СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Январь – март 1994, Том 1, № 1, 5–12

УДК 519.176

ЛОКАЛЬНО ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ ГРАФОВ И СВОЙСТВО ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕТРИКИ*)

А. А. Евдокимов

В [1] автором введено двухпараметрическое семейство отображений дискретных метрических пространств, сохраняющих отношения близости и отделимости между элементами, а также изучены свойства и даны конструкции вложений некоторых пространств в классе таких отображений. Кроме того, в [1] (см. также [2–5]) указаны связи с теоретическими и прикладными задачами.

В данной работе детально рассматриваются локально изометрические вложения графов в связи с введенным в [1] свойством продолжения метрики. Для конечных графов усиливается ряд результатов из [1]. Доказывается теорема о вложениях для графов, не содержащих подграфов специального вида. Показывается, что свойством продолжения метрики обладают почти все графы.

§ 1. Локально изометрические вложения

Рассматриваются обыкновенные связные графы $G(V, E)$ с множеством вершин V, множеством ребер E, конечного диаметра $d(G)$ и с обычным расстоянием

$$\rho_G(x, y) = \min |C(x, y)|,$$

где минимум берется по всевозможным простым цепям $C(x, y)$ между вершинами x и y графа G, а $|C|$ — длина цепи C (см. [6]).

- Цепь длины l называем *l-цепью.* d-Цепь называем *диаметральной*, если расстояние между ее концами равно диаметру графа $d = d(G)$.
- Отображение $f\colon G \to H$, действующее из $V(G)$ в $V(H)$, называем *k-изометрическим*, $k > 0$, если f сохраняет все расстояния, не превышающие k.

Так как $k > 0$, k-изометрическое отображение сохраняет отношение смежности вершин.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 91-011-1484).

- Будем говорить, что *отображение* $f\colon G \to H$ *сохраняет i-отделимость*, если для любых вершин $x, y \in V(G)$ неравенство $\rho_G(x,y) \geqslant i$ влечет неравенство $\rho_H(f(x), f(y)) \geqslant i$.

Сохранение 1-отделимости означает инъективность отображения f.

- Инъективное отображение $f\colon G \to H$ называем *вложением G в H*.

Сохранение 2-отделимости означает, что смежными образами в H являются только образы смежных в G вершин. При таком отображении сохраняется независимость множеств вершин. Для произвольного значения порога отделимости i всякий код в G с минимальным расстоянием, равным i, отображением f переводится в код с не меньшим расстоянием в H. Отображения со свойством отделимости связаны с помехоустойчивым кодированием.

В отличие от случая произвольных дискретных метрических пространств, для графов 1-изометрические отображения обладают некоторым свойством (см. предложение 1, ниже), которое упрощает изучение вложений, сохраняющих близость и отделимость элементов.

Предложение 1. *Всякое* 1*-изометрическое отображение $f\colon G \to H$ является не расширяющим, т. е. для любых $x, y \in V(G)$ справедливо неравенство*

$$\rho_G(x,y) \geqslant \rho_H(f(x), f(y)).$$

Доказательство. Любое 1-изометрическое отображение f переводит любую простую цепь $C(x,y)$ в G с концами x и y в маршрут той же длины. Пусть $f(C)$ — простая цепь в H с концами $f(x)$ и $f(y)$, содержащаяся в таком маршруте. Ее длина не превосходит длины цепи $C(x,y)$. Обозначим через $C_H(a,b)$ множество всех простых цепей в H с концами в вершинах a и b. Тогда

$$\begin{aligned}\rho_G(x,y) = \min_{C_G} |C(x,y)| \geqslant \min_{C_G} |f(C)| \\ \geqslant \min_{C_H} |C_H(f(x), f(y))| = \rho_H(f(x), f(y)).\end{aligned}$$

Предложение 1 доказано.

- Отображение $f\colon G \to H$, сохраняющее k-отделимость, $k \geqslant 2$, назовем *k-монотонным на G*, если оно сохраняет i-отделимость при любом i, $1 \leqslant i < k$.

Обозначим через $\mathcal{F}_k$ класс всех 1-изометрических отображений, сохраняющих k-отделимость.

