СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
Январь – март 1994. Том 1, № 1, 13–19

УДК 519.71

СХЕМНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ СОРТИРОВКИ*)

Э. Ш. Коспанов

Для решения задачи о сортировке предлагается подход, основанный на минимизации некоторого параметра, характеризующего реальное время вычислений. Такой подход был применен автором для задачи о поиске наибольшего числа в данном массиве. Построена логическая схема в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$, упорядочивающая по убыванию заданные m чисел. Глубина схемы не превышает асимптотически величины $\log_2 n + 6{,}12 \log_2 m$, где n — длина двоичной записи каждого из заданных чисел.

В данной работе рассматривается следующая

Задача. *По m каналам связи одновременно поступают m чисел. Требуется расположить эти числа по порядку убывания за минимально возможное время.*

Задачи такого типа, называемые *задачами о сортировке*, обычно решают в алгоритмических терминах, минимизируя число сравнений (см. [1]). Здесь мы предлагаем решать задачу сортировки в терминах булевых функций и схем из функциональных элементов, реализующих эти функции, минимизируя глубину схемы — параметр, характеризующий реальное время вычисления.

Ранее автором была рассмотрена задача о поиске наибольшего числа в заданном массиве [2]. Подход из [2] применяется в данной работе для решения задачи о сортировке. Используемые ниже определения (булевой функции, схемы из функциональных элементов, базиса и других понятий, известных в математической кибернетике) можно найти, например, в [3, 4].

Переформулируем задачу о сортировке в терминах схем. Пусть заданы m чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, записанные в двоичной системе счисления:

$$a_1 = (x_{11}x_{12}\ldots x_{1n}),\ a_2 = (x_{21}x_{22}\ldots x_{2n}), \ldots, a_m = (x_{m1}x_{m2}\ldots x_{mn}),$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-16009).

© 1994 Э. Ш. Коспанов

где x_{ij} либо нуль, либо единица. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — перестановка исходных чисел такая, что $b_i \geqslant b_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Предположим, что числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ имеют вид

$$b_1 = (y_{11}y_{12}\cdots y_{1n}), \quad b_2 = (y_{21}y_{22}\cdots y_{2n}), \quad \ldots, \quad b_m = (y_{m1}y_{m2}\cdots y_{mn}).$$

Очевидно, что y_{ij} есть булева функция переменных $x_{11}, \ldots, x_{mn}$. Таким образом, заданы mn переменных и mn булевых функций от них. Если мы построим схему из функциональных элементов, реализующую систему функций $y_{11}, \ldots, y_{mn}$, и подадим на входы схемы произвольный набор из m чисел, то на выходах схемы получим требуемую перестановку этих чисел.

Пример. Пусть $m = 2$, $n = 2$. Система функций $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ задана следующей таблицей:

x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	y_{11}	y_{12}	y_{21}	y_{22}
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

$$y_{11} = x_{11} \vee x_{21}, \quad y_{12} = x_{12}(x_{11} \vee \bar{x}_{21}) \vee x_{22}(x_{21} \vee \bar{x}_{11}),$$
$$y_{21} = x_{11}x_{21}, \quad y_{22} = x_{22}(x_{12} \vee x_{11}\bar{x}_{21}) \vee \bar{x}_{11}x_{12}x_{21}.$$

Схема, реализующая систему функций $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$, изображена на рис. 1. Эта схема построена в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$. (Ниже мы будем рассматривать схемы лишь в этом базисе.)

Глубиной схемы называется число элементов в самой длинной цепи элементов, идущей от входов к выходам схемы. (Глубина схемы, изображенной на рис. 1, равна пяти.)

Дадим постановку сформулированной выше задачи о сортировке на языке схем.

Задача (схемная постановка). *Построить схему* Σ_{mn}, *реализующую систему функций* $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{mn}$, *глубина* $p(\Sigma_{mn})$ *которой удовлетворяет неравенству* $p(\Sigma_{mn}) \leqslant \log_2 n + 6,12 \log_2 m$.

