^3$ определим три преобразования

$$\varepsilon_{12}(a, b, c) = (-a, -b, c), \quad \varepsilon_{13}(a, b, c) = (-a, b, -c), \quad \varepsilon_{23}(a, b, c) = (a, -b, -c).$$

Какую группу они порождают?

3) Аналогичный вопрос для преобразований

$$\sigma_1(a, b, c) = \left(\frac{b^2 + c^2}{a}, b, c\right), \quad \sigma_2(a, b, c) = \left(a, \frac{a^2 + c^2}{b}, c\right), \quad \sigma_3(a, b, c) = \left(a, b, \frac{a^2 + b^2}{c}\right).$$

4) Рассмотрим группу, порожденную преобразованиями из упражнений 2) и 3). Что можно про нее сказать?

5) Что можно сказать про точки трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$?

6*) Пусть A – нескалярная матрица из $SL_2(\mathbb{Z})$. Разрешимо ли уравнение $X^2+Y^2+Z^2 = AXYZ$ в кольце $SL_2(\mathbb{Z})$?

7) Найдите решения диофантова уравнения $x^2-2y^2=1$.

8) Верно ли, что каждое ненулевое число из множетва $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ имеет обратный, лежащий в этом множестве.

9) Можно ли на множестве точек окружности: $x^2+y^2=1$ определить групповую операцию? Можно ли это сделать на произвольной плоской кривой второго порядка?

Список литературы

[1] К. Айерлэнд, М. Роузен, Классическое введение в современную теорию чисел, М.: Мир, 1987.

[2] Ю. И. Манин, А. А. Панчишкин, Введение в современную теорию чисел, М.: Изд-во МЦНМО, 2013.

[3] В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев, Эллиптические функции и алгебраические уравнения, М.: Факториал, 1997.

[4] A. Baragar, Integral Solutions of Markoff–Hurwitz Equations, J. Number Theory, 1994, 49, 27–44.

[5] V. M. Buchstaber and A. P. Veselov, Fricke identities, Frobenius k–characters and Markov equation, ArXiv : 1912.08705, 11 pp.

[6] R. Conceicao, R. Kelly, S. VanFossen, The Markoff equation over polynomial rings, Monatsh. Math., 2021, 196, 253–267.