Лемма 1. *Пусть отображение $f\colon G \to H$ из $\mathcal{F}_k$ k-монотонно на G. Тогда f есть k-изометрическое вложение, а f^{-1} есть $(k-1)$-изометрическое вложение, сохраняющее i-отделимость для любого i.*

Доказательство. По свойству k-монотонности отображения f из $\mathcal{F}_k$ неравенство $\rho_H(f(x), f(y)) \geqslant i$ при $\rho_G(x,y) = i$ выполняется для любого значения $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, f не сжимает расстояния, не превосходящие k. Согласно предложению 1 отображение f и не расширяет никаких расстояний. Поэтому f k-изометрическое. Поскольку отображение f сохраняет 1-отделимость, оно инъективно, т. е. f — вложение.

Отображение f^{-1} множества $f(V(G))$ с метрикой ρ_H, индуцированной на этом множестве вложением $f\colon G \to H$, согласно предложению 1 будет не сжимающим. Следовательно, для любого j

$$\rho_H(f(x), f(y)) = j \Rightarrow \rho_G(x,y) \geqslant j. \tag{1}$$

По свойству сохранения i-отделимости отображением f из неравенства $\rho_H(f(x), f(y)) \leqslant i - 1$ вытекает неравенство $\rho_G(x,y) \leqslant i-1$ для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k$. Поэтому при $j = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\rho_H(f(x), f(y)) = j \Rightarrow \rho_G(x,y) \leqslant j. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что отображение f^{-1} является $(k-1)$-изометричным. Поскольку отображение f^{-1} не сжимающее, оно сохраняет i-отделимость для любого i. Лемма 1 доказана.

Пример графа, изображенного на рис. 1, показывает, что при условиях леммы 1 нельзя гарантировать большего значения радиуса локальной изометричности. 3-Цепь в этом графе вложена в пятиугольник. Отображение $f(i) = i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ сохраняет 2-отделимость, является 2-монотонным и 2-изометрическим. Однако f и f^{-1} не являются 3-изометрическим и 2-изометрическим отображением соответственно, поскольку $3 = \rho_G(1,4) > \rho_H(1,4) = 2$.

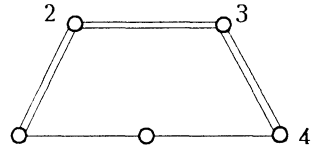

Рис. 1

В связи с леммой 1 естественно возникает вопрос: когда любое отображение $f \in \mathcal{F}_k$ является k-монотонным и, следовательно, определяет взаимно локально изометрическое вложение G в H?

Для $k = 2$ ответ очевиден. Действительно, если отображение f принадлежит $\mathcal{F}_2$, то оно сохраняет единичные расстояния, а все прочие расстояния не сжимает до расстояния, меньшего двух. Следовательно, отображение f инъективное и 2-монотонное.

При $k \geqslant 3$ картина иная — монотонности отображения $f \in \mathcal{F}_k$ на произвольном графе может и не быть. Приведем пример. Пусть дерево G (см. рис. 2) вложено в граф H, который получается добавлением к G ребер, изображенных пунктиром. Тогда $d(G) = d(H) = d$. Пусть $d \geqslant 3$. Тогда в G имеются две диаметральные цепи с концами в вершинах x_1, y и x_2, y. Для любой вершины $v \in V(G)$ отображение $f(v) = v$, которое

задает это вложение, сжимает все расстояния $\rho_G(x_i, x_j)$, но сохраняет расстояния $\rho_G(x_1, y)$ и $\rho_G(x_2, y)$, т. е. f изометрично на диаметральных цепях графа G. Таким образом, f принадлежит $\mathcal{F}_d$, но не является d-монотонным. Более того, f не является 2-изометрическим и не сохраняет i-отделимость при любом i, $1 < i < d$.

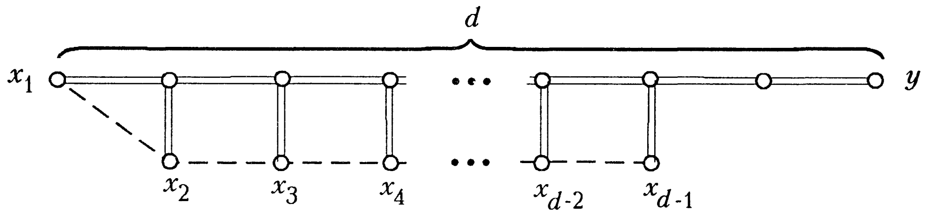

Рис. 2

Заметим, что при дополнительном условии $f(x_1) = f(x_2)$ получим отображение с теми же значениями параметров изометричности и отделимости, что и в предыдущем случае, но отображение f не будет вложением. Несложно привести аналогичные примеры и для произвольных значений d и k таких, что $d > k \geqslant 3$.