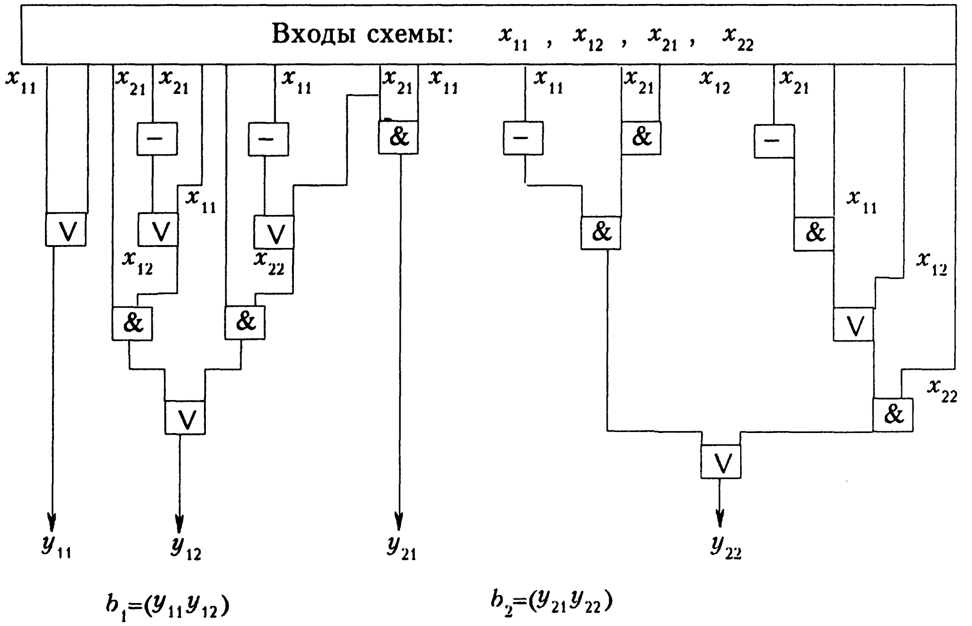

Рис. 1

Представление функций

Для построения схемы нам потребуется задать явными формулами функции y_{11}, y_{12}, $\ldots$, y_{mn}.

Определим вспомогательную функцию $f(a > b)$.

Пусть $a = (u_1 u_2 \ldots u_n)$ и $b = (v_1 v_2 \ldots v_n)$ — два n-разрядных числа, находящиеся среди заданных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, например $a = a_i$, $b = a_j$. Тогда $f(a > b)$ есть булева функция переменных

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn},$$

равная единице на тех наборах, на которых число a больше числа b; здесь

$$(x_{i1} x_{i2} \ldots x_{in}) \text{ — двоичная запись числа } a,$$
$$(x_{j1} x_{j2} \ldots x_{jn}) \text{ — двоичная запись числа } b.$$

Ясно, что

$$f(a > b) = \begin{cases} u_1 \bar{v}_1, & \text{если } n = 1, \\ u_1 \bar{v}_1 \vee (u_1 \sim v_1) u_2 \bar{v}_2, & \text{если } n = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Действительно, либо a больше b по первому разряду, что реализуется первым слагаемым в (1), либо первые разряды чисел a и b совпадают, но a больше b по второму разряду, что реализуется вторым дизъюнктивным слагаемым в (1).

В обозначениях $E_i = u_i \sim v_i$, $K_i = u_i\bar{v}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, функция (1) выглядит следующим образом:

$$f(a > b) = K_1 \vee E_1 K_2.$$

Теперь рассмотрим $f(a > b)$ для $n = 3$. Если $a > b$, то возможны следующие случаи.

Случай 1: a больше b хотя бы по одному из первых двух разрядов. Тогда $K_1 \vee E_1 K_2 = 1$.

Случай 2: a совпадает с b по первым двум разрядам, но a больше b по третьему разряду. Тогда

$$E_1 E_2 K_3 = 1, \qquad f(a > b) = K_1 \vee E_1 K_2 \vee E_1 E_2 K_3.$$

Аналогично можно показать, что для произвольного n

$$f(a > b) = K_1 \vee E_1 K_2 \vee E_1 E_2 K_3 \vee \cdots \vee E_1 E_2 \ldots E_{n-1} K_n.$$

Теперь рассмотрим функцию $f(a \geqslant b)$, равную единице лишь тогда, когда a не меньше b. Функция $f(a \geqslant b)$ отличается от функции $f(a > b)$ только одним дизъюнктивным слагаемым $E_1 E_2 \ldots E_n$ и имеет вид

$$f(a \geqslant b) = K_1 \vee E_1 K_2 \vee E_1 E_2 K_3 \vee \cdots \vee E_1 E_2 \ldots E_{n-1} K_n \vee E_1 E_2 \ldots E_n. \quad (2)$$

Функция (2) будет использована для описания искомых функций

$$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}, \ldots, y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{mn}.$$

Итак, даны m чисел

$$a_1 = (x_{11} x_{12} \ldots x_{1n}), \ldots, a_m = (x_{m1} x_{m2} \ldots x_{mn}).$$

Выберем некоторое i и рассмотрим $2(n-1)$ функций

$$f(a_i \geqslant a_j), \quad f(a_j \geqslant a_i), \quad j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n.$$

Каждая из них аналогична функции $f(a \geqslant b)$, явный вид которой уже установлен.

Рассмотрим функцию F_i^k, равную единице лишь на тех наборах значений исходных переменных, на которых i-е исходное число a должно находиться на k-м месте в искомой перестановке чисел.

Вначале заметим, что для того чтобы i-е число попало на k-е место, должны выполняться два следующих условия:

— имеется не менее $k-1$ чисел, бо́льших или равных a_i;
— имеется не менее $m-k-1$ чисел, меньших или равных a_i;

Если выполнены оба условия, то число a_i (или равное ему) будет помещено на k-е место. Это означает, что вектор

$$v = (f(a_1 \geqslant a_i), f(a_2 \geqslant a_i), \ldots, f(a_m \geqslant a_i))$$

имеет не менее $k-1$ ненулевых компонент, а вектор

$$w = (f(a_i \geqslant a_1), f(a_i \geqslant a_2), \ldots, f(a_i \geqslant a_m))$$

имеет не менее $n-k-1$ ненулевых компонент.

Пусть $S_{k-1}^{m-1}(z_1, z_2, \ldots, z_{m-1})$ — монотонная симметрическая функция с порогом $k-1$ (т. е. равная единице лишь на наборах, содержащих не менее $k-1$ единиц), а $S_{m-k-1}^{m-1}(z_1, z_2, \ldots, z_{m-1})$ — монотонная симметрическая функция с порогом $m-k-1$. Нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} F_i^k(n) = S_{k-1}^{m-1}&(f(a_1 \geqslant a_i), f(a_2 \geqslant a_i), \ldots, f(a_m \geqslant a_i)) \\ &\& S_{k-1}^{m-1}(f(a_i \geqslant a_1), f(a_i \geqslant a_2), \ldots, f(a_i \geqslant a_m)). \end{aligned}$$

Функция $F_i^k(n)$ равна единице лишь на тех наборах значений переменных $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}$, на которых число a_i находится на k-м месте в искомой перестановке, т. е. если набору значений переменных $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}$ соответствуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то число a_i является k-м по величине.

Рассмотрим n функций

$$y_{k1}^i, y_{k2}^i, \ldots, y_{kn}^i, \tag{3}$$

порожденных функцией $F_i^k(n)$, таких, что

$$y_{kj}^i = F_i^k(n) \& x_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Функции (3) «переставляют» i-е исходное число на k-е место. Другими словами, если i-е число на каком-либо наборе входных переменных оказалось k-м по величине, то на этом наборе выполняются равенства

$$x_{ij} = y_{kj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если же на каком-либо наборе i-е число не является k-м по величине, то на этом наборе функции y_{kj}, $1 \leqslant j \leqslant n$, равны нулю.

Мы установили вид функции $F_i^k(n)$ для произвольного значения i. Поэтому у нас имеется m функций

$$F_1^k(n), F_2^k(n), \ldots, F_m^k(n).$$

Так же, как и выше, рассмотрим «переставляющие» функции

$$y_{kj}^1 = F_1^k(n)\&x_{11},\ y_{kj}^2 = F_2^k(n)\&x_{2j}, \ldots, y_{kj}^m = F_m^k(n)\&x_{mj},\ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Аналогичные построения проведем для всех возможных значений k. В результате получим mn функций вида y_{ij}^k.