Теорема 1 дает ответ на вопрос: для каких графов G все отображения f из $\mathcal{F}_k$, $k \geqslant 3$, будут k-монотонными на G?m

- Кратчайшая l-цепь в графе G называется *тупиковой*, если она не является собственной подцепью никакой кратчайшей $(l+1)$-цепи.

Теорема 1. *Всякое отображение $f\colon G \to H$ из $\mathcal{F}_k$ является k-монотонным на G тогда и только тогда, когда граф G не содержит тупиковых цепей длины $2, 3, \dots, k-1$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим противное.

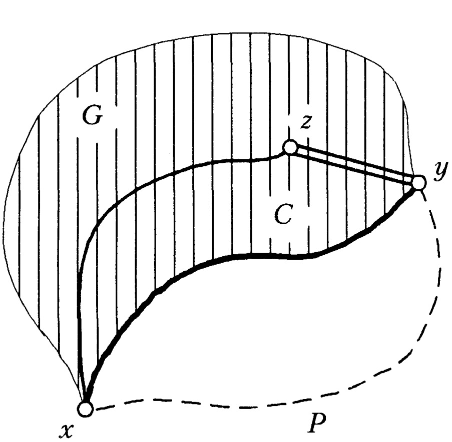

Рис. 3

Пусть $C(x, y)$ является тупиковой l-цепью в графе G и $l \in [2, k-1]$. Покажем, что можно так определить граф H и отображение $f\colon G \to H$, что отображение f принадлежит $\mathcal{F}_k$, но не является k-монотонным. Соединим $(l-1)$-цепью P вершины x и y — концы цепи C (см. рис. 3). Все вершины цепи P, кроме x и y, отличны от вершин графа G. Положим $V(H) = V(G) \cup V(P)$, $E(H) = E(G) \cup E(P)$. Тогда для любой вершины v из G отображение $f(v) = v$ определяет вложение $f\colon G \to H$. По построению отображе-

ние f является 1-изометрическим и не сохраняет l-отделимость, поскольку $\rho_G(x,y) = |C(x,y)| = l$, но $\rho_H(x,y) = |P| < l$.

Так как $l < k$, остается доказать, что f сохраняет k-отделимость. Достаточно убедиться, что f не сжимает никакие расстояния, отличные от $\rho_G(x,y)$.

Всякая кратчайшая цепь в H, проходя через P и сокращая тем самым расстояние на пути между x и y на единицу, должна проходить через ребро, инцидентное вершине x или y, и затем достигать вершину z (на рис. 3 изображен случай, когда цепь выходит за вершину y). Если $z \in V(C)$, то $\rho_G(x,z) = l-1$ или $\rho_G(y,z) = l-1$. Если $z \notin V(C)$, то $(l+1)$-цепь $C(x,y) \cup \{z\}$ не является кратчайшей в G, так как цепь $C(x,y)$ тупиковая. Следовательно, $\rho_G(x,z) \leqslant l$ или $\rho_G(y,z) \leqslant l$. Таким образом, во всех случаях расстояние в графе G между вершинами z и x или z и y оказывается не больше, чем расстояние между ними в графе H. Следовательно, отображение f не сжимающее.

Достаточность. Пусть отображение $f\colon G \to H$ из $\mathcal{F}_k$ не является k-монотонным на G, т. е. существует i, $i < k$, такое, что f не сохраняет i-отделимость. Из всех таких i выберем максимальное. Тогда f сохраняет $(i+1)$-отделимость и $i+1 \leqslant k$. Если $i = 1$, то $f \in \mathcal{F}_2$. Следовательно, f является 2-монотонным. Поэтому $i \geqslant 2$. Так как f не сохраняет i-отделимость, в G существуют вершины x и y такие, что $\rho_G(x,y) \geqslant i$, а $\rho_H(f(x),f(y)) < i$. Поскольку $(i+1)$-отделимость сохраняется, имеем $\rho_G(x,y) = i$. Пусть $C(x,y)$ — кратчайшая i-цепь в графе G. Для завершения доказательства остается показать, что $C(x,y)$ является тупиковой цепью. Действительно, в противном случае существует смежная с x или y вершина z в G такая, что $\rho_G(x,z) = i+1$ или $\rho_G(y,z) = i+1$ (второй случай симметричен первому и доказывается аналогично). Учитывая 1-изометричность отображения f, получаем, что в графе H справедливы следующие соотношения:

$$\rho_H(f(x),f(z)) \leqslant \rho_H(f(x),f(y)) + \rho_H(f(y),f(z)) < i+1.$$

Это противоречит сохранению $(i+1)$-отделимости отображением f для вершин x и z. Теорема 1 доказана.

Замечание. В теореме 1 при $k = 2$ множество запретов пусто, поэтому теорема 1 верна при этом значении параметра k, т. е. всякое отображение f из $\mathcal{F}_2$ является 2-монотонным на любом связном графе.

Из леммы 1 и теоремы 1 вытекает

Следствие. *Если граф G не содержит тупиковых цепей длины $2,3,\dots,k-1$, то всякое отображение $f\colon G \to H$ из $\mathcal{F}_k$ взаимно локально изометрическое (т. е. f является k-изометрическим, а f^{-1} — $(k-1)$-изометрическим).*

§ 2. Свойство продолжения метрики

В работе [1] для конечных пространств с целочисленной метрикой определено свойство продолжения метрики. Пусть $S_i(x)$ — шар с радиусом i и центром в точке x.

- *Дискретное метрическое пространство* $\{X, \rho_X\}$ *обладает свойством продолжения метрики*, если для любых его точек x и y

$$S_1(x) \not\subseteq S_i(y) \text{ или } S_1(y) \not\subseteq S_i(x),$$

  где $i = \rho_X(x,y)$ и $i < d$ для конечных пространств диаметра $d = d(X)$. Если свойство продолжения метрики выполняется лишь для точек x и y таких, что $\rho_X(x,y) < k$, то оно называется *свойством k-продолжения* метрики.

Следующее предложение показывает, что для обыкновенных связных графов свойство k-продолжения метрики можно формулировать по-разному.

Предложение 2. *Для любого связного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

— *любые две вершины x и y графа G такие, что $\rho_G(x,y) < k$, принадлежат некоторой кратчайшей k-цепи;*

— *граф G не содержит тупиковых цепей длины меньшей k;*

— *граф G обладает свойством k-продолжения метрики.*

Обозначим через $\mathcal{G}_k^d$ класс конечных графов, имеющих диаметры не более d и обладающих свойством k-продолжения метрики.

Строение графов как дискретных метрических пространств естественно характеризовать разнообразием и пересекаемостью шаров, содержащихся в графе, когда радиусы этих шаров последовательно возрастают. Пусть $\bar{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_d)$, где τ_i — число различных шаров радиуса i в графе G, $i = 0, 1, \ldots, d(G)$. Тогда $\tau_0 = |V(G)|$, $\tau_d = 1$, $\tau_i \geqslant \tau_{i+1}$.

- Будем говорить, что *граф G обладает свойством t-разнообразия шаров*, если $\tau_i = |V(G)|$ для любого $i < t$. Граф, обладающий свойством t-разнообразия для $t = d(G)$, назовем *графом максимального разнообразия.*

Примерами графов максимального разнообразия являются графы гиперкубов и платоновых тел, граф Петерсена [7].

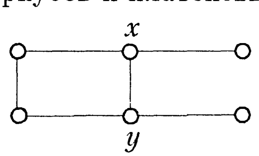

Рис. 4. Изображенный граф обладает свойством 2-разнообразия. Для него $\bar{\tau}(G) = (6, 6, 5, 1)$

Обозначим через $\mathcal{R}_t^d$ класс графов, имеющих диаметры не более d и обладающих свойством t-разнообразия шаров.

Лемма 2. *Почти все n-вершинные графы являются графами максимального разнообразия и содержатся в классе $\mathcal{R}_2^2$.*

Доказательство. Почти все графы имеют диаметр, равный двум. Поэтому достаточно доказать, что $\bar{r}(G) = (n, n, 1)$ для почти каждого n-вершинного графа G, т. е. все шары с радиусами 1 в типичном графе различны.