Нетрудно убедиться, что для любого k имеют место равенства

$$\begin{array}{ccccccc} y_{k1}^1 & \vee & y_{k1}^2 & \vee & \ldots & \vee & y_{k1}^m = y_{k1}, \\ y_{k2}^1 & \vee & y_{k2}^2 & \vee & \ldots & \vee & y_{k2}^m = y_{k2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{kn}^1 & \vee & y_{kn}^2 & \vee & \ldots & \vee & y_{k1n}^m = y_{kn}, \end{array} \tag{4}$$

левые части которых дают искомые представления функций

$$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{mn}.$$

Построение схемы и оценка ее глубины

Напомним структуру представления искомых функций:

$$f(a \geqslant b),\ S_{k-1}^{m-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}),\ S_{m-k-1}^{m-1}(z_1, \ldots, z_{m-1}),\ y_{kj}^i = F_i^k(n)\&x_{ij}.$$

$\Sigma(\geqslant)$ — схема, реализующая все функции вида $f(a_i \geqslant a_j)$,

$\Sigma(S)$ — схема, реализующая все монотонные симметрические функции $S_{k-1}^{m-1}(z_1, \ldots, z_{m-1})$ и $S_{m-k-1}^{m-1}(z_1, \ldots, z_{m-1})$,

$\Sigma(y_{kj}^i)$ — схема для y_{kj}^i,

$\Sigma(\vee)$ — схема, реализующая все функции вида (4).

Соединение указанных схем дает искомую схему.

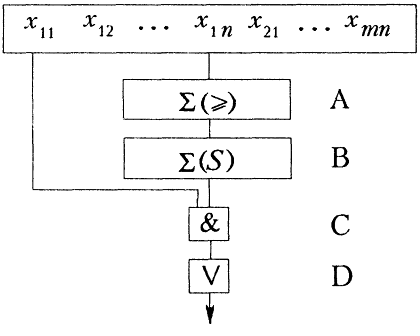

Рис. 2. «Блочное» описание схемы

В схеме, изображенной на рис. 2, блок A реализует все $2m(m-1)$ функции вида $f(a_i \geqslant a_j)$, $f(a_j \geqslant a_i)$ и имеет $2m(m-1)$ выходов, которые

подаются затем на соответствующие входы блока B. Выходы блока B перемножаются попарно $(S^i_{m-k-1} \& S^i_{k-1})$, затем умножаются соответствующим образом на входные переменные. В результате на выходах блока C реализуются функции вида y^i_{kj}. Блок D соответствующим образом складывает (логически) эти функции, и на выходах схемы реализуются требуемые функции.

Опишем строение блоков A, B, C, D и оценим их глубину.

Блок C реализует набор пар конъюнкций. Глубина блока равна двум.

Блок D. На каждом выходе этого блока реализуется конъюнкция длины $m-1$. Глубина блока не больше величины $\lfloor \log_2 m \rfloor + 1$.

Блок A. Схема, реализующая функцию $f(a \geqslant b)$, была построена В. М. Храпченко [5]. Глубина этой схемы асимптотически равна $\log_2 n$ (приближается к величине $\log_2 n$ с ростом n).

Блок B. В. М. Храпченко показал [6], что любую монотонную симметрическую функцию m переменных можно реализовать схемой, глубина которой асимптотически (с ростом m) не превышает величины $5,12 \log_2 m$.

Таким образом, глубина схемы, упорядочивающей m чисел разрядности n, не превышает асимптотически (с ростом m и n) величины $\log_2 n + 6,12 \log_2 m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Блейхут Р.** Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. С. 349–351.
2. **Коспанов Э. Ш.** Схемная реализация поиска экстремума в массиве чисел //Методы дискретного анализа в теории графов и сложности. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992. Вып. 52. С. 59–65.
3. **Дискретная** математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С. В. Яблонского, О. Б. Лупанова. М.: Наука, 1974.
4. **Лупанов О. Б.** О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1963. Вып. 10. С. 63–98.
5. **Храпченко В. М.** Об асимптотической оценке времени сложения параллельного сумматора // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967. Вып. 19. С. 107–122.
6. **Храпченко В. М.** Некоторые оценки времени умножения // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1978. Вып. 33. С. 222–228.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила
24 сентября 1993 г.