Обозначим через $\Psi(n)$ число графов с n помеченными вершинами, в которых имеются совпадающие шары радиуса 1. Убедимся в справедливости равенства

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(n)\Big/ 2^{\binom{n}{2}} = 0.$$

Пусть в графе G два шара радиуса 1 с центрами в вершинах x и y совпадают, т. е. $S_1(x) = S_1(y)$. Тогда $\rho_G(x,y) = 1$ и каждая вершина z, отличная от x и y, либо смежна с x и y, либо не смежна с x и y. Следовательно, все n-вершинные графы, в которых имеются, по крайней мере, две вершины x и y такие, что $S_1(x) = S_1(y)$ и $|S_1(x)| = m+2$, $0 \leqslant m \leqslant n-2$, могут быть получены следующим образом.

1. Среди n изолированных вершин отбираются две произвольные вершины x и y. Имеется $\binom{n}{2} < n^2$ возможностей.

2. Вершины x и y соединяются ребром (однозначно).

3. Среди оставшихся вершин отбираются m произвольных вершин. Имеется $\binom{n-2}{m}$ возможностей.

4. Каждая отобранная вершина соединяется ребром как с x, так и с y (однозначно).

5. Остальные ребра в произвольном числе назначаются так, чтобы не появилось нового ребра, инцидентного x или y. Имеется

$$2^{\binom{n}{2}-2(n-2)-1} = 2^{\binom{n}{2}-2n+3}$$

возможностей.

Из сказанного следует, что

$$\Psi(n) < n^2 2^{\binom{n}{2}-2n+3} \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n-2}{m} = n^2 2^{\binom{n}{2}-n+1} = o(2^{\binom{n}{2}}).$$

Лемма 2 доказана.

По определению классов графов $\mathcal{G}_k^d$ и $\mathcal{R}_t^d$ имеем

$$\mathcal{G}_1^d \supset \mathcal{G}_2^d \supset \cdots \supset \mathcal{G}_d^d, \qquad \mathcal{R}_1^d \supset \mathcal{R}_2^d \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d^d.$$

Для $k = t = 1$ справедливо равенство $\mathcal{G}_1^d = \mathcal{R}_1^d$, поскольку каждый из этих классов совпадает с классом всех графов (напомним, что рассматриваются только связные графы). Для $k = t = 2$ также имеем $\mathcal{G}_2^d = \mathcal{R}_2^d$, поскольку граф содержит тупиковую цепь длины 1 (т. е. ребро (x, y)) тогда и только тогда, когда $S_1(x) = S_1(y)$. Из леммы 2 и равенства $\mathcal{G}_2^d = \mathcal{R}_2^d$ непосредственно следует

Теорема 2. *Почти все n-вершинные графы обладают свойством продолжения метрики.*

Заметим, что пример графа на рис. 4 показывает, что $\mathcal{G}_3^3 \neq \mathcal{R}_3^3$. Действительно, этот граф не содержит тупиковых цепей длины 1 и 2, а $S_2(x) = S_2(y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Метрические свойства вложений и коды, сохраняющие расстояния //Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1988. Т. 10. С. 116–132.
2. **Федоряева Т. И.** Характеризация одного класса графов со свойством продолжения метрики // Методы дискретного анализа в исследовании функциональных систем. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. Вып. 47. С. 89–93.
3. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические кодирования с нулевой или асимптотически оптимальной избыточностью // 10-й Симпоз. по проблеме избыточности в информационных системах, Ленинград, 25 июня – 1 июля 1989 г.: Тез. докл. Л.: Ленингр. ин-т авиационного приборостроения, 1989. С. 27–30.
4. **Евдокимов А. А.** Кодирование аналоговых данных и локально изометрические вложения дискретных пространств // 9-я Всесоюз. конф. по теории кодирования и передачи информации, Одесса, 1988 г.: Тез. докл. Одесса: Научный совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», 1988. Ч. 1. С. 317–318.
5. **Федоряева Т. И.** Усиленные свойства продолжения метрики // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992. Вып. 52. С. 112–118.
6. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
7. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила
2 февраля 1994 г.